

电路理论

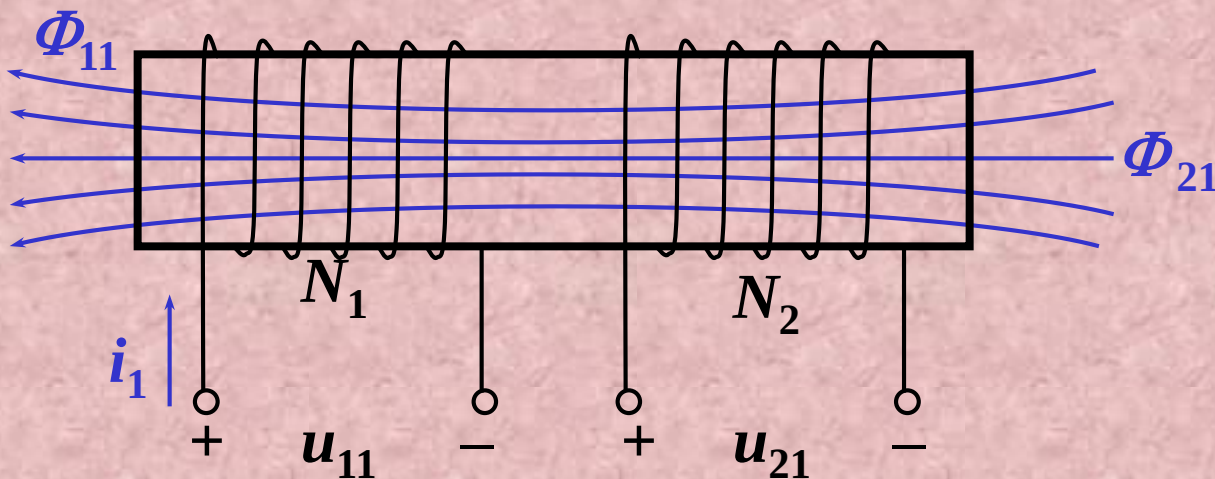
华中科技大学电气与电子工程学院
何仁平

2015年9月

第8章 耦合电路

§ 8-1 耦合电感及其伏安关系

一、互感、耦合电感的伏安关系



当线圈1中通入电流 i_1 时，在线圈1中产生磁通 (*magnetic flux*)，同时，有部分磁通穿过临近线圈2。当 i_1 为时变电流时，磁通也将随时间变化，从而在线圈两端产生感应电压。

当 i_1 、 u_{11} 、 u_{21} 方向与 Φ 符合右手定则时，根据电磁感应定律和楞次定律：

$$u_{11} = \frac{d\Psi_{11}}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad u_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

u_{11} : 自感电压; u_{21} : 互感电压。 Ψ : 磁链 (*magnetic linkage*)

当线圈周围无铁磁物质(空心线圈)时, 有

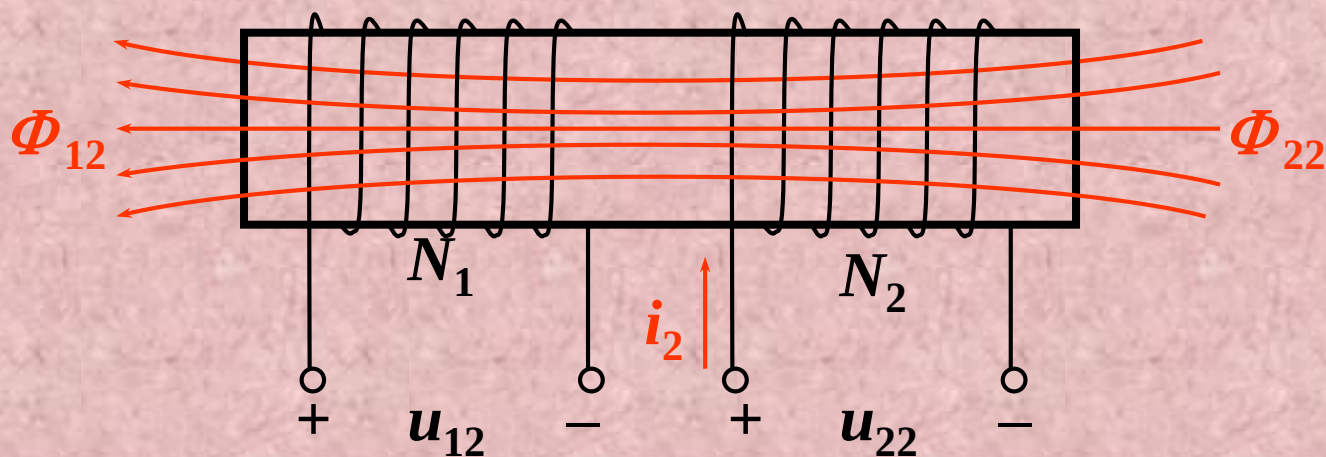
$$u_{11} = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1})$$

$$u_{21} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1})$$

L_1 : 线圈1的自感系数; M_{21} : 线圈1对线圈2的互感系数。

单位: H

同理, 当线圈2中通电流 i_2 时会产生磁通 Φ_{22} , Φ_{12} 。
 i_2 为时变时, 线圈2和线圈1两端分别产生感应电压
 u_{22} , u_{12} 。



$$u_{12} = \frac{d\psi_{12}}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2})$$

$$u_{22} = \frac{d\psi_{22}}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2})$$

可以证明： $M_{12} = M_{21} = M$ 。

当两个线圈同时通以电流时，每个线圈两端的电压均包含自感电压和互感电压：

$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

在正弦交流电路中，其相量形式的方程为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

互感的性质

- ①从能量角度可以证明，对于线性电感 $M_{12}=M_{21}=M$
- ②互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关，如其他条件不变时，有

$$M \propto N_1 N_2 \quad (L \propto N^2)$$

耦合系数 (*coupling coefficient*) k :

k 表示两个线圈磁耦合的紧密程度。

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

全耦合 (*perfect coupling*) : $K=1$

紧耦合 $K \approx 1$

无耦合 (孤立电感) $K=0$

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

$$M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (K = 1, \text{ 即全耦合时})$$

互感小于两元件自感的几何平均值。

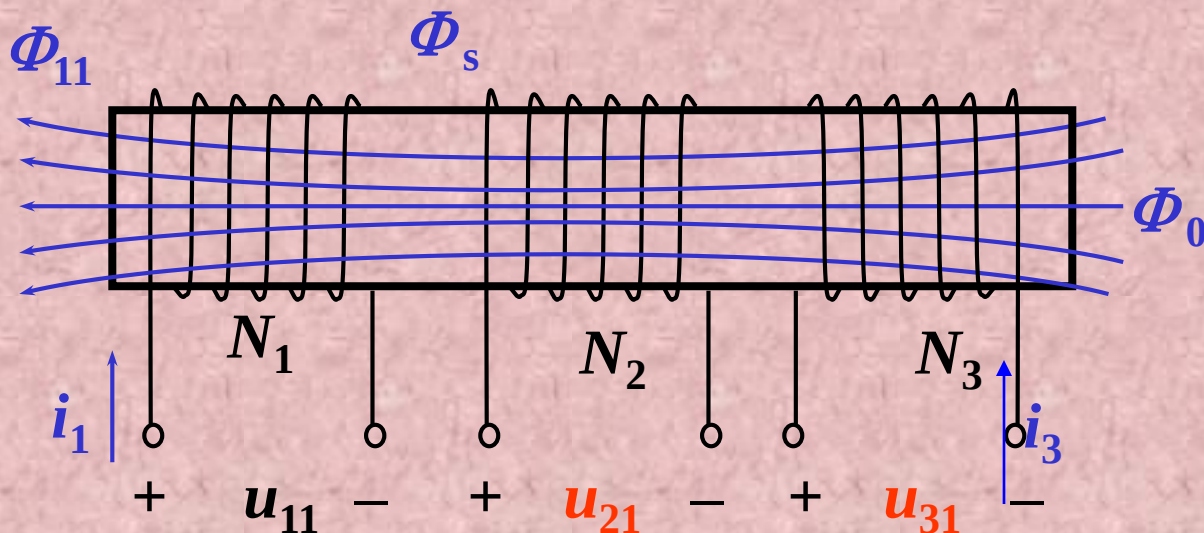
二、同名端及其判别

具有互感的线圈两端的电压包含自感电压和互感电压。表达式的符号与参考方向和线圈绕向有关。对自感电压，当 u, i 取关联参考方向， i 与 Φ 符合右螺旋定则，其表达式为

$$u_{11} = \frac{d\Psi_{11}}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

上式说明，对于自感电压由于电压电流为同一线圈上的，只要参考方向确定了，其数学描述便可容易地写出，可不用考虑线圈绕向。对线性电感，用 u, i 描述其特性，当 u, i 取关联方向时，符号为正；当 u, i 为非关联方向时，符号为负。

对互感电压，因产生该电压的的电流在另一线圈上，因此，要确定其符号，就必须知道两个线圈的绕向。这在电路分析中显得很不方便。



$$u_{21} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{31} = -M_{31} \frac{di_1}{dt}$$

引入同名端可以解决这个问题。

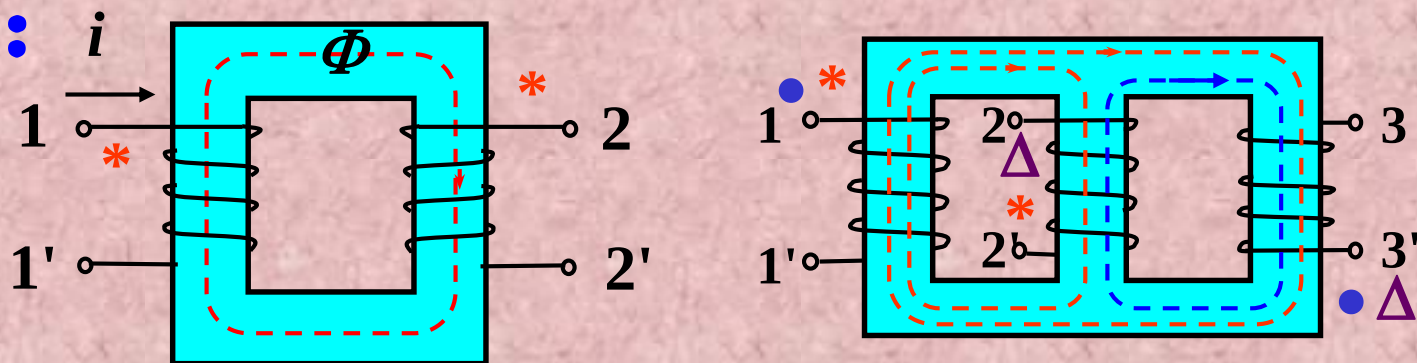
同名端：当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，其所产生的磁场相互加强时，则这两个对应端子称为同名端。

同名端表明了线圈的相互绕法关系。

确定同名端的方法：

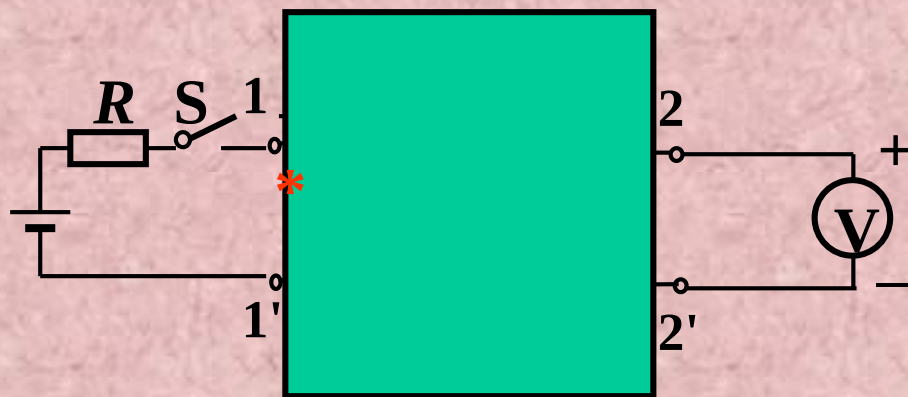
- (1) 当两个线圈中电流同时由同名端流入(或流出)时，两个电流产生的磁场相互增强。
- (2) 当随时间增大的时变电流从一线圈的一端流入时，将会引起另一线圈相应同名端的电位升高。

例：



注意：线圈的同名端必须两两确定。

同名端的实验测定:



如图电路, 当闭合开关S时, i 增加,

$$\frac{di}{dt} > 0, \quad u_{22'} = M \frac{di}{dt} > 0 \quad \text{电压表正偏。}$$

当两组线圈装在黑盒里, 只引出四个端线组, 要确定其同名端, 就可以利用上面的结论来加以判断。

当S突然闭合时:

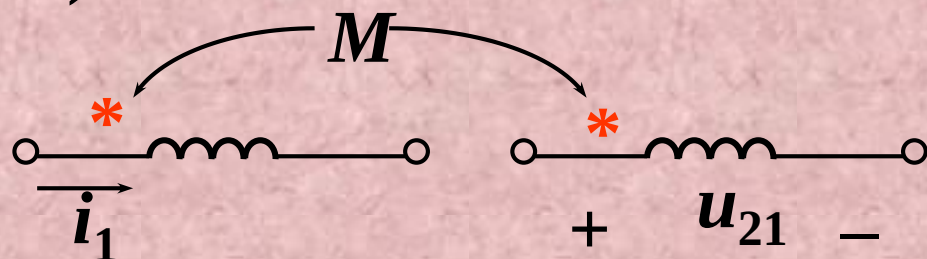
电压表若正偏, 则1、2为同名端

电压表若反偏, 则1、2为异名端

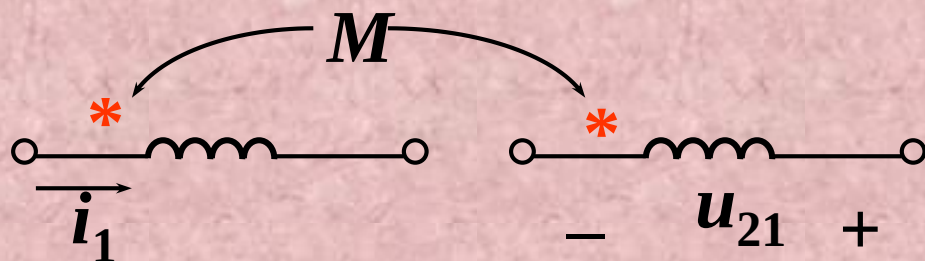


三、由同名端及 u, i 参考方向确定互感线圈的特性方程

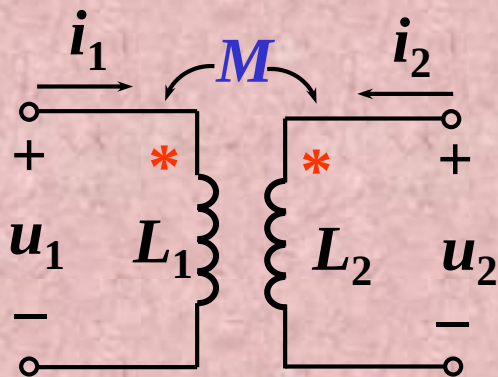
有了同名端，以后表示两个线圈相互作用，就不再考虑实际绕向，而只画出同名端及参考方向即可。(参考前图，标出同名端得到下面结论)。



$$u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$



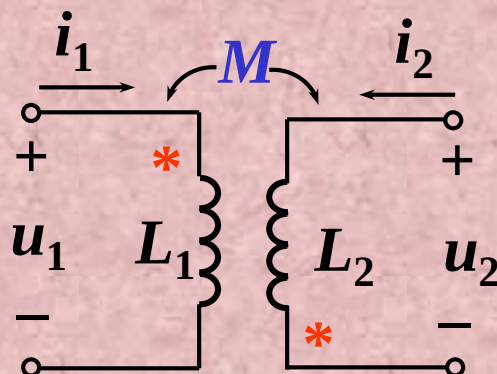
$$u_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$$



时域形式:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

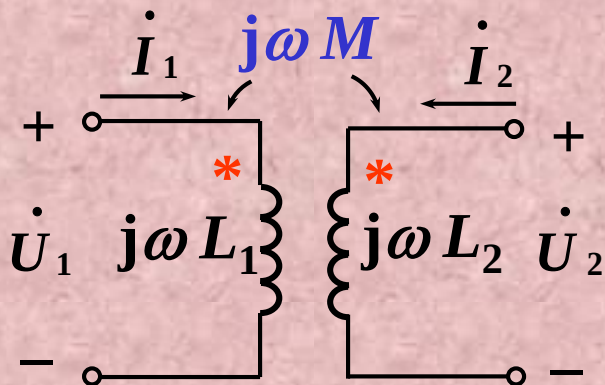
$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

在正弦交流电路中, 其相量形式的方程为



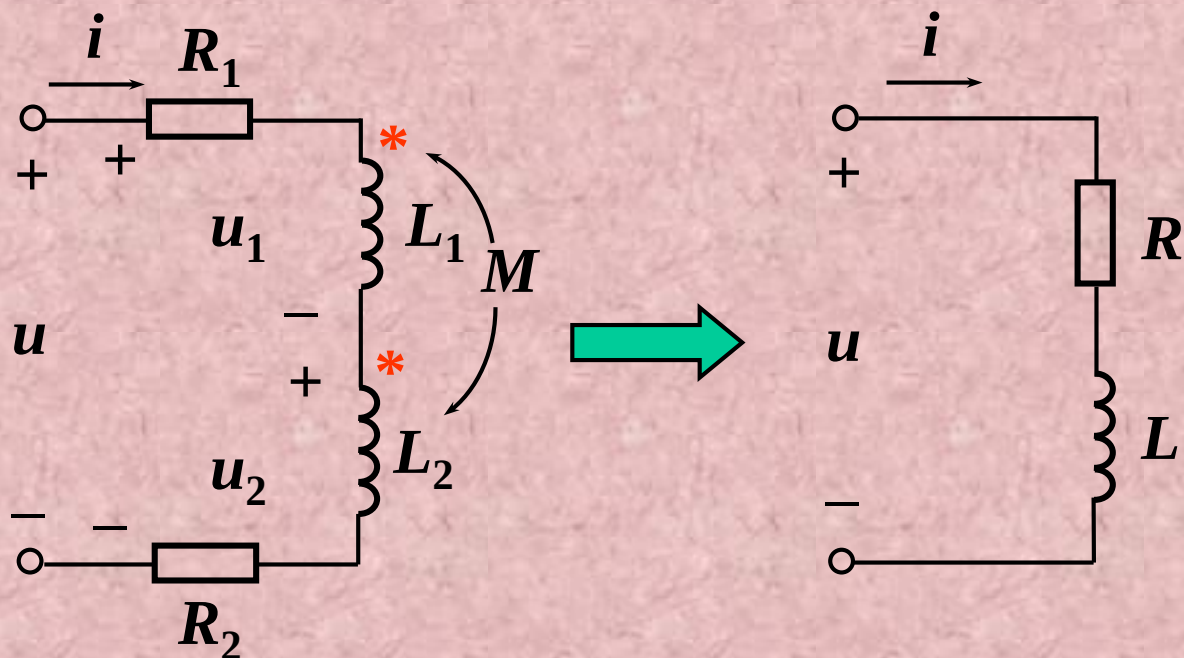
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

§ 8-2 耦合电路的计算

一、互感线圈的串联

1. 顺串



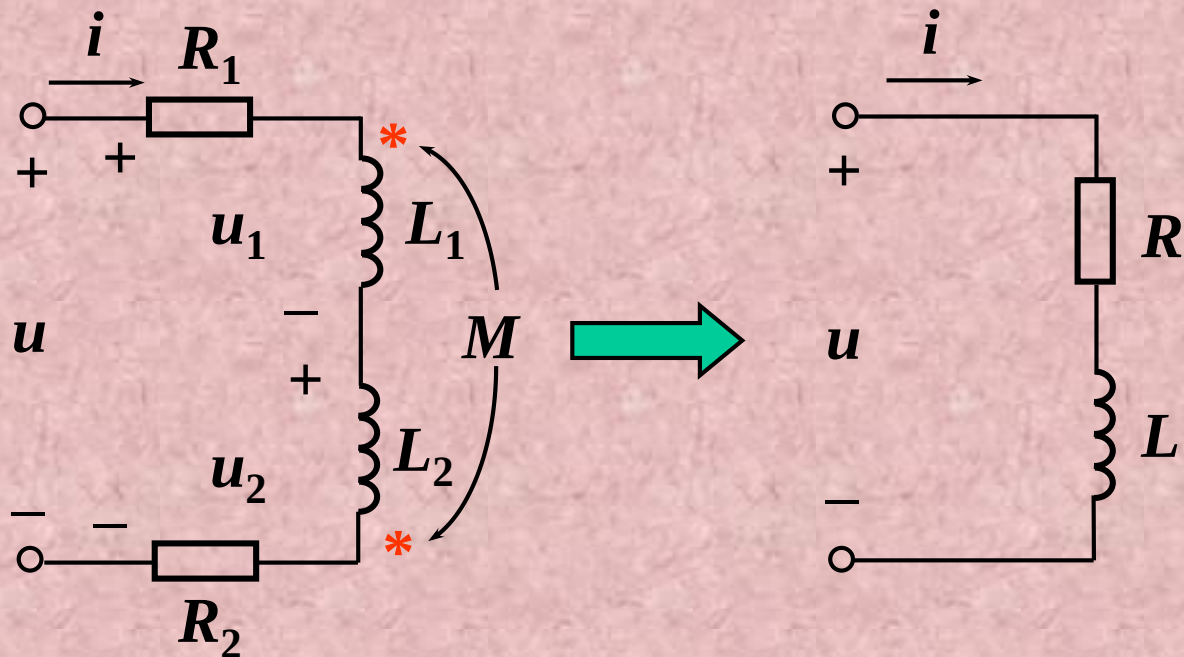
$$u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$\therefore R = R_1 + R_2$$

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

2. 反串



$$u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i$$

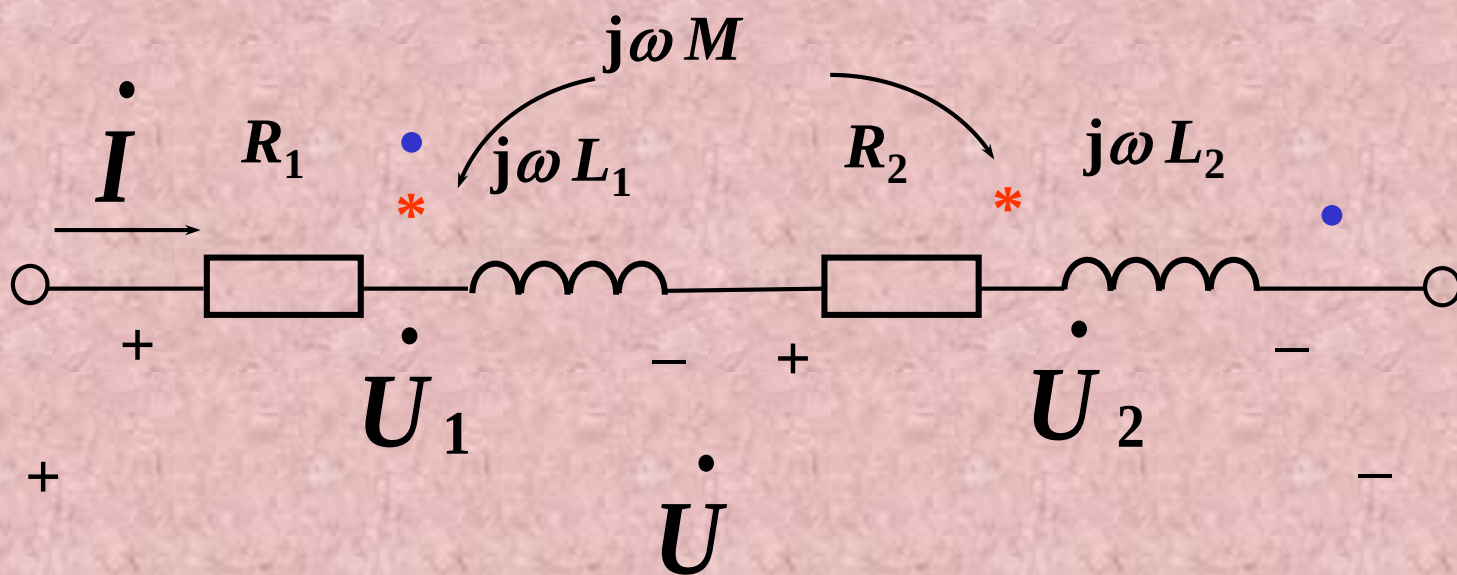
$$= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$\therefore R = R_1 + R_2 \quad L = L_1 + L_2 - 2M$$

$$L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0 \quad \therefore M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$$

互感不大于两个自感的算术平均值。

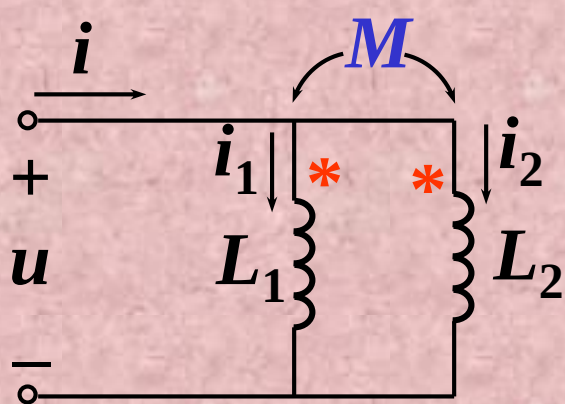
在正弦激励下：



$$\dot{U} = (R_1 + R_2) \dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M) \dot{I}$$

二、互感线圈的并联

1. 同名端在同侧



$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

解得 u, i 的关系:

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \geq 0$$

$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \geq 0$$

故 $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

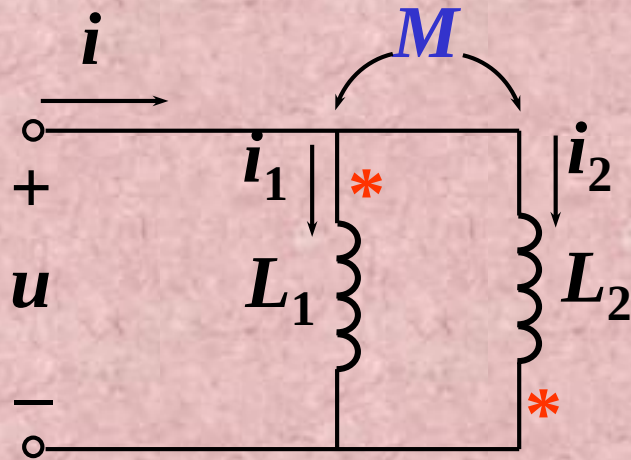
互感小于两元件自感的几何平均值。

如全耦合： $L_1 L_2 = M^2$

当 $L_1 \neq L_2$, $L_{eq} = 0$ (物理意义不明确)

$L_1 = L_2$, $L_{eq} = L$ (相当于导线加粗, 电感不变)

2. 同名端在异侧



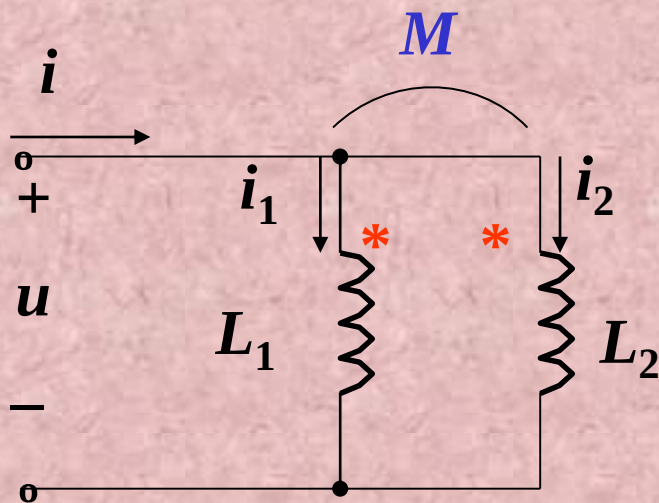
$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

解得 u, i 的关系:

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \geq 0$$

三、“T”形去耦等效法



$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$= (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

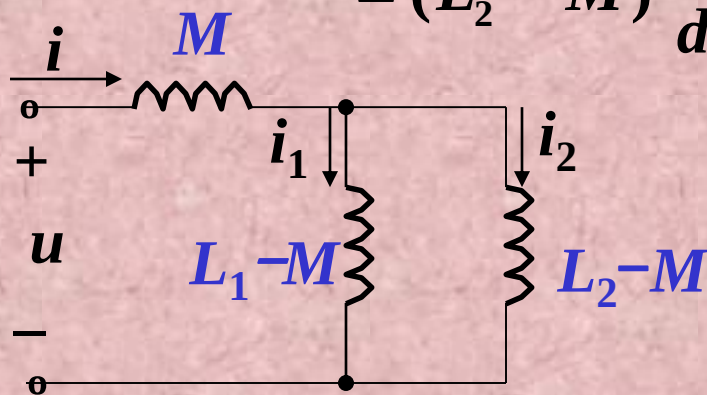
$$u = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

$$= (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

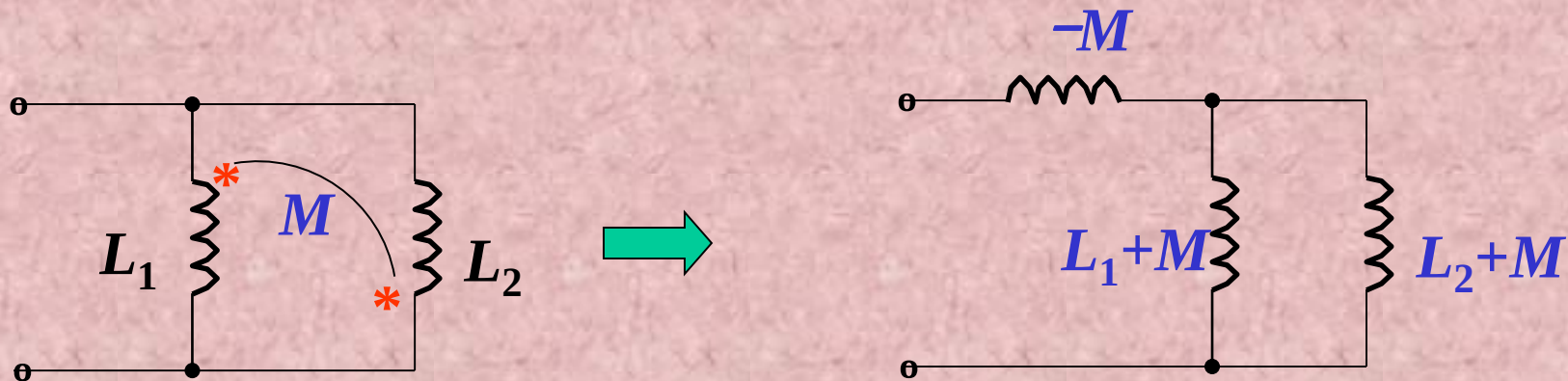
$$i_2 = i - i_1$$

$$i_1 = i - i_2$$

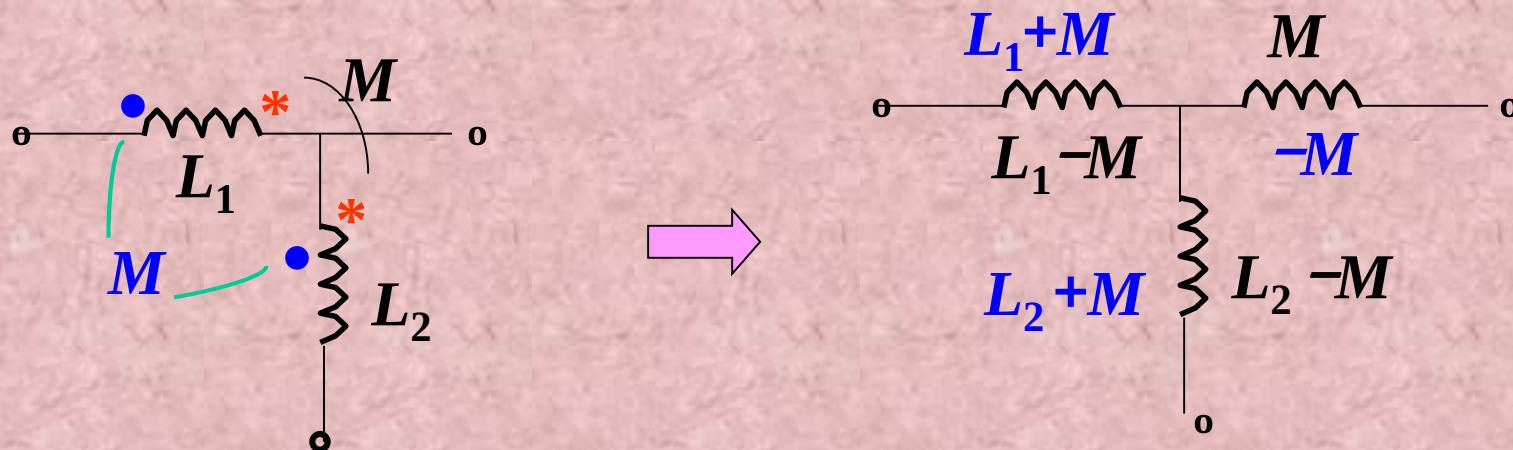
画等效电路



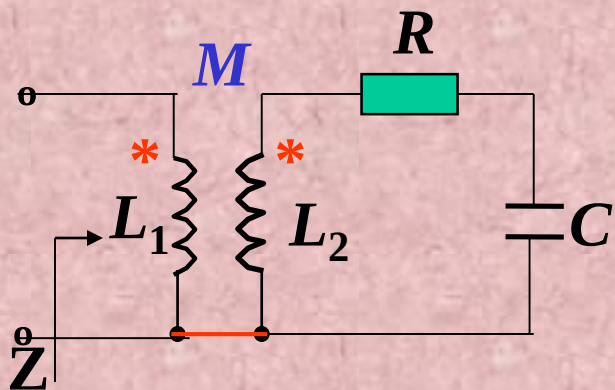
同理可推得



上面方法同样适合于两个互感线圈所在的支路只有一个公共节点情况

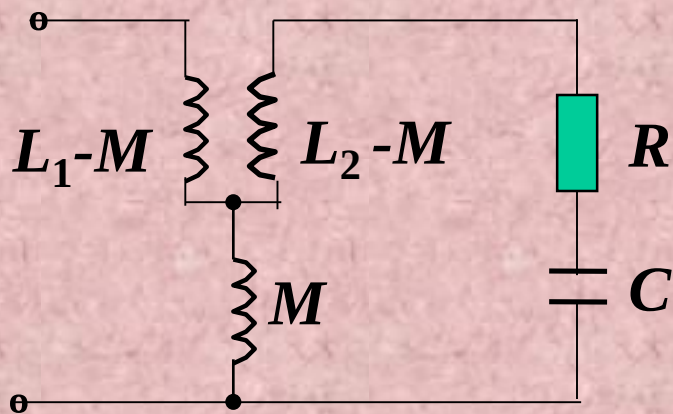


例1：如图，求入端阻抗 $Z=?$

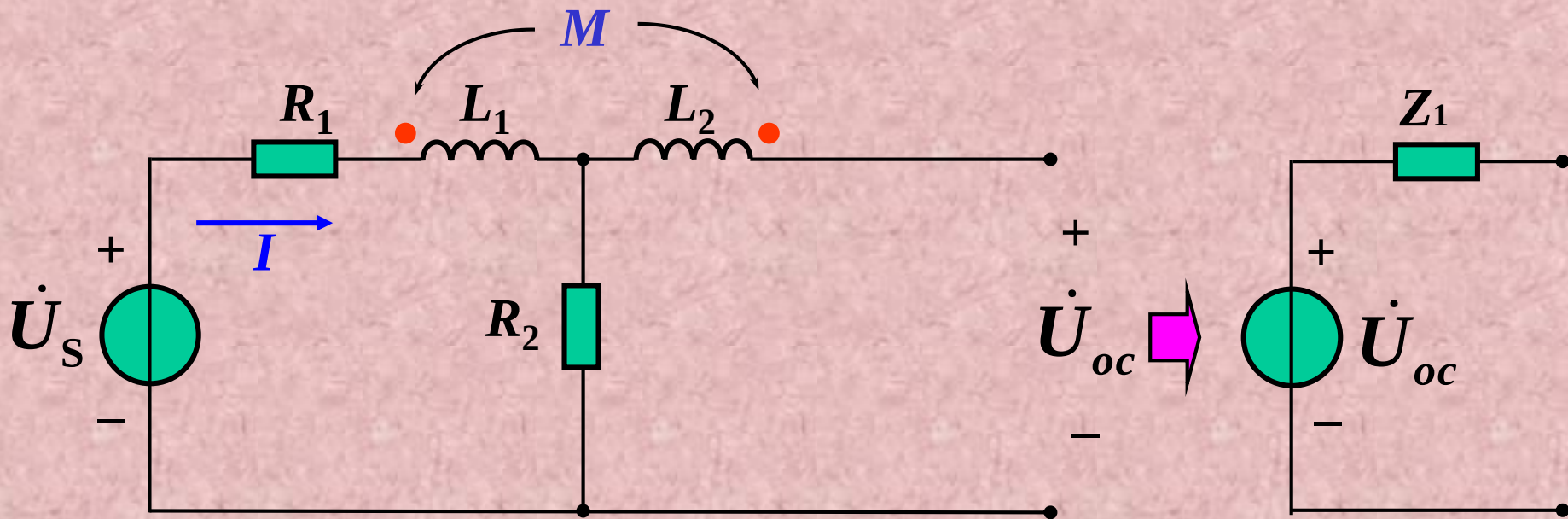


法一：端口加压求流

法二：去耦等效



例2: 已知 $\omega L_1 = \omega L_2 = 10\Omega$, $\omega M = 5\Omega$, $R_1 = R_2 = 6\Omega$, $U_s = 6V$, 求其戴维南等效电路。

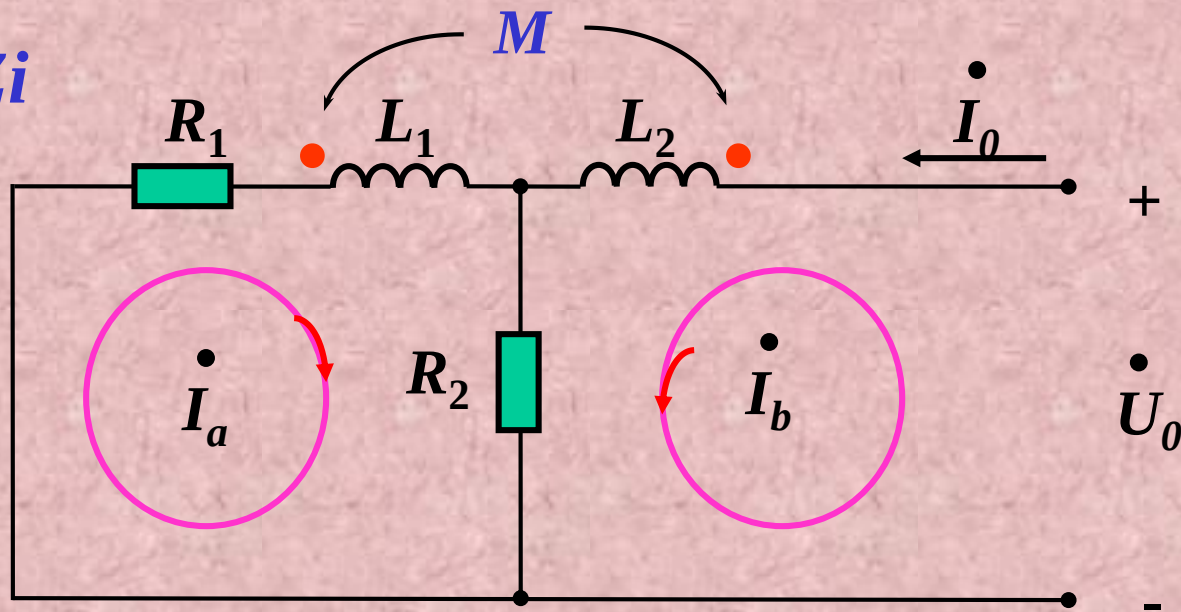


计算开路电压 $\dot{U}_{oc}$ 。

$$\dot{U}_{oc} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} = (6 + j5) \times 0.384 \angle -39.8^\circ = 3 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + j\omega L_1 + R_2} = \frac{6 \angle 0^\circ}{12 + j10} = \frac{6 \angle 0^\circ}{15.62 \angle 39.8^\circ} = 0.384 \angle -39.8^\circ \text{ A}$$

求内阻: Z_i

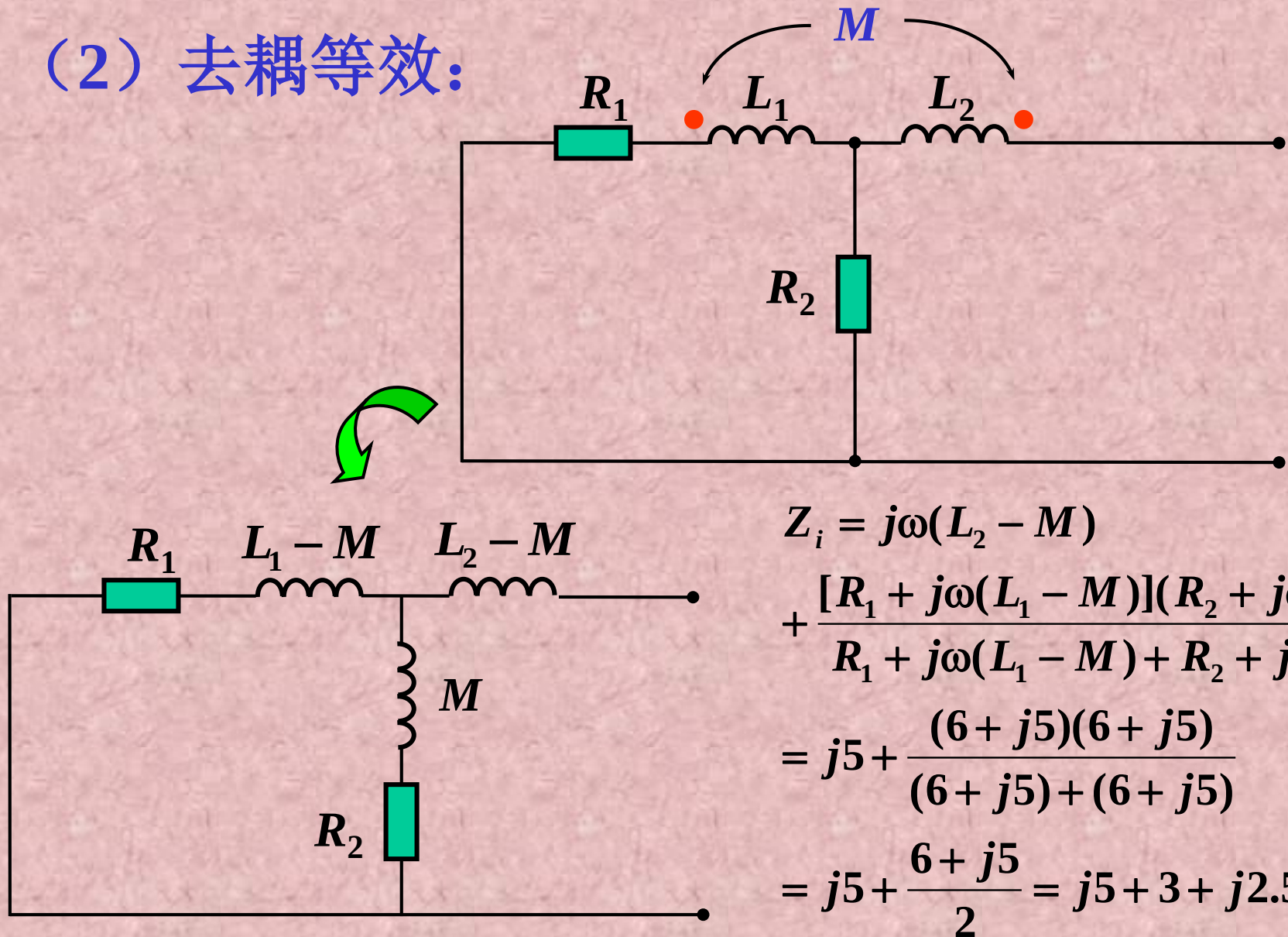


(1) 加压求流: 列回路电流方程

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + j\omega L_1) \dot{I}_a + R_2 \dot{I}_b + j\omega M \dot{I}_b = 0 \\ (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_b + R_2 \dot{I}_a + j\omega M \dot{I}_a = \dot{U}_0 \end{cases}$$

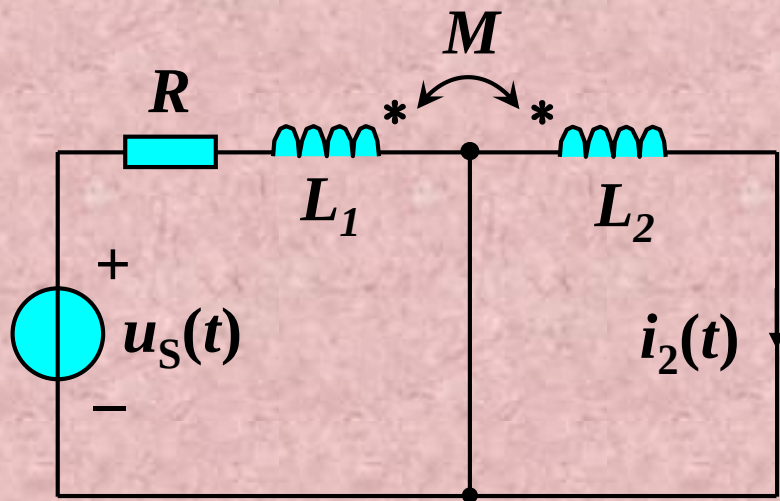
$$\dot{I}_0 = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_0}{3 + j7.5}, \quad Z_i = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = 3 + j7.5 = 8.08 \angle 68.2^\circ \Omega$$

(2) 去耦等效:



$$\begin{aligned}
 Z_i &= j\omega(L_2 - M) \\
 &+ \frac{[R_1 + j\omega(L_1 - M)](R_2 + j\omega M)}{R_1 + j\omega(L_1 - M) + R_2 + j\omega M} \\
 &= j5 + \frac{(6 + j5)(6 + j5)}{(6 + j5) + (6 + j5)} \\
 &= j5 + \frac{6 + j5}{2} = j5 + 3 + j2.5 \\
 &= 3 + j7.5 = 8.08 \angle 68.2^\circ \Omega
 \end{aligned}$$

例：如图所示电路，已知 $L_1=7\text{H}$, $L_2=4\text{H}$, $M=2\text{H}$, $R=8\Omega$, $u_s(t)=20\sin t\text{ V}$ ，求电流 $i_2(t)$ 。



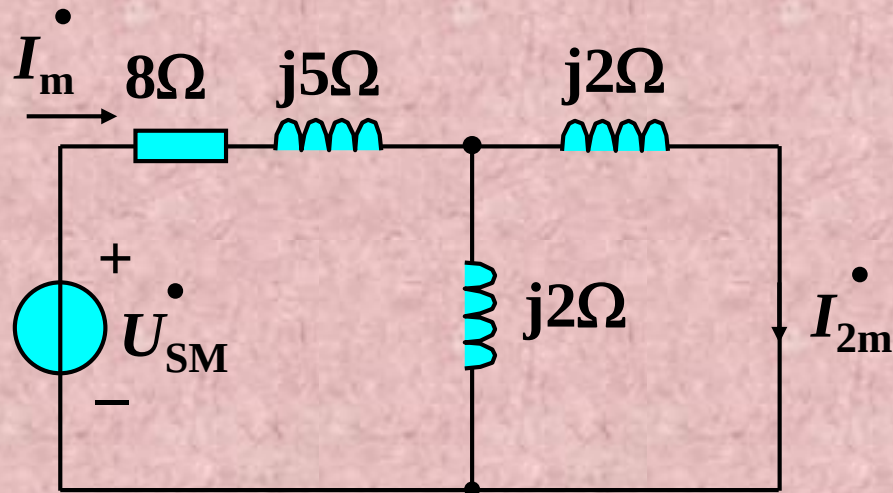
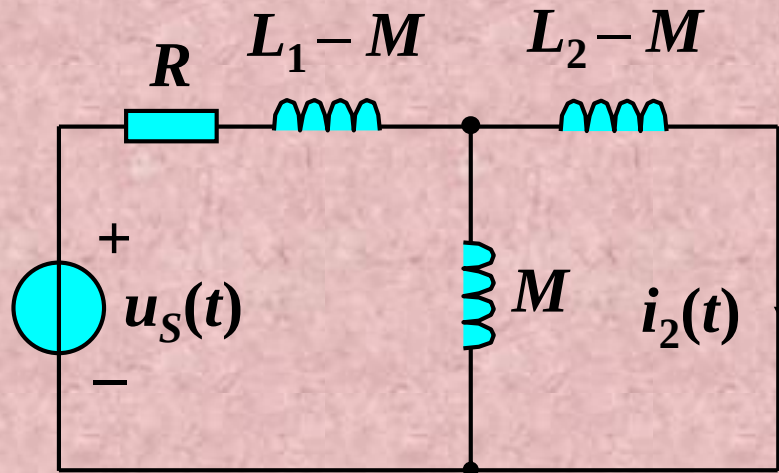
解：

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{sm}}{8 + j6} = \frac{20\angle 0^\circ}{10\angle 36.9^\circ}$$

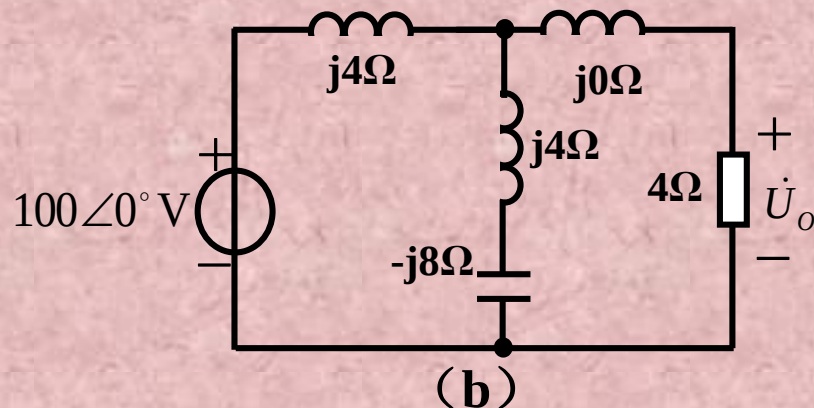
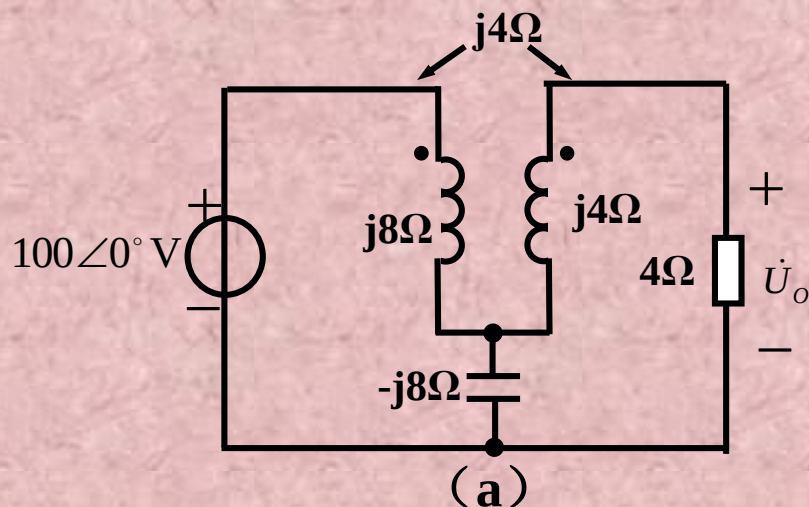
$$= 2\angle -36.9^\circ (\text{A})$$

$$\dot{I}_{2m} = \frac{1}{2} \dot{I}_m = 1\angle -36.9^\circ$$

$$i_2(t) = \sin(t - 36.9^\circ) \text{ A}$$



[例] 求图(a)所示电路的输出电压的大小和相位。

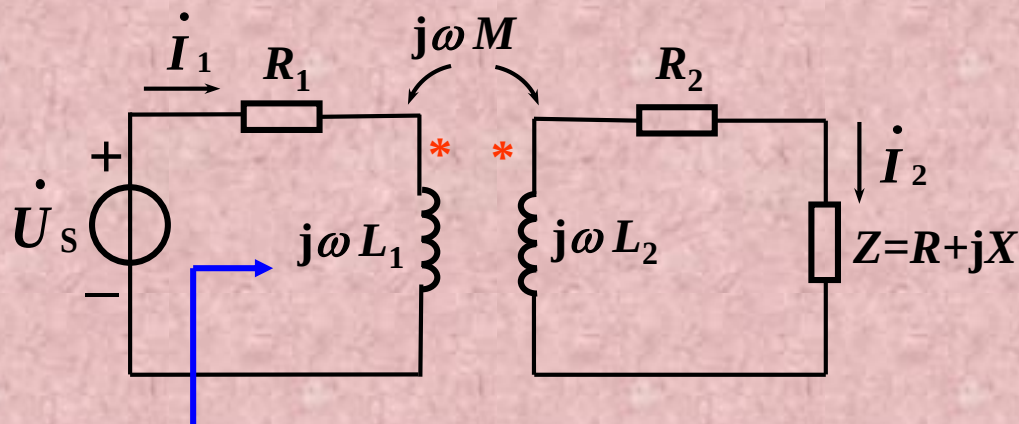


解：图(a)中耦合电感同名端相接，去耦等效电路如图(b)所示

$$\dot{U}_o = \frac{(-j4) // 4}{(-j4) // 4 + j4} \times 100\angle 0^\circ = 100\angle -90^\circ \text{ V}$$

所以输出电压的大小为**100V**，相位为 **-90°**

四、空心变压器

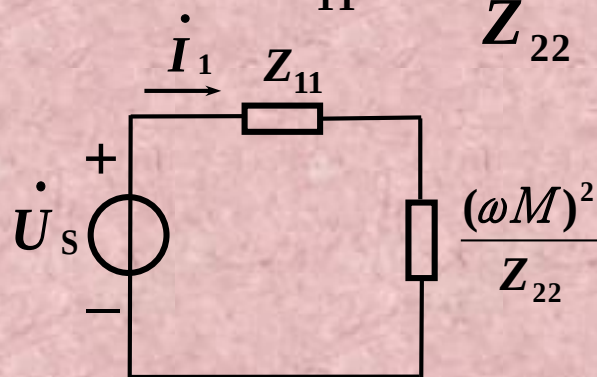


原边回路总抗阻 $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$

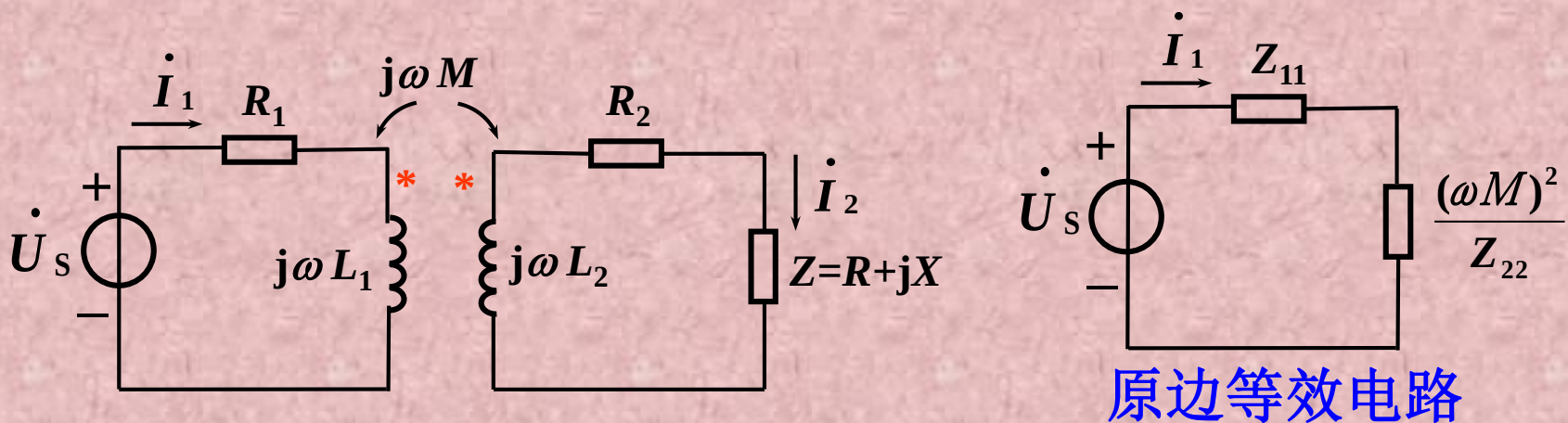
副边回路总阻抗 $Z_{22} = (R_2 + R) + j(\omega L_2 + X)$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_s \\ -j\omega M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 \end{cases} \quad \dot{I}_2 = \frac{j\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}} \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

$$Z_{\text{in}} = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$



原边等效电路

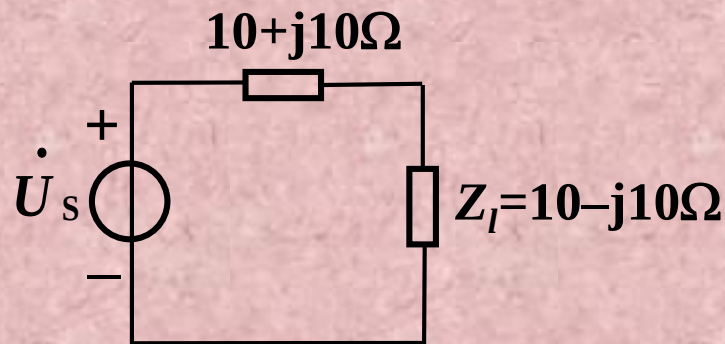
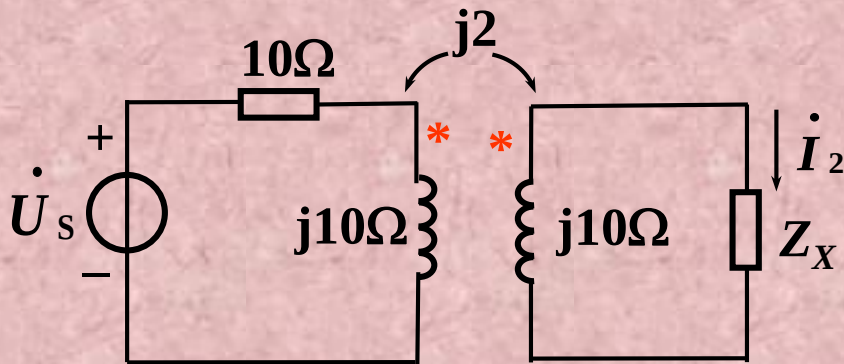


$$Z_l = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}} = \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - j \frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = R_l + jX_l$$

$Z_l = R_l + jX_l$: 副边反映在原边回路中的阻抗
(反映阻抗)。

例 已知 $U_s=20\text{ V}$ ，原边等效电路的反映阻抗 $Z_l=10-j10\Omega$ 。

求: Z_X 并求负载获得的有功功率。



解: $Z_l = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{4}{Z_X + j10} = 10 - j10$

$$\therefore Z_X = \frac{4}{10 - j10} - j10 = 0.2 - j9.8\Omega$$

此时负载获得的功率: $P = P_{R_{\text{引}}} = \left(\frac{20}{10+10}\right)^2 R_l = 10\text{ W}$

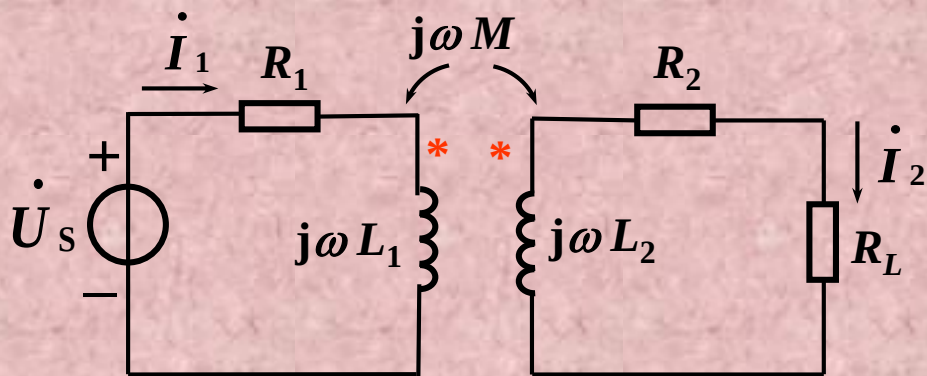
实际是最佳匹配: $Z_l = Z_{11}^*$, $P = \frac{U_s^2}{4R} = 10\text{ W}$

例2. $L_1=3.6\text{H}$, $L_2=0.06\text{H}$, $M=0.465\text{H}$, $R_1=20\Omega$, $R_2=0.08\Omega$,

$$R_L=42\Omega , \omega=314\text{rad/s},$$

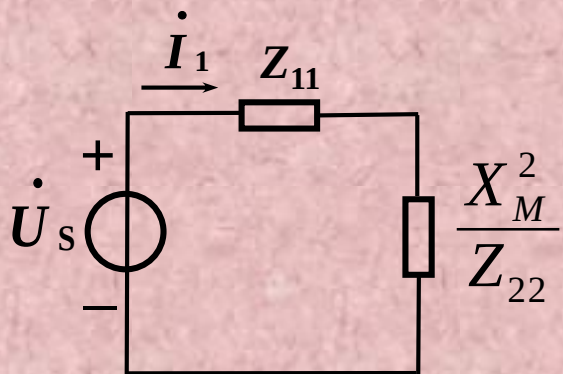
$$\dot{U} = 115\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{求: } \dot{I}_1, \dot{I}_2.$$



法一： 回路法。

法二： 空心变压器原边等效电路。



$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 = 20 + j113\Omega$$

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j\omega L_2 = 42.08 + j18.85\Omega$$

$$Z_l = \frac{X_M^2}{Z_{22}} = 464\angle(-24.1^\circ) \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + Z_l} = 110.5\angle(-64.9^\circ) \text{ A} \quad \dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = 0.35\angle 1^\circ \text{ A}$$

例：如图电路，已知 $R_1=7.5\Omega$ ， $\omega L_1=30\Omega$ ， $1/(\omega C_1)=22.5\Omega$ ， $R_2=60\Omega$ ， $\omega L_2=60\Omega$ ， $\omega M=30\Omega$ ， $\dot{U}_S = 15\angle 0^\circ \text{V}$

求电流 $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ 及 R_2 上消耗的功率 P_2 。

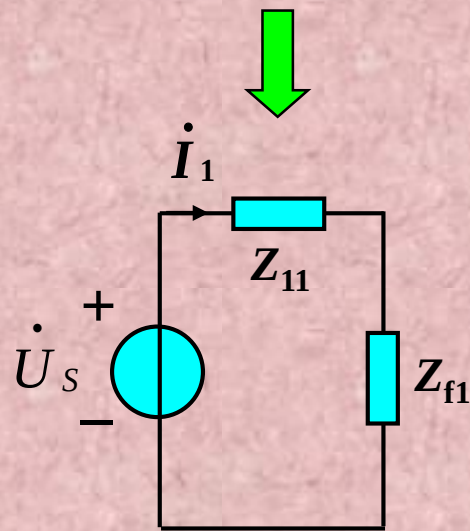
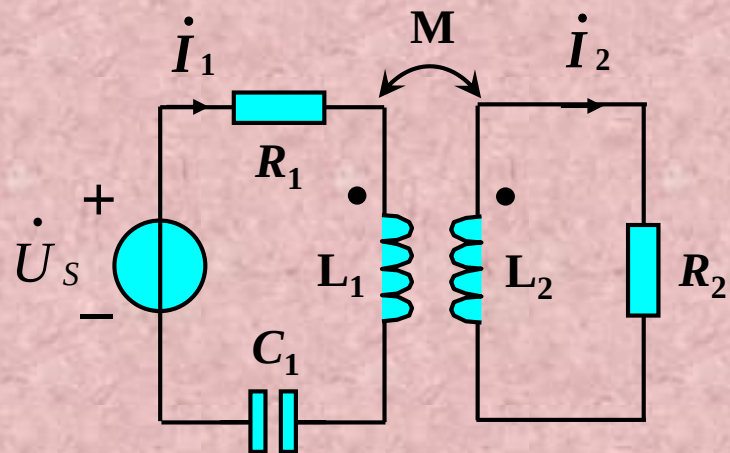
解： $Z_{11} = R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})$
 $= 7.5 + j7.5(\Omega)$

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 = 60 + j60(\Omega)$$

$$Z_{f1} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{30^2}{60 + j60} = 7.5 - j7.5(\Omega)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11} + Z_{f1}} = \frac{15\angle 0^\circ}{7.5 + j7.5 + 7.5 - j7.5} = 1\angle 0^\circ (\text{A})$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = \frac{j30 \times 1\angle 0^\circ}{60 + j60} = 0.25\sqrt{2}\angle 45^\circ (\text{A})$$



例：如图电路，已知 $R_1=7.5\Omega$ ， $\omega L_1=30\Omega$ ， $1/(\omega C_1)=22.5\Omega$ ， $R_2=60\Omega$ ， $\omega L_2=60\Omega$ ， $\omega M=30\Omega$ ， $\dot{U}_S = 15\angle 0^\circ \text{V}$

求电流 $\dot{I}_1$ ， $\dot{I}_2$ 及 R_2 上消耗的功率 P_2 。

解：

$$Z_{11} = 7.5 + j7.5(\Omega)$$

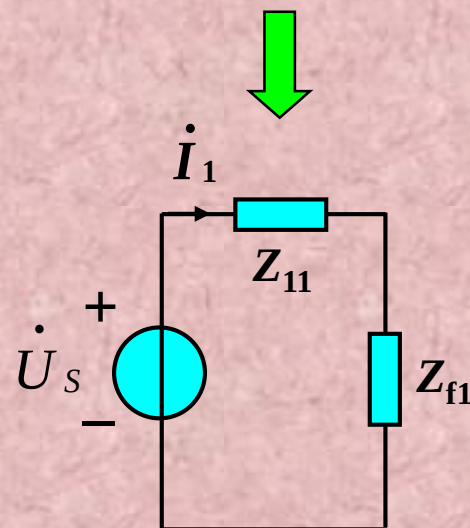
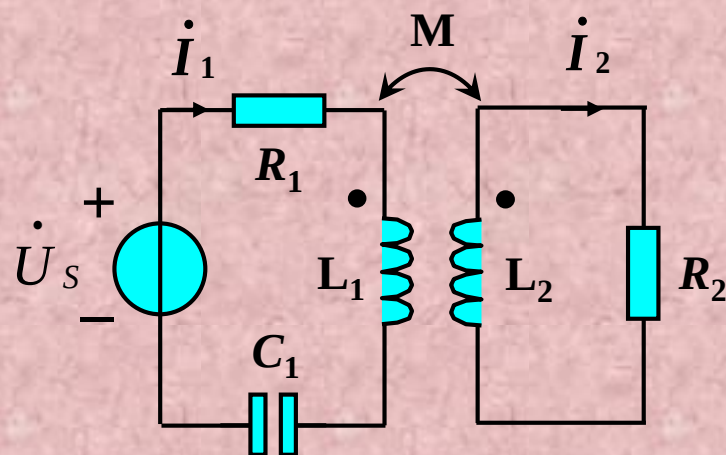
$$Z_{f1} = 7.5 - j7.5(\Omega)$$

$$\dot{I}_1 = 1\angle 0^\circ (\text{A})$$

$$\dot{I}_2 = 0.25\sqrt{2}\angle 45^\circ (\text{A})$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (0.25\sqrt{2})^2 \times 60 = 7.5(\text{W})$$

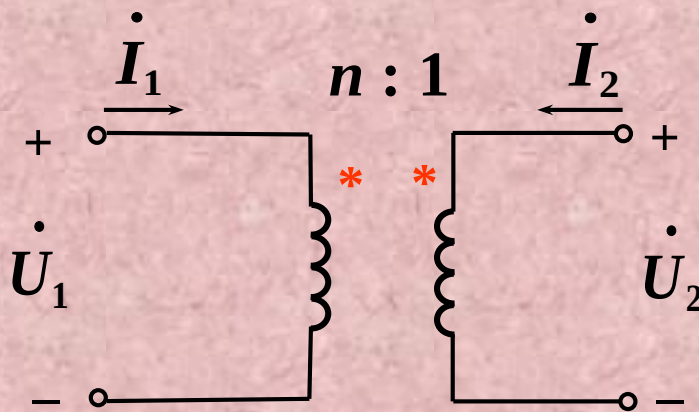
变压器不消耗功率，也可以根据原边电流来计算。



§ 8-3 理想变压器 (*ideal transformer*):

磁导率 $\mu \rightarrow \infty$, $L_1, M, L_2 \rightarrow \infty$, L_1/L_2 比值不变, 则有

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\frac{1}{n} \dot{I}_2 \end{cases}$$

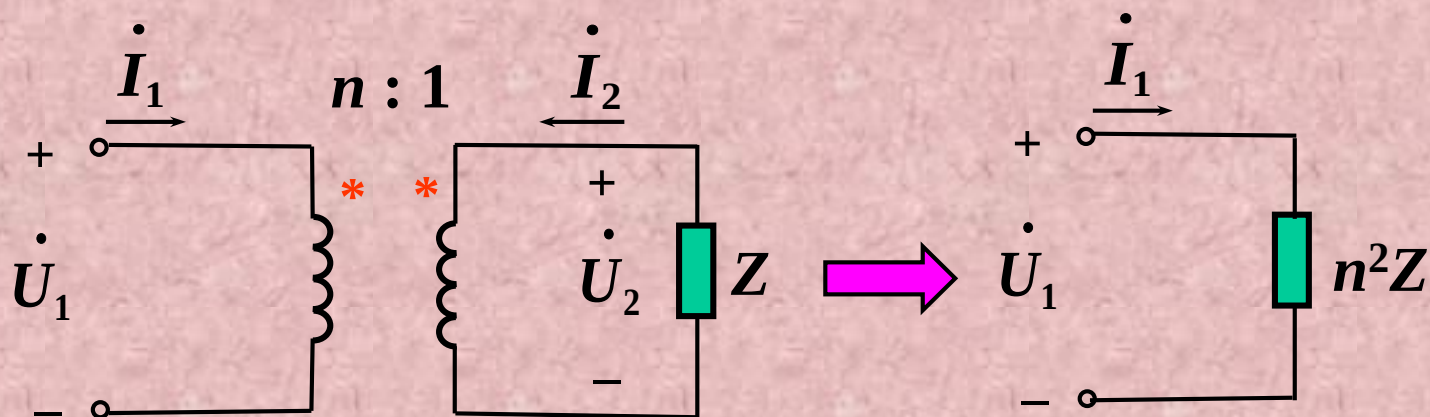


理想变压器的元件特性

理想变压器的电路模型

理想变压器的性质：

(a) 阻抗变换

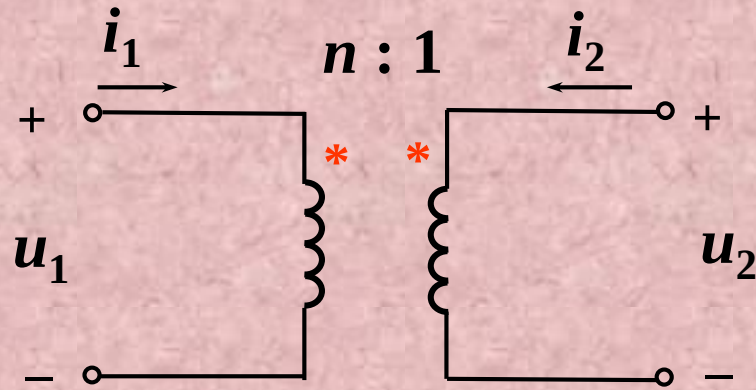


$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-1/n\dot{I}_2} = n^2 \left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right) = n^2 Z$$

(b) 功率

理想变压器的特性方程为代数关系，因此无记忆作用。

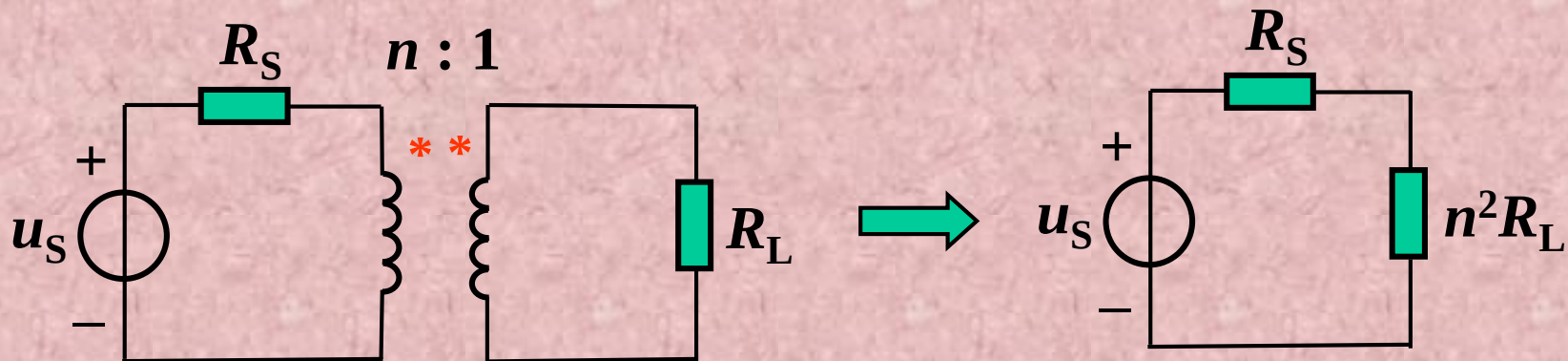
$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}$$



$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 + \frac{1}{n} u_1 \times (-ni_1) = 0$$

由此可以看出，理想变压器既不储能，也不耗能，在电路中只起传递信号和能量的作用。

例1. 已知电阻 $R_S = 1\text{k}\Omega$ ，负载电阻 $R_L = 10\Omega$ 。
为使 R_L 上获得最大功率，求理想变压器的
变比 n 。



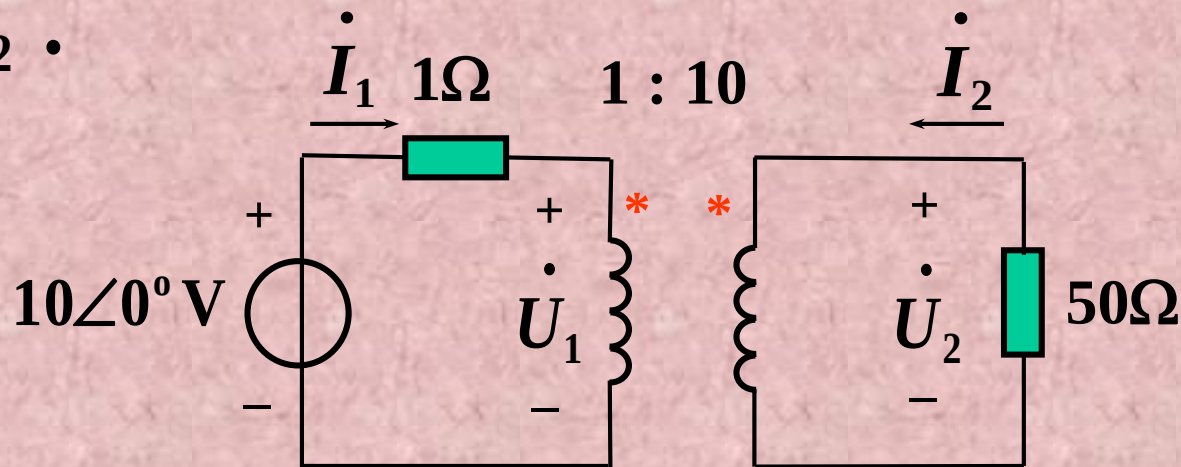
当 $n^2 R_L = R_S$ 时匹配，即

$$10n^2 = 1000$$

$$\therefore n^2 = 100,$$

$$n = 10$$

例2. 求 $\dot{U}_2$.



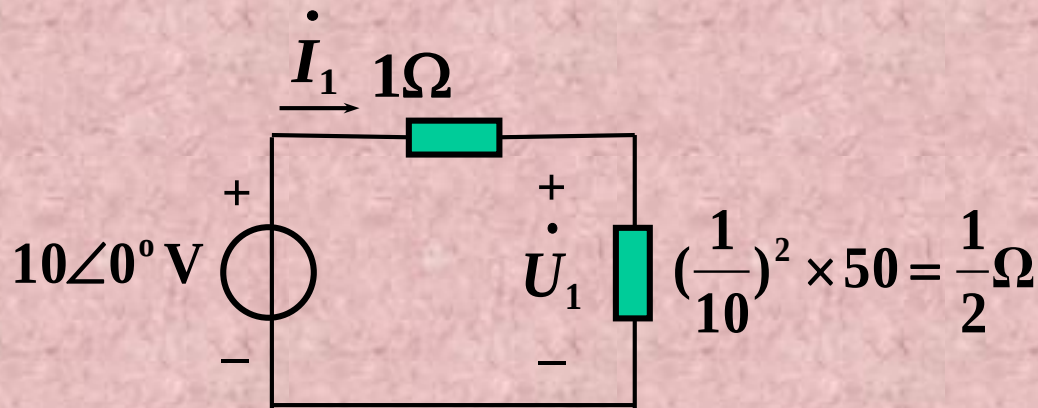
方法1: 列方程

$$\begin{cases} 1 \times \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = 10\angle 0^\circ \\ \dot{U}_2 = -50\dot{I}_2 \\ \dot{U}_1 = \frac{1}{10}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -10\dot{I}_2 \end{cases}$$

解得
→

$$\dot{U}_2 = 33.33\angle 0^\circ \text{ V}$$

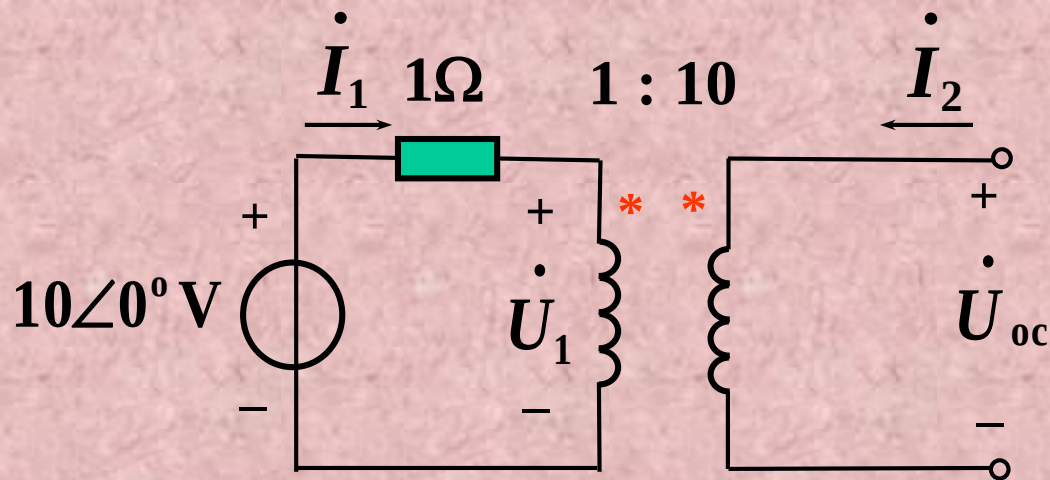
方法2: 阻抗变换



$$\dot{U}_1 = \frac{10\angle 0^\circ}{1 + 1/2} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= 10 \dot{U}_1 \\ &= 33.33 \angle 0^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

方法3: 戴维南等效

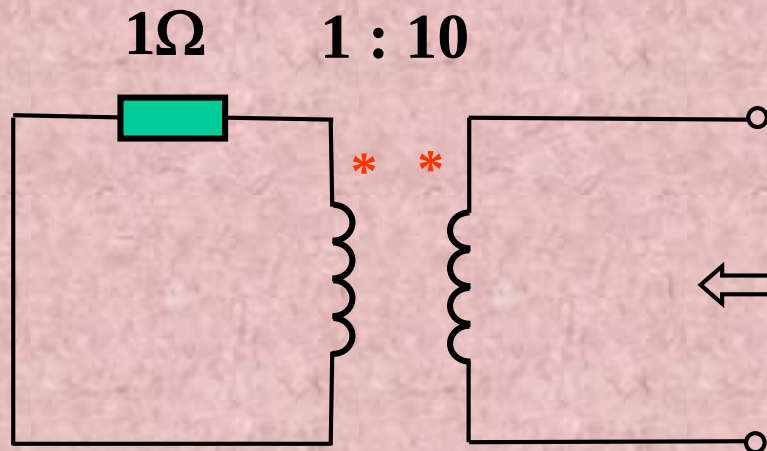


求 $\dot{U}_{oc}$:

$$\because \dot{I}_2 = 0, \quad \therefore \dot{I}_1 = 0$$

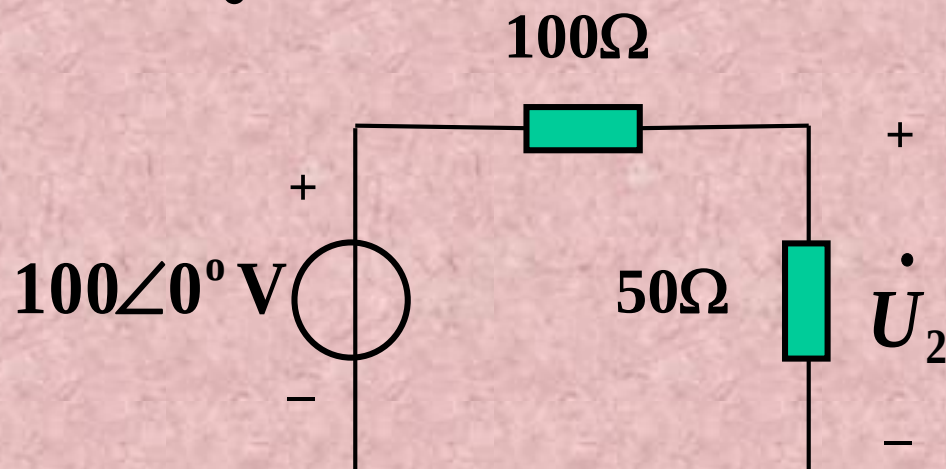
$$\begin{aligned} \dot{U}_{oc} &= 10 \dot{U}_1 \\ &= 100 \angle 0^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

求 R_0 :



$$R_0 = 10^2 \times 1 = 100\Omega$$

戴维南等效电路:



$$\dot{U}_2 = \frac{100\angle 0^\circ}{100 + 50} \times 50 = 33.33\angle 0^\circ \text{ V}$$