

李林考研数学

最后预测 4 套卷(二)



一、选择题(本题共 10 小题,每小题 5 分,满分 50 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后括号内.)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{2}} - (e+ax+bx^2)$ 是比 x^2 高阶的无穷小,则 ()

A. $a = \frac{e}{2}, b = -\frac{11}{24}e$.

B. $a = -\frac{e}{2}, b = \frac{11}{24}e$.

C. $a = e, b = \frac{e}{2}$.

D. $a = e, b = -\frac{e}{2}$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x) = \int_a^x (x-b)f(t)dt$, 则存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得曲线 $y = F(x)$ 在 $(x_0, F(x_0))$ 处的切线垂直于 ()

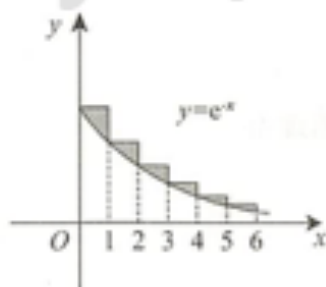
A. $y = 1$.

B. $x = 1$.

C. $y = x$.

D. $y = -x$.

(3) 如图所示, 在曲线 $y = e^{-x} (x \geq 0)$ 上面作一个台阶曲线, 台阶的宽度均为 1, 则图中无穷多个阴影部分的面积之和 $S =$ ()



A. 1.

B. $\frac{1}{e-1}$.

C. $\frac{e}{e-1}$.

D. $\frac{1}{e}$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上可导, $f(x) > 0, f(2) = 1$, 且满足 $[xf(x)]' \leq -kf(x)$ (k 为大于零的常数), 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ ()

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. k .

(5) 设 $I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx, I_2 = \int_1^e \frac{x dx}{\sqrt{e-x}}$, 则下列选项正确的是 ()

A. I_1 与 I_2 均收敛.

B. I_1 与 I_2 均发散.

C. I_1 收敛, I_2 发散.

D. I_1 发散, I_2 收敛.

(6) 设 $a_0 = 1, \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = 0$, 则 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$ ()

A. e^x .

B. e^{-x} .

C. e^{-x^2} .

D. e^{x^2} .

(7) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 若 $BA = O$ 且 $B \neq O$, B 为 3 阶矩阵, 当 $a \neq 2$ 时, 方程组 $Bx = 0$

的基础解系为

()

A. $(1, a, 3)^T, (2, 4, 6)^T,$

B. $(a, 4, 6)^T,$

C. $(3, 6, 9)^T,$

D. $(1, a, 3)^T.$

(8) 下列矩阵不能与对角矩阵相似的是

()

A. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

B. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

D. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

(9) 设 $P\{X=0\} = \frac{1}{4}, P\{X=1\} = \frac{3}{4}, P\left\{Y=-\frac{1}{2}\right\} = 1$, 3 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性

无关, 则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, X\alpha_1 + Y\alpha_3$ 线性相关的概率为

()

A. $\frac{1}{2}.$

B. $\frac{1}{4}.$

C. $\frac{1}{3}.$

D. $\frac{3}{4}.$

(10) 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=n\} = \frac{ab^n}{n!}, n$ 为非负整数, 且 $EX = 1$, 则

()

A. $a = e^{-1}, b = 1.$

B. $a = e, b = e.$

C. $a = 1, b = e^{-1}.$

D. $a = e, b = e^{-1}.$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分, 把答案填在题中横线上.)

(11) 已知 $y_1 = e^{-x} + xe^{2x}, y_2 = e^x + xe^{2x}, y_3 = xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为_____.

(12) 密度为常数 ρ 的圆柱面 $S: x^2 + y^2 = a^2 (a > 0) (0 \leq z \leq 1)$ 关于 z 轴的转动惯量 $I_z =$ _____.

(13) 设曲面 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, 且 Σ 的密度 $\rho = x^2 + y^2 + z^2$, 则曲面 Σ 的质量 $m =$ _____.

(14) 函数 $f(x) = x + 1 (0 \leq x \leq \pi)$ 的余弦级数为_____.

(15) 设 $A = (\beta - \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 均是 3 维列向量, 则方程组 $Ax = \beta$ 有特解为_____.

(16) 设总体 $X \sim N(0, \sigma^2), \sigma > 0$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为 X 的简单随机样本, 已知 $\Phi(1.645) = 0.95, \varphi(x; \sigma^2)$ 为 X 的密度函数, 使得 $\int_a^{+\infty} \varphi(x; \sigma^2) dx = 0.05$ 的点 a 的最大似然估计值为_____.

三、解答题(17~22 小题,满分 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

设 $y = f(x)$ 是简单连续曲线, $f(x) \geq 0$, $f(1) = 1$, D 由 x 轴和 $y = f(x)$, $x = 0$, $x = a(a > 0)$ 围成, 平面图形 D 的形心的横坐标 $\bar{x} = \frac{3}{4}a$.

(I) 求 $f(x)$;

(II) 若 D 绕直线 $x = a$ 旋转一周所得旋转体的体积为 $\frac{\pi}{6}$, 求 a 的值.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(t)$ 是连续函数, $f(0) = 0$, Σ 为由圆柱面 $x^2 + y^2 = t^2 (t > 0)$ 与 $z = 0, z = 1$ 所围立体的全表面, 取外侧,

$$f(t) = \oiint_{\Sigma} 3xz^2 dydz + 3xy^2 dzdx + zf(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy,$$

求 $f(t)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, $f(x+T) = f(x)$, $T > 0$, 且 $f(-x) = f(x)$.

(I) 证明: $\int_0^{nT} xf(x) dx = \frac{n^2 T}{2} \int_0^T f(x) dx$ (n 为正整数);

(II) 记 $a_n = \int_0^{n\pi} x |\cos x| dx$ ($n \geq 1$), 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a_n}$ 的和.

(20)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(1) = 0$, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有实根 x_0 , 证明:

(I) 存在不同的 $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, 使得 $\xi_1 f'(\xi_1) + f(\xi_1) = \xi_2 f'(\xi_2) + f(\xi_2) = 0$;

(II) 若 $f(0) < 0$, 且 $\forall x \in (x_0, 1)$, 有 $f'(x) > 0$, 则存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) = 0$.

(21)(本题满分 15 分)

设 α 为 3 维非零实列向量, $A = E - \frac{\alpha \alpha^T}{\alpha^T \alpha}$ 为正交矩阵, $\alpha \neq 0$, E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求 α 的值;

(II) 当 $\alpha = (1, 1, 0)^T$ 时, 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 化为规范形.

(22)(本题满分 15 分)

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = 2e^{-x-y}$, $0 \leq x \leq y < +\infty$, $Z = X + Y$.

(I) 求边缘密度 $f_X(x)$ 和期望 $E(Y | X = 1)$;

(II) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$;

(III) 求 $\text{Cov}(X, Z)$.