北大燕园

2013年 李永乐·李正元

考研数学 1

数学复习全书

数学一

主编 北京大学 李正元

清华大学 李永乐

中国人民大学 袁荫棠

赠送《全书习题全解》

特殊防伪 盗版书将丢失重要信息

国家行政学院出版社



2013年李永乐·李正元考研数学①

数学

数学一

复习全书

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

编者 (按姓氏笔画)
北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 刘西垣
中国人民大学 严颖
北京大学 范培华
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社
·北京·
www.TopSage.com

图书在版编目(CIP)数据

数学复习全书.数学一/李正元,李永乐,袁荫棠主编.—北京:国家行政学院出版社,2009.9
ISBN 978-7-80140-712-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①李… ②李… ③袁… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 171217 号

书　　名　数学复习全书【数学一】
作　　者　李正元　李永乐　袁荫棠
责任编辑　李锦慧　樊克克
出版发行　国家行政学院出版社
　　(北京市海淀区长春桥路 6 号　100089)
电　　话　(010)82771887
经　　销　新华书店
印　　刷　北京市朝阳印刷厂
版　　次　2012 年 2 月北京第 3 版
印　　次　2012 年 2 月北京第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　16 开
印　　张　48.75
字　　数　1300 千字
书　　号　ISBN 978-7-80140-712-2/O·56
定　　价　59.80 元

www.TopSage.com

新 版 前 言

本书出版、修订多年来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本书在编写体例上有“特色”，在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂，较“适合考生的需要”。我们从反馈的信息中获悉，除报考硕士研究生的考生将本书用作应试复习参考书外，工科类在读大学生也将本书作为数学的学习辅导资料，而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯定和鼓励，也是一种鞭策，促使我们对本书进行一次全面修订，以便及时反映当前研究生最新考试信息，更好地适应和满足广大考生和读者考试复习的需要。2013 年《数学复习全书》将以更高的质量和新的面貌呈现在广大学生的面前。

本书 2013 年版是在 2012 年版的基础上进行修订的，更加完善，更具有针对性和适用性。

高等数学部分：按考试大纲的要求及绝大多数考生系统复习的需要，本书进行了调整，宗旨是重点内容重点讲解，如：求极限的方法，求积分（一元、多元函数）的方法，牛顿-莱布尼兹公式及其应用，二重积分的计算与应用，泰勒公式及其应用，求幂级数的收敛域或收敛区间，幂级数的求和，求函数的幂级数展开式等单独分离出来进行举例讲解，同时调换并增加了若干典型例题，并修改了部分例题的解法，使之更简捷，更易掌握。

线性代数部分：主要是针对一些重点概念和公式的运用，调换并增加了若干例题进行讲解，使考生对这些重点概念和公式能彻底理解、吃透，对一些常考题型，如：抽象行列式的计算，有关伴随矩阵的命题，n 阶矩阵的特征值和特征向量以及线性相关与无关的证明、基础解系的证明等题型的解题方法和技巧进一步作了较详尽的归纳总结，并给典型例题进行讲解，消除考生对这些重要概念和公式的运用和常考题型解题方法的疑惑，以便考生在考试中应对自如，提高应试水平。

概率统计部分：与高等数学部分一样也进行了调整，调整后更适合考生进行系统复习，同时对重点概念、公式和常考题型从多角度命制典型例题进行讲解，以提高考生运用概念、公式综合分析能力，从而取得好成绩。

特别需要强调的是，本书题型训练试题均给出了详细解答（见赠书）。

本书高等数学部分由**北京大学李正元**修改完成，线性代数部分由**清华大学李永乐**修改完成，概率论与数理统计部分由**北京大学范培华**修改完成。

编者

2012 年 2 月

www.TopSage.com

大家网
TopSage.com

前　言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学，达到硕士学习阶段应具备的数学能力，提高考研应试水平，以合格的数学成绩任国家挑选，作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究了近年来考研命题的特点及动态，并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验，编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》。在编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成：

一、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点，让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述，并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析，指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、常考题型及其解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

四、题型训练及参考答案——本部分精选了适量的自测题，并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识，复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中，以供考生选用。

特别需要强调的是，在'98北大百年校庆之际，我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园，畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作，并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历，对各类院校的考生有广泛的接触与了解，深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习，在大家的一致建议下，由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》，期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

1999年4月于北大燕园

www.TopSage.com

目　录

第一篇　高等数学

第一章　极限、连续与求极限的方法 …… (1)
内容概要与重难点提示 …… (1)
考核知识要点讲解 …… (1)
一、极限的概念与性质 …… (1)
二、极限存在性的判别（极限存在的两个准则） …… (3)
三、求极限的方法 …… (5)
四、无穷小及其比较 …… (12)
五、函数的连续性及其判断 …… (15)
六、连续函数的性质 …… (17)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (18)
题型训练 …… (30)
第二章　一元函数的导数与微分概念及其计算 …… (33)
内容概要与重难点提示 …… (33)
考核知识要点讲解 …… (33)
一、一元函数的导数与微分 …… (33)
二、按定义求导数及其适用的情形 …… (37)
三、基本初等函数导数表，导数四则运算法则与复合函数微分法则 …… (38)
四、初等函数求导法 …… (40)
五、复合函数求导法的应用——由复合函数求导法则导出的几类函数的微分法 …… (40)
六、分段函数求导法 …… (42)
七、高阶导数及 n 阶导数的求法 …… (45)
八、一元函数微分学的简单应用 …… (46)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (48)
题型训练 …… (58)
第三章　一元函数积分概念、计算及应用 …… (61)
内容概要与重难点提示 …… (61)
考核知识要点讲解 …… (61)
一、一元函数积分的概念、性质与基本定理 …… (61)
二、基本积分表与积分法则 …… (67)
三、各类函数的积分法 …… (75)
四、积分计算技巧 …… (79)
五、反常积分（广义积分） …… (80)
六、积分学应用的基本方法——微元分析法 …… (82)
七、一元函数积分学的几何应用 …… (83)
八、一元函数积分学的物理应用 …… (90)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (93)
题型训练 …… (114)
第四章　微分中值定理及其应用 …… (117)
内容概要与重难点提示 …… (117)
考核知识要点讲解 …… (117)
一、微分中值定理及其作用 …… (117)
二、利用导数研究函数的变化 …… (119)
三、一元函数的最大值与最小值问题 …… (123)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (125)
题型训练 …… (146)
第五章　一元函数的泰勒公式及其应用 …… (148)
内容概要与重难点提示 …… (148)
考核知识要点讲解 …… (148)
一、带皮亚诺余项与拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式 …… (148)
二、泰勒公式的求法 …… (149)
三、泰勒公式的若干应用 …… (151)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (154)
题型训练 …… (158)

www.TopSage.com

第六章 微分方程 …… (159)
内容概要与重难点提示 …… (159)
考核知识要点讲解 …… (159)
一、基本概念 …… (159)
二、一阶微分方程 …… (160)
三、可降阶的高阶方程 …… (162)
四、含变限积分的方程 …… (163)
五、线性微分方程解的性质与结构 …… (164)
六、二阶和某些高阶常系数齐次线性方程 …… (166)
七、二阶常系数非齐次线性方程与欧拉方程 …… (166)
八、微分方程的简单应用 …… (168)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (171)
题型训练 …… (178)
第七章 向量代数和空间解析几何 …… (181)
内容概要与重难点提示 …… (181)
考核知识要点讲解 …… (181)
一、空间直角坐标系 …… (181)
二、向量的概念 …… (181)
三、向量的运算 …… (182)
四、平面方程、直线方程 …… (186)
五、平面、直线之间相互关系与距离公式 …… (187)
六、旋转面与柱面方程，常用二次曲面的方程及其图形 …… (189)
七、空间曲线在坐标平面上的投影 …… (190)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (191)
题型训练 …… (198)
第八章 多元函数微分学 …… (199)
内容概要与重难点提示 …… (199)
考核知识要点讲解 …… (199)
一、多元函数的概念、极限与连续性 …… (199)
二、多元函数的偏导数与全微分 …… (201)
三、多元函数微分法则 …… (205)
四、复合函数求导法的应用——隐函数微分法 …… (207)
五、复合函数求导法则的其他应用 …… (210)
六、多元函数的极值问题 …… (211)
七、多元函数的最大值与最小值问题 …… (212)
八、方向导数与梯度 …… (214)
九、多元函数微分学的几何应用 …… (215)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (218)
题型训练 …… (228)
第九章 多元函数积分的概念、计算及其应用 …… (231)
内容概要与重难点提示 …… (231)
考核知识要点讲解 …… (231)
一、多元函数积分的概念与性质 …… (231)
二、在直角坐标系中化多元函数的积分为定积分 …… (235)
三、重积分的变量替换 …… (242)
四、如何应用多元函数积分的计算公式及简化计算 …… (247)
五、多元函数积分学的几何应用 …… (257)
六、多元函数积分学的物理应用 …… (259)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (262)
题型训练 …… (286)
第十章 多元函数积分学中的基本公式及其应用 …… (290)
内容概要与重难点提示 …… (290)
考核知识要点讲解 …… (290)
一、多元函数积分学中的基本公式——格林公式，高斯公式与斯托克斯公式 …… (290)
二、向量场的通量与散度，环流量与旋度 …… (292)
三、格林公式，高斯公式与斯托克斯公式的一个应用——简化多元函数积分的计算 …… (293)
四、平面上曲线积分与路径无关问题及微分式的原函数问题 …… (298)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (303)
题型训练 …… (313)

www.TopSage.com

第十一章 无穷级数 …… (315)
内容概要与重难点提示 …… (315)
考核知识要点讲解 …… (315)
一、常数项级数的概念与基本性质 …… (315)
二、正项级数敛散性的判定 …… (316)
三、交错级数的敛散性判别法 …… (318)
四、绝对收敛与条件收敛 …… (318)
五、函数项级数的收敛域与和函数 …… (319)
六、幂级数的收敛域 …… (320)
七、幂级数的运算与和函数的性质 …… (321)
八、幂级数的求和与函数的幂级数展开式 …… (323)
九、傅里叶级数 …… (324)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (327)
题型训练 …… (344)

第二篇 线性代数

第一章 行列式 …… (348)
内容概要与重难点提示 …… (348)
考核知识要点讲解 …… (348)
一、行列式的概念、展开公式及其性质 …… (348)
二、有关行列式的几个重要公式 … (352)
三、关于克莱姆（Cramer）法则 … (353)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (353)
题型训练 …… (364)
第二章 矩阵及其运算 …… (366)
内容概要与重难点提示 …… (366)
考核知识要点讲解 …… (366)
一、矩阵的概念及几类特殊方阵 … (366)
二、矩阵的运算 …… (368)
三、矩阵可逆的充分必要条件 …… (370)
四、矩阵的初等变换与初等矩阵 … (371)
五、矩阵的等价 …… (372)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (372)
题型训练 …… (390)
第三章 n 维向量与向量空间 …… (392)
内容概要与重难点提示 …… (392)
考核知识要点讲解 …… (392)
一、n 维向量的概念与运算 …… (392)
二、线性组合与线性表出 …… (393)
三、向量组的线性相关与线性无关 …… (394)
四、线性相关性与线性表出的关系 …… (395)
五、向量组的秩与矩阵的秩 …… (395)
六、矩阵秩的重要公式 …… (396)
七、向量空间、子空间与基、维数、坐标 …… (397)
八、基变换与坐标变换 …… (397)
九、规范正交基与 Schmidt 正交化 …… (398)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (399)
题型训练 …… (421)
第四章 线性方程组 …… (424)
内容概要与重难点提示 …… (424)
考核知识要点讲解 …… (424)
一、线性方程组的各种表达形式及相关概念 …… (424)
二、基础解系的概念及其求法 …… (424)
三、齐次方程组有非零解的判定 … (425)
四、非齐次线性方程组有解的判定 …… (425)
五、非齐次线性方程组解的结构 … (426)
六、线性方程组解的性质 …… (426)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (426)
题型训练 …… (442)
第五章 矩阵的特征值与特征向量 …… (445)
内容概要与重难点提示 …… (445)
考核知识要点讲解 …… (445)
一、矩阵的特征值与特征向量的概念、性质及求法 …… (445)
二、相似矩阵的概念与性质 …… (448)
三、矩阵可相似对角化的充分必要条件及解题步骤 …… (448)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (450)

www.TopSage.com

题型训练 …… (470)
第六章 二次型 …… (472)
内容概要与重难点提示 …… (472)
考核知识要点讲解 …… (472)
一、二次型的概念及其标准形 …… (472)
二、正定二次型与正定矩阵 …… (474)
三、合同矩阵 …… (474)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (475)
题型训练 …… (487)

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率 …… (489)
内容概要与重难点提示 …… (489)
考核知识要点讲解 …… (489)
一、随机事件的关系与运算 …… (489)
二、随机事件的概率 …… (491)
三、事件的独立性与独立重复试验 …… (495)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (498)
题型训练 …… (506)
第二章 随机变量及其分布 …… (508)
内容概要与重难点提示 …… (508)
考核知识要点讲解 …… (508)
一、随机变量及其分布函数 …… (508)
二、离散型随机变量与连续型随机变量 …… (509)
三、常见的离散型、连续型随机变量及其概率分布 …… (513)
四、随机变量函数的分布的求法 … (519)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (521)
题型训练 …… (532)
第三章 多维随机变量及其分布 …… (534)
内容概要与重难点提示 …… (534)
考核知识要点讲解 …… (534)
一、二维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数 …… (534)
二、二维离散型随机变量 …… (535)
三、二维连续型随机变量 …… (538)
四、两个常见的二维连续型随机变量的分布 …… (540)
五、二维随机变量的独立性 …… (542)
六、两个随机变量函数的分布 …… (543)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (547)
题型训练 …… (561)
第四章 随机变量的数字特征 …… (564)
内容概要与重难点提示 …… (564)
考核知识要点讲解 …… (564)
一、随机变量的数学期望 …… (564)
二、随机变量的方差 …… (566)
三、协方差与相关系数 …… (567)
四、随机变量的矩 …… (569)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (570)
题型训练 …… (581)
第五章 大数定律和中心极限定理 …… (583)
内容概要与重难点提示 …… (583)
考核知识要点讲解 …… (583)
一、大数定律 …… (583)
二、中心极限定理 …… (585)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (586)
题型训练 …… (590)
第六章 数理统计的基本概念 …… (592)
内容概要与重难点提示 …… (592)
考核知识要点讲解 …… (592)
一、总体与样本 …… (592)
二、统计量 …… (593)
三、抽样分布 …… (594)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (597)
题型训练 …… (602)
第七章 参数估计和假设检验 …… (604)
内容概要与重难点提示 …… (604)
考核知识要点讲解 …… (604)
一、参数估计 …… (604)
二、假设检验 …… (608)
常考题型及其解题方法与技巧 …… (610)
题型训练 …… (620)

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

第一篇　高等数学

第一章　极限、连续与求极限的方法

内容概要与重难点提示

1. 微积分中研究的对象是函数　函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系,就看是否存在一种对应规则,使得其中一个量或几个量定了,另一个量也就被唯一确定,前者是一元函数,后者是多元函数.

函数这部分的重点是:复合函数、反函数和分段函数、函数记号的运算、基本初等函数与其图象、初等函数的概念等.

2. 极限是微积分的理论基础　研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限,如连续、导数、定积分、级数等等. 由此可见极限的重要性. 本章的重点内容是极限. 既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件,又要能准确地求出各种极限. 求极限的方法很多,综合起来主要有:

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则;　② 利用函数的连续性;

③ 利用变量替换与两个重要极限;　④ 利用等价无穷小因子替换;

⑤ 利用洛必达法则;　⑥ 分别求左、右极限;

⑦ 数列极限转化为函数极限;　⑧ 利用适当放大缩小法;

⑨ 对递归数列先证明极限存在(常用到"单调有界数列有极限"的准则),再利用递归关系求出极限;

⑩ 利用导数的定义求极限;　⑪ 利用泰勒公式;　⑫ 利用定积分求 n 项和式的极限.

3. 无穷小就是极限为零的变量　极限问题可归结为无穷小问题. 极限方法的重要部分是无穷小分析,或说无穷小阶的估计与分析. 要理解无穷小及其阶的概念,学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法,会用等价无穷小因子替换求极限.

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数　由于函数的连续性是通过极限定义的,所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 因此这部分也是本章的重点. 要掌握判断函数连续性及间断点类型的方法,特别是分段函数在分界点处的连续性.

5. 有界闭区间上连续函数的基本性质　函数的其他许多性质都与函数的连续性有关,因此我们要了解有界闭区间上连续函数的重要性质,包括:有界性定理,最大值、最小值定理和中间值(介值)定理,并会应用这些性质.

考核知识要点讲解

一、极限的概念与性质

(一) 极限的定义

【定义 1.1】 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N,使得当 $n > N$ 时就有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

若数列 $\{x_n\}$ 存在极限(有限数),又称数列 $\{x_n\}$ 收敛,否则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

www.TopSage.com

【定义 1.2】 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正数 X，使得当 $|x| > X$ 时就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正数 δ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时右极限与左极限：

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A, \quad f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A.$$

（二）极限的基本性质

▶1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

若 $a > b$，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时有 $x_n > y_n$；若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant y_n$，则 $a \geqslant b$.

【定理 1.2】（收敛数列的有界性） 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 有界（即 $\exists$ 常数 $M > 0$，$|x_n| \leqslant M$，$n = 1,2,\cdots$）.

▶2. 函数极限的基本性质

【定理 1.3】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$.

若 $A > B$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$；

若 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $A \geqslant B$.

【推论】（极限的保号性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

若 $A > 0$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$；

若 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant 0$，则 $A \geqslant 0$.

【定理 1.4】（存在极限的函数局部有界性） 设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界，即 $\exists \delta > 0$ 与 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$|f(x)| \leqslant M$.

【注】 其他极限过程如 $x \to x_0 + 0$，$x \to x_0 - 0$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 等也有类似的结论.

（三）两个重要极限

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x\to0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \tag{1.1}$$

【例 1.1】 判断下列结论是否正确，并证明你的判断.

（Ⅰ）若 $x_n < y_n (n > N)$，且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则 $A < B$；

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 (a,b) 有定义，又 $\exists c \in (a,b)$ 使得极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 有界；

（Ⅲ）若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】 （Ⅰ）不正确. 在题设下只能保证 $A \leqslant B$，不能保证 $A < B$. 例如，$x_n = \dfrac{1}{n}$，$y_n = \dfrac{2}{n}$，则 $x_n < y_n$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

www.TopSage.com

【注】 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在，且存在正整数 N，当 $n>N$ 时 $x_n\le y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

（Ⅱ）不正确. 这时只能保证：$\exists$ 点 c 的一个空心邻域 $U_0(c,\delta)=\{x\mid 0<|x-c|<\delta\}$ 使 $f(x)$ 在 $U_0(c,\delta)$ 中有界，一般不能保证 $f(x)$ 在 (a,b) 有界. 例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$(a,b)=(0,1)$，取定 $c\in(0,1)$，则 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\dfrac{1}{c}$，但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界.

（Ⅲ）正确. 因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$，由存在极限的函数的局部有界性 $\Rightarrow\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

二、极限存在性的判别（极限存在的两个准则）

（一）夹逼定理

【定理 1.5】（数列情形） 若 $\exists N$，使得当 $n>N$ 时有 $y_n\le x_n\le z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

【定理 1.6】（函数情形） 若 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $h(x)\le f(x)\le g(x)$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

【注】 其他极限过程也有类似的结论.

（二）单调有界数列必收敛定理

【定理 1.7】 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界，即 $x_{n+1}\ge x_n$ $(n=1,2,\cdots)$，并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n\le M$，则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且有 $x_n\le a$ $(n=1,2,\cdots)$.

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界，即 $x_{n+1}\le x_n(n=1,2,\cdots)$，并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n\ge m$，则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且有 $x_n\ge a$ $(n=1,2,\cdots)$.

（三）单侧极限与双侧极限的关系

【定理 1.8】 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A$.

对于分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x), & x_0-\delta<x<x_0,\\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta,\end{cases}$ 考察 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在就需要分别求 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+}h(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}g(x)$，并确定二者是否相等.

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases}2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+ax^2)}{x\sin x}, & x<0,\end{cases}$ 又 $a\neq0$，问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

【分析】 分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$，由 $f(0+0)=f(0-0)$ 定出 a 值.

【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}=2\lim\limits_{x\to0+}\arctan\dfrac{1}{x}=\pi$,

$$f(0-0)=\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\cdot\frac{ax^2}{x\sin x}\right]=1\cdot a\cdot1=a(a\neq0),$$

由 $f(0+0)=f(0-0)$，得 $a=\pi$. 因此，仅当 $a=\pi$ 时，存在 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\pi$.

评注 注意在本题中当 $a=\pi$ 时极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\pi$，即当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，但此极限值与函数值 $f(0)=1$ 并不相等，其原因在于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 描述的是当 $x\to0$ 但 $x\neq0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势，它与函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的函数值 $f(0)$ 是多少完全没有关系.

【例 1.3】 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}$ 是

(A) 0. (B) $-\infty$. (C) $+\infty$. (D) 不存在但不是 ∞.

【分析】 因 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$，故要分别考察左、右极限. 由于

$$\lim_{x\to1+0}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{t=\frac{1}{x-1}}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty,\quad\lim_{x\to1-0}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{t=\frac{1}{x-1}}\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=0,$$

因此选(D).

(四) 证明函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的方法

方法 1° 若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. 当 $x\to\infty$ 时的极限式中含有 $a^x(a>0,a\neq1)$，或 $\arctan x,\operatorname{arccot}x$，一定要分别求出 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的极限值，若两者相等，则 $x\to\infty$ 时的极限存在，否则不存在.

方法 2° 若 $\exists\,x_n\to x_0$，但 $x_n\neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 不存在或有两个满足 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，$y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

方法 3° 利用结论：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；若又有 $A\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 不存在.

【例 1.4】 证明：(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在；(Ⅱ) 设 $f(x)=\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin\frac{1}{x}\cos t^2\,dt}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

【证明】 (Ⅰ) 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则均有 $x_n\to0,y_n\to0$ $(n\to\infty)$，但

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0,\quad\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=1,\text{因此}\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在}.$$

评注 类似可证：$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

(Ⅱ) 已知 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}\cdot g(x)/x$，其中 $g(x)=\int_0^{\sin x}\cos t^2\,dt$，由于

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\cos(\sin^2x)\cos x=1\neq0,$$

www.TopSage.com

而$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

三、求极限的方法

(一) 利用极限的四则运算法则与幂指数运算法则求极限

【定理 1.9】(四则运算法则) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

【定理 1.10】(幂指数运算法则) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.

四则运算法则的推广:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,且当$0<|x-a|<\delta$时 $g(x)$ 有界,则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\ (+\infty,-\infty)$,且当$0<|x-a|<\delta$时 $g(x)$ 有界或$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$,则

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty\ (+\infty,-\infty)$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\ (+\infty)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty\ (+\infty)$ 或当$0<|x-a|<\delta$时$|g(x)|\geqslant A>0\ (g(x)\geqslant A>0)$,或$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0\ (A>0)$,则

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty\ (+\infty)$.

幂指数运算法则的推广:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$,则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & 0<A<1,\\ +\infty, & A>1;\end{cases}\qquad \lim_{x\to a}g(x)^{f(x)}=\begin{cases}+\infty, & A>0,\\ 0, & A<0.\end{cases}$$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,$f(x)>0(0<|x-a|<\delta)$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$,则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & B>0,\\ +\infty, & B<0.\end{cases}$$

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}+\infty, & 0<A\leqslant+\infty,\\ 0, & -\infty\leqslant A<0.\end{cases}$

【注】 ① 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在也不为 ∞,则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在也不为 ∞;若又有 $A\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$,$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 均不存在也不为 ∞. 但是,当$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 都不存在且不为 ∞ 时,求$f(x)\pm g(x)$,$f(x)g(x)$,$\dfrac{g(x)}{f(x)}$的极限则必须作具体分析.

② 对$\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$,$0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,0^0,1^∞,∞^0 等各类未定式不能直接用上述运算法则. 其中最基本的是$\dfrac{0}{0}$与$\dfrac{\infty}{\infty}$型,其他类型应经恒等变形转化为基本类型之一.

求$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限的方法有多种(参看题型一),其中一种重要技巧是设法消去分子、分母中的极限为零或 ∞ 因子,于是转化为可以直接用四则运算法则的情形(后面还介绍其他方法).

大家网 TopSage.com

【例 1.5】 求 $w=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x(2e^x+1)}{[1+(e^x+1)^2](1+e^x)}$.

【解】 这是求 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，用相消法，分子、分母同除以 $(e^x)^2$ 得

$$w=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x+1}\cdot\frac{2+e^{-x}}{e^{-2x}+(1+e^{-x})^2}=0\times 2=0,$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=0$（用洛必达法则）.

（二）利用函数的连续性求极限

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，按定义就有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. 因此对连续函数求极限就是用代入法求函数值.

2. 一切初等函数在其定义域区间上连续. 因此，若 $f(x)$ 是初等函数，且 a 属于其定义域，则

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

3. 设 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，若补充定义 $g(a)=A$，则 $g(x)$ 在 $x=a$ 连续. 若又有 $y=f(u)$ 在 $u=A$ 处连续，则由复合函数的连续性得 $\lim\limits_{x\to a}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to a}g(x)]=f(A)$.

（三）利用变量替换法与两个重要极限求极限

通过变量替换，把求某个极限转化为求另一个极限，若后者能算得出来，问题就解决了.

1. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ 且 $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f[\varphi(x)]\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$.

（若把 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to x_0$ 上述结论仍成立.）

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 且 $f(u)$ 在 u_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]\xlongequal[\substack{x\to x_0\text{ 时}\\ u\to u_0}]{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

重要极限与变量替换法相结合可求下列极限：

（1）诸如：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e,$$

$$\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}}=\lim_{x\to x_0}\left([1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)^{\psi(x)}=e^A,$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$. 极限过程 $x\to x_0$ 改为其他情形也有类似结论.

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则求 1^∞ 型极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot g(x)[f(x)-1]}=e^A,$$

转化为求 $0\cdot\infty$ 型极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)[f(x)-1]=A$.

【例 1.6】 求 $w=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^x$.

【解】 这是 1^∞ 型极限，改写成 $w=\lim\limits_{x\to\infty}2\left[\left(1+\dfrac{1}{x}2^{-\frac{1}{x}}\right)^{x\cdot 2^{\frac{1}{x}}}\right]^{2^{-\frac{1}{x}}}=2(e)^{2^0}=2e$.

www.TopSage.com

（四）利用等价无穷小因子替换求极限

若 $x \to a$ 时，无穷小 $\alpha(x) \sim \alpha^*(x)$，$\beta(x) \sim \beta^*(x)$（即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha^*(x)} = 1$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\beta^*(x)} = 1$），则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)u(x)}{\beta(x)v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha^*(x)u(x)}{\beta^*(x)v(x)}. \tag{1.2}$$

（等式两边其中之一极限存在或为 ∞，则另一也是且相等．）

该结论表明：在求极限过程中等价无穷小因子可以替换．

利用等价无穷小因子替换求极限可大大减少计算量．但在利用等价无穷小因子替换求极限时应注意下面两点：

（1）只在求极限的乘除运算中使用等价无穷小因子替换，不要在求极限的加减运算中使用，在加减法中等价无穷小的替换是有条件的，这里我们不去讨论．（参见题型训练四、5 题．）

（2）要熟练应用后面（1.3）所列重要等价无穷小．

【例 1.7】 求下列极限：

$$(\mathrm{I})\,w = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}-1}{1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})}\;;\quad (\mathrm{II})\,w = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}.$$

【解】 （Ⅰ）注意 $x \to 0$ 时，$1-\cos(x\sqrt{1-\cos x}) \sim \dfrac{1}{2}x^2(1-\cos x) \sim \dfrac{1}{4}x^4$，$e^{x^4}-1 \sim x^4 \Rightarrow$

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\frac{1}{4}x^4} = 4.$$

评注 设当 $x \to a$ 时，$\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，则 $\alpha \sim \gamma(x \to a)$．

（Ⅱ）因为 $\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1 \sim \ln\left[1+\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1\right] = 2x\ln\dfrac{1+\cos x}{2} = 2x\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right) \sim 2x\cdot\dfrac{\cos x-1}{2} \sim x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right) = -\dfrac{1}{2}x^3(x\to 0)$，$\ln(1+2x^3) \sim 2x^3(x\to 0)$，所以

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{2x^3} = -\frac{1}{4}.$$

（五）利用洛必达法则求未定式的极限

求 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式更常用的方法是用洛必达法则．具体方法如下：

【定理 1.11】 设（ⅰ）$\lim\limits_{x\to a}f(x) = 0\ (\infty)$，$\lim\limits_{x\to a}g(x) = 0\ (\infty)$；（ⅱ）$f(x)$，$g(x)$ 在 $x = a$ 的空心邻域可导，$g'(x) \neq 0$；（ⅲ）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$，其中 A 可以是有限数也可以是 ∞ 或 $\pm\infty$．

【注】 ① 将 $x \to a$ 改为 $x \to a+$，$x \to a-$，或 $x \to \infty$，$+\infty$，$-\infty$ 等也有相应的洛必达法则．

② $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛必达法则可推广成：（ⅰ）设 $\lim\limits_{x\to a}g(x) = \infty$，条件（ⅱ）与（ⅲ）不变，则结论也不变，即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$（不必要求 $\lim\limits_{x\to a}f(x) = \infty$）．

③ 应用上述法则时应注意：

1° 要验证应用法则的条件，尤其是条件（ⅰ）是必须要验证的，不是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型就不能用洛必达

法则．例如，以下运算是错误的：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\cos x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{1}=1.$$

事实上 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\cos x}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=\infty$．错误的原因在于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\cos x}{x}$ 既不是 $\dfrac{0}{0}$ 型也不是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式．

2° 仅从 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在也不为 ∞ 不能断定 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，此时应改用其他方法求解．

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$ 不存在．

3° 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，则可继续用洛必达法则．只要符合条件，一直可用到求出极限为止．

4° 其他类型的未定式（$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 等）先化成 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用洛必达法则．

5° 使用洛必达法则也要用到一些技巧．如变量替换、等价无穷小因子替换、恒等变形以及极限的四则运算法则、有确定非零极限的因子应先求出等方法．

【例 1.8】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}$．

【解】 先作恒等变形

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\right)}{x\sin^3 x}.$$

然后用等价无穷小因子替换：$x\to 0$ 时

$$\sin^3 x\sim x^3,\quad \ln\left(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\right)\sim\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\sim x^2-\sin^2 x,$$

于是

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

最后用洛必达法则得

$$w=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

【例 1.9】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$．

【解】 属 $\infty-\infty$ 型．先通分化成 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，则有 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}$．

直接用洛必达法则比较麻烦，若注意到

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \text{从而}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1.$$

这表明 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x\ (x\to 0)$．因此对分母先作等价无穷小因子替换后再用洛必达法则，并利用 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$ 就有

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}$$

www.TopSage.com

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) = -\frac{1}{2}.$$

评注 也可用如下方法求当 $x\to 0$ 时 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的等价无穷小：

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \ln(1+x+\sqrt{1+x^2}-1) \sim x+\sqrt{1+x^2}-1 \sim x \quad (x\to 0),$$

其以上计算中利用了 $\sqrt{1+x^2}-1 \sim \frac{1}{2}x^2$ $(x\to 0)$.

【例 1.10】 求 $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}$.

【分析】 属 1^∞ 型. 对于指数型未定式，总可先用公式 $u^v = e^{v\ln u}$，然后再用洛必达法则，并注意 $\arctan x \sim x\,(x\to 0)$.

【解】 由于 $\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)}$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\ln|\arctan x| - \ln|x|) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x^2)}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-2x\arctan x}{3x\cdot x} = -\frac{1}{3}.$$

或者 $\ln\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{\arctan x}{x}-1+1\right) \sim \dfrac{\arctan x - x}{x}$ $(x\to 0)$，若用该等价无穷小因子替换（可简化计算），则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{3}.$$

因此 $w = e^{-\frac{1}{3}}$.

评注 ① 对于 $u = \lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim[g(x)\ln f(x)]}$，当 $\lim f(x)^{g(x)}$ 是 1^∞ 或 0^0 或 ∞^0 型时，则 $\lim[g(x)\ln f(x)]$ 总是 $0\cdot\infty$ 型，因而总可化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

② 若 $\lim f(x)^{g(x)}$ 是 1^∞ 型，由于 $\lim f(x) = 1$，$\ln f(x) = \ln[(f(x)-1)+1] \sim f(x)-1$，于是 $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$，这种等价无穷小因子替换有时可简化计算.

（六）分别求左右极限求得函数极限

以【定理 1.8】为依据，求分段函数在分界点处的极限，或函数表达式中含有左、右极限不相等的项（如 $x\to 0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$，$\arctan\dfrac{1}{x}$）时，要通过分别求左、右极限来得出函数极限.

【例 1.11】 求下列极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$：

(Ⅰ) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$；

(Ⅱ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{2x}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & -1\leqslant x<0. \end{cases}$

【解】 (Ⅰ)注意:$\lim\limits_{x\to0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to0-}e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to0-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{1+e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to0+}\arctan\frac{1}{x}=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\lim_{x\to0-}\arctan\frac{1}{x}=(-1)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

因此,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{\pi}{2}$.

(Ⅱ)由于 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$,

因此,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}$.

(七)利用函数极限求数列极限

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则当 $\forall x_n\to\infty$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.由这一结论,可以得到求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 的如下方法:若数列 $\{y_n\}$ 可以看成某函数 $f(x)$ 在数列 $\{x_n\}$ 上的值,即 $y_n=f(x_n)(n=1,2,3,\cdots)$,且 $x_n\to+\infty$.若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

特别地,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,$y_n=f(n)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

求数列极限转化为求函数极限的主要目的是为了用洛必达法则.

对于其他极限过程也有类似结论.

【例 1.12】 求数列极限 $w=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\Rightarrow e^{\frac{1}{n}\ln n}-1\sim\frac{1}{n}\ln n$ $(n\to\infty)$.用等价无穷小因子替换得

$$w=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\ln n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln n.$$

引入函数 $f(x)=\frac{1}{x}\ln x^2=\frac{2\ln x}{x}(x>0)$,则

$$w=\lim_{n\to\infty}f(\sqrt{n})=\lim_{x\to+\infty}f(x)\overset{\text{洛必达法则}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=\!=}}2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(八)利用适当放大缩小法求极限

用夹逼定理(【定理 1.5】)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,就是通过将数列 $\{x_n\}$ 分别放大与缩小成满足 $z_n\leqslant x_n\leqslant y_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$,且保证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 相等的两个数列 $\{y_n\}$ 与 $\{z_n\}$ 来求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

▶1. 简单的放大缩小手段

利用 n 个数之和不超过最大数乘 n,不小于最小数乘 n;分子与分母同为正数,把分母放大则分数值缩小;若干正数的乘积中,把小于 1 的因子略去则乘积放大,把大于 1 的因子略去则乘积缩小等方法直接放大或缩小要求极限的数列以求得其极限.

【例 1.13】 设 $x_n=\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

www.TopSage.com

【解】 作恒等变形，再用简单手段作适当放大与缩小.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2n}} \leqslant x_n = \sqrt[n]{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)}{(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)}{2n}} \leqslant 1.$$

注意，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n})} = 1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 1$.

▶2. 利用极限的不等式性质进行放大或缩小

【例 1.14】 求数列极限：

（Ⅰ）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}$（$M>0$ 为常数）；　　（Ⅱ）设数列 $\{x_n\}$ 有界，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^n}{n!}$.

【解】 （Ⅰ）存在自然数 k，$k\geqslant M$，使 $1>\frac{M}{k+1}>\frac{M}{k+2}>\frac{M}{k+3}>\cdots$，当 $n>k$ 时，有

$$0<\frac{M^n}{n!}=\frac{M}{1}\cdot\frac{M}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{M}{k}\cdot\frac{M}{k+1}\cdot\frac{M}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{M}{n-1}\cdot\frac{M}{n}$$
$$<\frac{M^k}{k!}\cdot\frac{M}{n}=\frac{M^{k+1}}{k!}\cdot\frac{1}{n},$$

即当 $n>k$ 时，有 $0<\frac{M^n}{n!}<\frac{M^{k+1}}{k!}\cdot\frac{1}{n}$. 又 $\frac{M^{k+1}}{k!}$ 是常数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}=0$.

（Ⅱ）由于 $\{x_n\}$ 有界，故 $\exists M>0$，对一切 n 有 $|x_n|\leqslant M$. 于是，$0<\left|\frac{x_n^n}{n!}\right|\leqslant\frac{M^n}{n!}(\forall n)$，由题（Ⅰ）的结论及夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_n^n}{n!}\right|=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^n}{n!}=0$.

▶3. 对积分的极限可利用积分的性质进行放大或缩小

【例 1.15】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

【解】 因为 $\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$，且连续函数 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 存在最大值记为 M，于是

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right|\leqslant\int_0^1 x^n|f(x)|dx\leqslant M\int_0^1 x^n dx=\frac{M}{n+1}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{n+1}=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx=0$.

（九）递归数列极限的求法

数列 $\{a_n\}$ 如果满足方程 $a_{n+1}=f(a_n)$（$n=1,2,3,\cdots$），其中 f 是已知的一元连续函数，则称 $\{a_n\}$ 为**递归数列**. 由递归方程知，由 a_1 可求出 a_2，由 a_2 可求 a_3，依此类推可求出任意项 a_n. 常用如下两种方法求递归数列的极限.

方法 1° 先证明递归数列 $\{a_n\}$ 收敛（常用单调有界数列收敛定理），然后设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，再对递归方程 $a_{n+1}=f(a_n)$ 取极限得 $A=f(A)$，最后解出 A 即可.

方法 2° 先设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对递归方程取极限后从 $A=f(A)$ 解得 A，再用适当方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

要注意递归数列 $a_{n+1}=f(a_n)$ 的单调性与函数 $f(x)$ 的单调性有关.

【例 1.16】 设 $a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,3,\cdots)$，$a_n\in$ 区间 I. 若 $f(x)$ 在区间 I 单调上升，$a_2>a_1$（a_2

www.TopSage.com

$< a_1$),则数列$\{a_n\}$单调上升(单调下降);若$f(x)$在区间I单调下降,则数列$\{a_n\}$不具单调性.

【证明】 设$f(x)$在I单调上升,由$a_2 > a_1$得$f(a_2) > f(a_1)$,即$a_3 > a_2$.若$a_{k+1} > a_k$,则$f(a_{k+1}) > f(a_k)$,即$a_{k+2} > a_{k+1}$.因此,对于$n = 1,2,3,\cdots$有$a_{n+1} > a_n$,即数列$\{a_n\}$单调上升.当$a_2 < a_1$时同样可证数列$\{a_n\}$单调下降.另一结论类似可证.

【例1.17】 设$a_1 > 0, a_{n+1} = \dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ $(n = 1,2,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

【解】 显然,$0 < a_n < 3$ $(n = 2,3,\cdots)$,于是$\{a_n\}$有界.

令$f(x) = \dfrac{3(1+x)}{3+x}$,则$a_{n+1} = f(a_n)$,$f'(x) = \dfrac{6}{(3+x)^2} > 0$ $(x > 0)$.于是$f(x)$在$x > 0$单调上升,从而$\{a_n\}$是单调有界的,故存在极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.对递归方程取极限得

$$A = \frac{3(1+A)}{3+A},\text{解得 } A = \sqrt{3}.\text{因此}\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}.$$

【例1.18】 设$x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$, $n = 1,2,\cdots$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解】 令$f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$,则$x_{n+1} = f(x_n)$.显然$f(x)$在$x > 0$单调下降,因而由【例1.16】的结论可知$\{x_n\}$不具单调性.易知,$2 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{5}{2}$.设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则由递归方程得$a = 2 + \dfrac{1}{a}$,即$a^2 - 2a - 1 = 0$,解得$a = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$,则由$a \geqslant 2$知$a = \sqrt{2} + 1 > 2$.

现考察$|x_{n+1} - a| = \left|\left(2 + \dfrac{1}{x_n}\right) - \left(2 + \dfrac{1}{a}\right)\right| = \dfrac{|x_n - a|}{x_n a} < \dfrac{1}{4}|x_n - a|$,

因此,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \sqrt{2} + 1$.

评注 ① 对任意数列$\{a_n\}$,若满足$|a_n - A| \leqslant k|a_{n-1} - A|$ $(n = 2,3,\cdots)$,其中$0 \leqslant k < 1$,则$|a_n - A| \leqslant k^2|a_{n-1} - A| \leqslant \cdots \leqslant k^{n-1}|a_1 - A|$,于是必有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.这一结论在求解递归数列的极限时是很有用的.【例1.18】中就用到了这一结论.

② 对任意数列$\{x_n\}$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = A$.

当$f(x)$单调下降时,则$f[f(x)]$单调上升,于是$x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f[f(x_n)] \Rightarrow x_{n+2} - x_n = f[f(x_n)] - f[f(x_{n-2})] \Rightarrow x_{n+2} - x_n$与$x_n - x_{n-2}$同号 $\Rightarrow x_{2n}, x_{2n-1}$分别单调,若又可证它们有界,则它们分别收敛,记$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = B$,若进一步可证$A = B$,就可求出极限.本例也可用这种方法求解.

(十) 利用导数定义求极限(见第二章二(三))

(十一) 利用定积分求某些n项和式的极限(见第三章一(五)及本章【例1.35】与【例1.36】)

(十二) 利用泰勒公式求未定式的极限(见第五章三(一))

四、无穷小及其比较

(一) 无穷小与无穷大的定义

【定义1.4】 在某一极限过程中以零为极限的变量称为**无穷小(量)**.

www.TopSage.com

(1) 称 x_n 为无穷小，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$(记为 $x_n = o(1), n\to\infty$)；

(2) 称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$(记为 $f(x) = o(1), x\to x_0$).

【定义 1.5】 (1) 称 x_n 为**无穷大(量)**($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$)，若 $\forall M > 0$, $\exists$ 自然数 N,使得当 $n > N$ 时就有 $|x_n| > M$.

(2) 称 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 为**无穷大(量)**($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$)，若 $\forall M > 0, \exists X > 0$,使得当 $|x| > X$ 时就有 $|f(x)| > M$.

(3) 称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为**无穷大(量)**($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$)，若 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时就有 $|f(x)| > M$.

类似可定义其他极限过程的无穷大(量)及正无穷大(量)和负无穷大(量).

注意:我们说数列或函数存在极限,即指极限为有限值.例如,若数列 $\{x_n\}$ 为无穷大量,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$,则 $\{x_n\}$ 是属于极限不存在的情形.

(二) 无穷小(量)的有关性质

▶1. 无穷小与极限的关系 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

▶2. 无穷小与无穷大的关系 在同一极限过程中,$f(x)$ 为无穷小,若 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大;若 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

▶3. 无穷小的运算性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

(2) 有限个无穷小的积仍为无穷小.

(3) 有界变量与无穷小的乘积亦为无穷小.

【注】 ① 无穷大量不具有无穷小量相应的运算性质,不可将无穷小量的运算性质应用到无穷大量运算之中.

② 无穷大量的运算通常被转化为无穷小量的运算来进行.

(三) 无穷小阶的概念

【定义 1.6】 设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同一个极限过程中的无穷小,且存在极限 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$.

(1) 若 $l\neq 0$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 在该极限过程中为**同阶无穷小**;

(2) 若 $l = 1$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 在该极限过程中为**等价无穷小**,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

(3) 若 $l = 0$,则称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小**,记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(且不为 ∞),称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较.

【定义 1.7】 设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同一个极限过程中的无穷小,以 $\alpha(x)$ 为基本无穷小,若存在正数 k 和常数 l 使得 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = l\neq 0$,即 $\beta(x)$ 与 $\alpha^k(x)$ 为同阶无穷小,则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 **k 阶无穷小**.特别是,若 $\beta(x)$ 与 $(x - x_0)^k$ 为同阶无穷小即 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$,又存在常数 $l\neq 0$,使得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{(x - x_0)^k} = l$,

则称 $\beta(x)$ 是 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小.

（四）重要的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1),\quad e^x-1\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\tag{1.3}$$

$$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x,\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,\quad \log_a(1+x)\sim\frac{1}{\ln a}x(a>0,a\neq 1).$$

（五）等价无穷小的重要性质

1° $\alpha(x)\sim\beta(x),\beta(x)\sim\gamma(x)(x\to a)\Rightarrow\alpha(x)\sim\gamma(x)(x\to a)$.

2° $\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to a)\Leftrightarrow\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))\ (x\to a)$.

3° 求极限过程中，积、商可用等价无穷小因子替换.

【例 1.19】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$.

【解】 $x\to 0$ 时，$t=(1+x)^x-1\to 0$，则 $(1+x)^x-1=t\sim\ln(1+t)=\ln(1+x)^x=x\ln(1+x)$，于是用等价无穷小因子替换得

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x^2}=1.$$

评注 ① 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，若用洛必达法则需要求导：

$$[(1+x)^x]'=[e^{x\ln(1+x)}]'=(1+x)^x\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right],$$

$$\text{于是}\quad w=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^x]'}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{2x}=1.$$

② 在求极限过程中，积、商可用等价无穷小因子替换，这样常会给计算带来方便.

（六）无穷小阶的比较与确定无穷小阶的方法

▶1. 无穷小阶的比较

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是当 $x\to a$ 时的无穷小，判断无穷小 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶、等价无穷小或比较其阶数的最基本方法是求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，由【定义 1.6】给出

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}l\neq 0\text{ 且 }\neq 1, & f(x)\text{ 与 }g(x)\text{ 同阶而不等价},\\ 1, & f(x)\text{ 与 }g(x)\text{ 等价},\\ 0, & f(x)\text{ 比 }g(x)\text{ 高阶},\\ \infty, & g(x)\text{ 比 }f(x)\text{ 高阶}.\end{cases}\tag{1.4}$$

www.TopSage.com

▶2. 确定无穷小阶的方法

设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,常用如下方法确定$f(x)$是关于$x-a$的几阶无穷小.

方法1° 利用等价无穷小 若常数$A\neq 0,k>0$,且当$x\to a$时$f(x)\sim A(x-a)^k$,则当$x\to a$时$f(x)$是$x-a$的k阶无穷小.

方法2° 利用洛必达法则 确定$k>0$,使得$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^k}=A\neq 0$,则$x\to a$时$f(x)$是$x-a$的$k$阶无穷小.

方法3° 用泰勒公式 (见第五章三(一))

方法4° 利用无穷小阶的运算性质

如若$x\to a$时,$f(x),g(x)$分别是$x-a$的n阶与m阶无穷小,则$f(x)g(x)$是$x-a$的$(n+m)$阶无穷小.当$n<m$时,$f(x)+g(x)$是$x-a$的n阶无穷小.当$n>m$时,$f(x)/g(x)$是$x-a$的$n-m$阶无穷小.

【例1.20】 设$f(x)=x-\sin x\cos x\cos 2x$,$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\sin^4 x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$则当$x\to 0$时$f(x)$是$g(x)$的

(A) 高阶无穷小. (B) 低价无穷小.

(C) 同阶非等价无穷小. (D) 等价无穷小.

【分析】 由等价无穷小因子替换及洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{4}\sin 4x}{\frac{\ln(1+\sin^4 x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{4}\sin 4x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{3x^2}=\frac{8}{3},$$

因此选(C).

[注] 本题中用了当$x\to 0$时的如下等价无穷小关系:

$1-\cos 4x\sim\dfrac{1}{2}(4x)^2=8x^2$, $\ln(1+\sin^4 x)\sim\sin^4 x\sim x^4$.

五、函数的连续性及其判断

(一) 连续性及其相关概念

【定义1.8】 设$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义.

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$处连续.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)\right)$,则称$f(x)$在点$x=x_0$处右(左)连续.

(3) 若$f(x)$在(a,b)内任一点均连续,则称$f(x)$在(a,b)内连续.

(4) 若$f(x)$在(a,b)内连续,在$x=a$处右连续,在$x=b$处左连续,则称$f(x)$在$[a,b]$上连续.

【定理1.12】(单双侧连续性的关系) $f(x)$在点x_0连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在点x_0既左连续又右连续.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

（二）间断点的定义与分类

【定义 1.9】 设 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域或单侧空心邻域有定义，$x = x_0$ 不是 $f(x)$ 的连续点，则称 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

设 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域有定义，间断点 x_0 的类型分为：

▶1. **第一类间断点** $\triangleq f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 均存在.

可去间断点：$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处无定义.

跳跃间断点：$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$.

▶2. **第二类间断点** $\triangleq f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 中至少有一个不存在.

无穷间断点：$f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 中至少有一个为 ∞.

（三）判断函数的连续性和间断点的类型

判断函数连续性的方法：

1° 若是初等函数，则在它的定义域区间上处处连续.

2° 用连续性运算法则.

3° 分别判断左右连续性或按定义来判断.

【定理 1.13】（连续性运算法则）

（1）（连续性的四则运算法则） 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，当 $g(x_0)\neq 0$ 时 $f(x)/g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

（2）（复合函数的连续性） 设 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，$y=f(u)$ 在 $u=u_0(u_0=\varphi(x_0))$ 连续，则 $f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 连续.

（3）（反函数的连续性） 设 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续，则反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上连续且有相同的单调性.

【注】 按定义判断连续性或间断点类型是求极限的问题.

例 1.21 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，

（Ⅰ）若 $f(x)$ 处处连续，求 a,b 值；

（Ⅱ）若 (a,b) 不是求出的值时，$f(x)$ 有何间断点，并指出它的类型.

【分析与求解】 （Ⅰ）首先求出 $f(x)$. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}\infty, & |x|>1,\\ 1, & |x|=1,\\ 0, & |x|<1,\end{cases}\quad \text{要分段求出 } f(x).$$

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-1}+ax^{2-2n}+bx^{1-2n}}{1+x^{-2n}}=\dfrac{1}{x}$；

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^2+bx}{1}=ax^2+bx$.

于是得
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1,\\ \dfrac{1}{2}(a-b-1), & x=-1,\\ ax^2+bx, & |x|<1.\end{cases}$$

www.TopSage.com

其次,由初等函数的连续性,当 $|x|>1$, $|x|<1$ 时 $f(x)$ 分别与初等函数相等,故连续.

最后,只需考察分段函数在分界点 $x=\pm 1$ 处的连续性.这就要按定义考察连续性,分别计算:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(ax^2+bx)=a+b,$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(ax^2+bx)=a-b,\quad \lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x}=-1;$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 连续 $\Leftrightarrow f(1+0)=f(1-0)=f(1)\Leftrightarrow a+b=1=\dfrac{1}{2}(a+b+1)$

$\Leftrightarrow a+b=1;$

$f(x)$ 在 $x=-1$ 连续 $\Leftrightarrow f(-1+0)=f(-1-0)=f(-1)\Leftrightarrow a-b=-1=\dfrac{1}{2}(a-b-1)$

$\Leftrightarrow a-b=-1.$

因此 $f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 均连续 $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1, \\ a-b=-1 \end{cases}\Leftrightarrow a=0,b=1$. 仅当 $a=0,b=1$ 时 $f(x)$ 处处连续.

(Ⅱ) 当 $(a,b)\neq(0,1)$ 时,若 $a+b=1$(则 $a-b\neq -1$),则 $x=1$ 是分界点,只有 $x=-1$ 是第一类间断点;若 $a-b=-1$(则 $a+b\neq 1$),则 $x=-1$ 是分界点,只有间断点 $x=1$,且是第一类间断点;若 $a-b\neq -1$ 且 $a+b\neq 1$,则 $x=1,x=-1$ 均是第一类间断点.

六、连续函数的性质

(一) 连续函数的局部保号性质

【定理 1.14】 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,且 $f(x_0)>0$(或 <0),则 $\exists\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>0$(或 <0).

(二) 有界闭区间上连续函数的性质

【定理 1.15】(连续函数介值定理(中间值定理)) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f(a)\neq f(b)$,则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数 η,必 $\exists c(a<c<b)$,使得 $f(c)=\eta$.

【推论】(连续函数零点存在性定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,又 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,则 $\exists c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$.

【注】 连续函数零点存在定理可以推广到开区间情形.

【定理 1.16】(有界闭区间上连续函数的有界性) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界,即存在常数 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M$ $(x\in[a,b])$.

【定理 1.17】(有界闭区间上连续函数存在最大、最小值) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则在 $[a,b]$ 上必存在 x_1,x_2,使得

$$f(x_1)=\max_{x\in[a,b]} f(x)\quad(\text{即对 }\forall x\in[a,b]\text{ 有 }f(x)\leqslant f(x_1)),$$

$$f(x_2)=\min_{x\in[a,b]} f(x)\quad(\text{即对 }\forall x\in[a,b]\text{ 有 }f(x)\geqslant f(x_2)).$$

【注】 ① 保证连续函数的有界性及取到最大值与最小值,**有界闭区间**这一条件是重要的.例如 $f(x)=\dfrac{1}{x-b}$ 在 (a,b) 连续,但在 (a,b) 无界,也无最大值与最小值.

② 设 I 为区间(开的,或闭的,或半开半闭的),且 $f(x)$ 在 I 上连续,$x_1,x_2\in I,x_1<x_2$,若 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则对 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 间的任何数 η,必 $\exists c\in(x_1,x_2)$,使得 $f(c)=\eta$.

www.TopSage.com

【例 1.22】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在最大值 $M=\max\limits_{[a,b]}f(x)$ 与最小值 $m=\min\limits_{[a,b]}f(x)$. 若 $M\neq m$，求证：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[m,M]$.

【分析】 证明 Y 是函数 $f(x)$ 当 $x\in X$ 时的值域的方法是：首先要证 $\forall x\in X$，必有 $y=f(x)\in Y$；其次要证 $\forall \mu\in Y$，$\exists x\in X$ 使得 $f(x)=\mu$. 完成了这两个步骤，就证明了 Y 是 $f(x)(x\in X)$ 的值域.

【证明】 1° $\forall x\in[a,b]$，显然 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 2° $\forall \mu\in[m,M]$，由于 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1\neq x_2$，$f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$. 当 $\mu=m$ 或 $\mu=M$ 时，取 $c=x_1$ 或 $c=x_2(c\in[a,b])$，就有 $f(c)=\mu$. 当 $m<\mu<M$ 时，由连续函数的介值定理 $\Rightarrow\exists c$ 在 x_1,x_2 之间 $(c\in(a,b))$，使得 $f(c)=\mu$.

因此，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[m,M]$.

评注 求 $[a,b]$ 上连续函数的值域，归结为求它的最值.

（三）方程式根的存在性 —— 连续函数介值定理的应用

连续函数介值定理【定理 1.15】的推论（连续函数零点存在性定理）可用于证明方程 $f(x)=0$ 存在根，并给出根所在的区间（参见本章【例 1.42】）.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

【解题思路】 求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的方法有：

1° 通过恒等变形约去分子、分母中极限为零或 ∞ 的因子，然后用极限四则运算法则；

2° 洛必达法则；

3° 泰勒公式；

4° 变量替换与重要极限公式；

5° 等价无穷小因子替换.

【例 1.23】 求下列极限：

$$(\text{Ⅰ})w=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}};\quad(\text{Ⅱ})w=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\arctan x}}.$$

【解】 （Ⅰ）恒等变形：分子、分母同乘 $\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}$，然后再同除 x^2，得

$$w=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1-\cos x+x\sin x}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2x}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{4}{3}.$$

（Ⅱ）恒等变形：分子、分母同除 $-x$（$x<0$，$-x=|x|=\sqrt{x^2}$），得

$$w=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\arctan x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1.$$

www.TopSage.com

评注 ① 这两题均是作简单恒等变形后消去极限为0或∞的因子，或直接相消或同阶无穷小最终极限后为常数.

② 这两题为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限，也可用洛必达法则，但并不简单.求$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型极限时，有时用相消法更方便.

【例1.24】 求下列极限：

(Ⅰ)$w=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；　　(Ⅱ)$w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

【解】 (Ⅰ)先恒等变形，并作等价无穷小因子替换：$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$ $(x\to 0^+)$，

$$w=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}.$$

(Ⅱ)这是求$\frac{0}{0}$型极限，用洛必达法则得

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\cos^2 x-1-x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{-\sin^2 x-x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)\cos^2 x}{\sin^2 x+x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}\cos x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+x^2\cos^2 x}{\sin^2 x+x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}+\cos^2 x}{\frac{\sin^2 x}{x^2}+1}=-\frac{1}{2}.$$

评注 用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型极限时应注意某些技巧以简化计算，如恒等变形、等价无穷小因子替换某些非未定式的因子的极限(不为零)应先求出等.

题型二　求0·∞或∞−∞型未定式的极限

【解题思路】 求0·∞型未定式极限的方法与求$\frac{0}{0}$型与$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限基本相同.必须注意的是为使用洛必达法则需根据函数的特点先将0·∞型未定式化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.

求∞−∞型未定式极限一般需用适当方法将其化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.若是两个分式函数之差的∞−∞型未定式，则用通分将其化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式；若是与根式函数之和、差有关的∞−∞型未定式，则需用有理化等方法将其化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.

【例1.25】 求下列极限：

(Ⅰ)$w=\lim\limits_{x\to\infty}x^2(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}})$；　　(Ⅱ)$w=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)$.

www.TopSage.com

【解】(Ⅰ)属 $\infty\cdot 0$. 可先作恒等变形,然后用等价无穷小因子替换即得

$$w=\lim_{x\to\infty}x^2 3^{\frac{1}{x+1}}\left(3^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}3^{\frac{1}{x+1}}\lim_{x\to\infty}x^2\left[3^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\ln 3=\ln 3,$$

其中 $3^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\sim\frac{1}{x(x+1)}\ln 3\quad(x\to\infty)$.

(Ⅱ)属 $\infty\cdot 0$ 型. 可化为 $\frac{0}{0}$ 型后作变量替换,接着再用洛必达法则求极限.

$$w=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{1+t}}{t}$$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{t\to 0+}\frac{-1}{1+\left(\frac{1}{1+t}\right)^2}\cdot\frac{-1}{(1+t)^2}=\frac{1}{2}.$$

【例 1.26】 求下列极限:

(Ⅰ) $w=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2\cos^2 x}\right)$; (Ⅱ) $w=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^2-x)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^4+x^2}\right]$.

【解】 (Ⅰ)属 $\infty-\infty$ 型. 先化成 $\frac{0}{0}$ 型未定式,即 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\cos^2 x\sin^2 x}$,作等价无穷小因子替换与恒等变形再用洛必达法则即得

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=2\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

(Ⅱ)属 $\infty-\infty$ 型. 先作变量替换并转化成 $\frac{0}{0}$ 型未定式,然后用洛必达法则.

$$w=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0+}\frac{(1-t)e^t-(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{t^2}$$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{t\to 0+}\frac{-e^t+(1-t)e^t-t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$=-\lim_{t\to 0+}\frac{1}{2}\left[e^t+(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right]=-1.$$

题型三 求 $1^\infty,0^0,\infty^0$ 型未定式的极限

【解题思路】 求 $1^\infty,0^0$ 或 ∞^0 型未定式的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 均化为求 $\lim g(x)\ln f(x)$ (必为 $0\cdot\infty$ 型未定式),再化为求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限.

【例 1.27】 求下列极限:

(Ⅰ) $w=\lim\limits_{x\to 0+}(\arctan x)^{\ln(1-x)}$; (Ⅱ) $w=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\cot^2 x}$; (Ⅲ) $w=\lim\limits_{x\to 0+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 (Ⅰ)属 0^0 型. $\lim\limits_{x\to 0+}[\ln(1-x)\ln(\arctan x)]=\lim\limits_{x\to 0+}[-x\ln(\arctan x)]$

www.TopSage.com

$$\xlongequal{t=\arctan x}\lim_{t\to 0+}(-\tan t\ln t)=\lim_{t\to 0+}-\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0+}-\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=0,$$

其中用了等价无穷小因子替换：$\ln(1-x)\sim -x(x\to 0)$，$\tan t\sim t(t\to 0)$.

因此 $w=e^{\lim\limits_{x\to 0+}[\ln(1-x)\ln(\arctan x)]}=e^0=1$.

（Ⅱ）属 1^∞ 型. **方法 1°** 将原极限改写成

$$w=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}},$$

又
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\lim_{x\to 0}\cos^2 x=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{3x^2}=\frac{-1}{6},$$

因此 $w=e^{-\frac{1}{6}}$.

方法 2° 用求指数型极限的一般方法. 将原极限改写成

$$w=\lim_{x\to 0}e^{\cot^2 x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)},$$

又
$$\lim_{x\to 0}\cot^2 x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6},$$

因此 $w=e^{-\frac{1}{6}}$.

（Ⅲ）属 ∞^0 型. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}\ln(\cot x)\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\cot x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{-x}{\sin x\cos x}=-1$，

因此 $w=e^{-1}$.

评注 题（Ⅱ）的方法 2° 中，若用等价无穷小因子替换：

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)\sim\frac{\sin x}{x}-1=\frac{\sin x-x}{x}(x\to 0),$$

则
$$\lim_{x\to 0}\cot^2 x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

可简化计算.

题型四　求含变限积分的未定式的极限

【例 1.28】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1+t^2)^2dt}{x\arctan^4 x}$.

【解】 属 $\frac{0}{0}$ 型. $\arctan^4 x\sim x^4(x\to 0)$，先用等价无穷小因子替换后再用洛必达法则得

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1+t^2)^2dt}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1+x^2)^2}{5x^4}$$

www.TopSage.com

$$\xlongequal{t=x^2}\frac{1}{5}\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t-1}{t}+\frac{t}{t}\right)^2=\frac{1}{5}\left(\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}+1\right)^2=\frac{1}{5}(1+1)^2=\frac{4}{5}.$$

评注　若 $f(x)$ 连续，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\int_0^{\varphi(x)}f(t)\,dt=0$，由此易知本题中的极限为 $\frac{0}{0}$ 型.

【例 1.29】　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$，求 $w=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)\,dt}{f(x)}$.

【解】　先作恒等变形转化为求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，然后用洛必达法则.

$$w=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{2t}f(t)\,dt}{e^{2x}x^2}\cdot\frac{x^2}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{2t}f(t)\,dt}{e^{2x}x^2}$$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}f(x)}{e^{2x}(2x^2+2x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\cdot\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

评注　在验证条件 $\lim\limits_{x\to x_0}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\,dt=\infty$ 时，常用到以下结论：若 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\neq0$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\int_0^{\varphi(x)}f(t)\,dt=\infty$.

【例 1.30】　（Ⅰ）设 $f(x),g(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，又 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$，求证：无穷小

$$\int_0^{\varphi(x)}f(t)\,dt\sim\int_0^{\varphi(x)}g(t)\,dt\qquad(x\to a);$$

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)=0$，$f'(a)=A\neq0$，求证：$f(x)\sim A(x-a)(x\to a)$；

（Ⅲ）设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=6$，求 $w=\lim\limits_{x\to0}\left\{\int_0^{x^3}f(t)\,dt\Big/\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^3\right\}$.

【证明与求解】　（Ⅰ）由

$$\lim_{x\to a}\left\{\int_0^{\varphi(x)}f(t)\,dt\Big/\int_0^{\varphi(x)}g(t)\,dt\right\}\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim_{u\to0}\left\{\int_0^u f(t)\,dt\Big/\int_0^u g(t)\,dt\right\}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{u\to0}\frac{f(u)}{g(u)}=1,$$

$$\Rightarrow\quad\int_0^{\varphi(x)}f(t)\,dt\sim\int_0^{\varphi(x)}g(t)\,dt\qquad(x\to a).$$

（Ⅱ）因为 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{A(x-a)}=\frac{1}{A}\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{1}{A}f'(a)=1$，所以

$$f(x)\sim A(x-a)\qquad(x\to a).$$

（Ⅲ）由题（Ⅱ）$\Rightarrow f(x)\sim6x\quad(x\to0)$，再由题（Ⅰ）$\Rightarrow$

$$\int_0^{x^3}f(t)\,dt\sim\int_0^{x^3}6t\,dt=6\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^{x^3}=3x^6,\quad\int_0^x f(t)\,dt\sim\int_0^x 6t\,dt=3x^2.$$

因此，利用等价无穷小因子替换即得

$$w=\lim_{x\to0}\frac{3x^6}{(3x^2)^3}=\frac{1}{9}.$$

www.TopSage.com

题型五　由极限值确定函数式中的参数

【解题思路】　为确定极限式中包含的待定参数的数值，应在所求极限存在的前提下，利用极限的四则运算法则、等价无穷小、洛必达法则、泰勒公式等来求解.

【例 1.31】　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，求 a,b 之值.

【分析】　像这种类型($\infty-\infty$)的极限，已知此待定式的极限存在且等于某一常数，要确定极限式中的参数 a,b，一般有下列两种方法：方法 1° 直接将所给无理式有理化定出极限式中所含参数之值；方法 2° 先提出 ∞ 因子，将 $\infty-\infty$ 型化为 $\infty\cdot 0$ 型，然后由极限存在的条件定出极限式中所含参数之值.

【解】　原式可改写成 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=2$. 由于该式成立，所以必有 $3-\sqrt{a}=0$，即 $a=9$. 将 $a=9$ 代入原式，并有理化得

$$\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{9x^2+bx+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-b-\dfrac{1}{x}}{3+\sqrt{9+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=-\frac{b}{6}=2.$$

由此得 $b=-12$. 故 $a=9,b=-12$.

【例 1.32】　确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\ (c\neq0)$.

【解】　由于当 $x\to0$ 时对 $\forall$ 常数 a 都有 $ax-\sin x\to0$，又分式的极限 c 不为零，所以当 $x\to0$ 时必有分母 $\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\to0$，故必有 $b=0$. 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c\ (c\neq0),$$

故必有 $a=1$，从而 $c=\dfrac{1}{2}$.

评注　要看清 $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$，因分子趋于 0 且整个分式有非零极限 c，故必是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，变上限积分可用洛必达法则.

题型六　利用适当放大缩小法求极限

【例 1.33】　设 $a>0$ 为常数，$x_n=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k)(na+k+1)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】　先放大、缩小后可以化简：

$$z_n\overset{记}{=\!=}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k)^2}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k+1)^2}\overset{记}{=\!=}y_n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(na+k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[n^2a+\frac{(1+n)n}{2}\right]$$

www.TopSage.com

$$= \lim_{n\to\infty}\left(a + \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\right) = a + \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(na + k + 1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[n^2 a + \frac{(n+3)n}{2}\right] = a + \frac{1}{2},$$

由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + \frac{1}{2}$.

【例 1.34】 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^2}\cos nx\,dx = 0$.

【证明】 先对积分 $\int_0^1 e^{x^2}\cos nx\,dx$ 建立估计式然后证明它的极限为零，这里可行的方法是先对原积分进行分部积分.

$$\int_0^1 e^{x^2}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 e^{x^2}\,d(\sin nx) = \frac{1}{n}e^{x^2}\sin nx\Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 2xe^{x^2}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{e}{n}\sin n - \frac{1}{n}\int_0^1 2xe^{x^2}\sin nx\,dx,$$

于是 $\left|\int_0^1 e^{x^2}\cos nx\,dx\right| \leqslant \frac{e}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 |2xe^{x^2}\sin nx|\,dx \leqslant \frac{e}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 2e\,dx \leqslant \frac{e}{n} + \frac{2e}{n} = \frac{3e}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^2}\cos nx\,dx = 0$.

题型七　求 n 项和数列的极限

【解题思路】 数列 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 是 n 项求和，项数随 n 无限增加，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 常用的方法有：

1° 通过恒等变形化为可用极限四则运算法则的情形；

2° 适当放大缩小法；

3° 化为积分和利用定积分求极限；

4° $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，再用数值级数求和的方法直接求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

【例 1.35】 求 $w = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}$.

【解】 记 $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}$，注意 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\tan\frac{i}{n}}{n}$ 是 $f(x) = \tan x$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故可积，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n} = \int_0^1\tan x\,dx = -\int_0^1\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln\cos x\Big|_0^1 = -\ln\cos 1.$$

因此，我们对 x_n 用适当放大缩小法，将求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 转化为求积分和的极限. 因

$$\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tan\frac{i}{n}}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+n} \leqslant x_n \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n} = \int_0^1\tan x\,dx = -\ln\cos 1$,

www.TopSage.com

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n}=1\cdot\int_0^1\tan x\mathrm{d}x=-\ln\cos 1,$$

于是由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\ln\cos 1$.

题型八　求 n 项积数列的极限

【解题思路】　数列 $\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$ 是 n 项乘积，项数随 n 无限增加，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$ 常用的方法有：

1° 通过恒等变形化为可用极限四则运算法则的情形；

2° 取对数后变成 n 项和数的数列.

【例 1.36】　设 $x_n=\frac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】　先取对数化为和式的极限 $\ln x_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\ln(n^2+i^2)-4\ln n$，然后作恒等变形（看看能否化为积分和的形式），则

$$\begin{aligned}\ln x_n&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left[n^2\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\right]-4\ln n\\&=\frac{1}{n}2n\cdot 2\ln n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left[1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]-4\ln n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left[1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right].\end{aligned}$$

它是 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 在 $[0,2]$ 区间上的一个积分和（对 $[0,2]$ 区间作 $2n$ 等分，每个小区间长 $\frac{1}{n}$），则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln x_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^2\ln(1+x^2)\mathrm{d}x\\&=x\ln(1+x^2)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2x^2+2-2}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\ln 5-4+2\arctan 2.\end{aligned}$$

因此　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x_n}=\mathrm{e}^{2\ln 5-4+2\arctan 2}=25\mathrm{e}^{-4+2\arctan 2}$.

题型九　利用函数极限求数列极限

【例 1.37】　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

【解】　先转化为求函数极限，然后用洛必达法则.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\xlongequal{\sqrt{n}\text{改为}x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\right]'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=2,$$

其中 $x\to+\infty$ 时 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$.

www.TopSage.com

评注 ① 数列没有导数的概念，因此对数列直接求导是错误的；一定要先转化为求函数极限，然后再用洛必达法则．

② 当 $x\to+\infty$ 时，分式 $\dfrac{\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t}{x}$ 中分母 $x\to+\infty$，此时不必验证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$ 是否为无穷，就可用洛必达法则求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t}{x}$（见【定理 1.11】的注 ②）．

题型十　无穷小的比较与无穷小的阶的确定

【例 1.38】 当 $x\to0$ 时下列无穷小是 x 的 n 阶无穷小，求阶数 n：

（Ⅰ） $\mathrm{e}^{x^4-2x^2}-1$；　　（Ⅱ） $(1+\tan^2x)^{\sin x}-1$；

（Ⅲ） $\dfrac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}$；　　（Ⅳ） $\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$．

【解】 （Ⅰ）$\mathrm{e}^{x^4-2x^2}-1\sim x^4-2x^2\sim-2x^2$ $(x\to0)$，即当 $x\to0$ 时 $\mathrm{e}^{x^4-2x^2}-1$ 是 x 的 2 阶无穷小，故 $n=2$．

（Ⅱ）$(1+\tan^2x)^{\sin x}-1\sim\ln[(1+\tan^2x)^{\sin x}-1+1]$

$=\sin x\ln(1+\tan^2x)\sim\sin x\tan^2x\sim x\cdot x^2=x^3$ $(x\to0)$，

即当 $x\to0$ 时 $(1+\tan^2x)^{\sin x}-1$ 是 x 的 3 阶无穷小，故 $n=3$．

（Ⅲ）由 $1-\sqrt{\cos x^2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x^2}}(1-\cos x^2)\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2)^2$ $(x\to0)$ $\Rightarrow$ $1-\sqrt{\cos x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小，即当 $x\to0$ 时 $\dfrac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的 4 阶无穷小，故 $n=4$．

（Ⅳ）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)^2\sin x}{nx^{n-1}}$

$\overset{n=6}{=\!=\!=}\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)^2\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{24}$，

即当 $x\to0$ 时 $\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$ 是 x 的 6 阶无穷小，故 $n=6$．

【例 1.39】 设 $\alpha>0$，$\beta>0$ 为任意正数，当 $x\to+\infty$ 时将无穷小量：$\dfrac{1}{x^\alpha}$，$\dfrac{1}{\ln^\beta x}$，e^{-x} 按从低阶到高阶的顺序排列．

【解】 先考察 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}$．令 $y=\dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}\Rightarrow\ln y=x\left(\alpha\dfrac{\ln x}{x}-1\right)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=-\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\ln y}=0$．再考察

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^\alpha}}{\frac{1}{\ln^\beta x}}\overset{t=\ln x}{=\!=\!=}\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha t}}\overset{\alpha t=s}{=\!=\!=}\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^\beta\frac{s^\beta}{\mathrm{e}^s}=0\ .$$

www.TopSage.com

因此，当 $x \to +\infty$ 时，按从低阶到高阶的顺序排列为 $\frac{1}{\ln^{\beta} x}$，$\frac{1}{x^{\alpha}}$，e^{-x}.

评注 ① 上述结论表明，当 $x \to +\infty$ 时，若 $\frac{1}{x}$ 为基本无穷小，则 $\forall \alpha > 0$（不论它多么大），e^{-x} 都比 $\frac{1}{x^{\alpha}}$ 高阶；$\forall \beta > 0$（不论它多么大），$\forall \alpha > 0$（不论它多么小），$\frac{1}{x^{\alpha}}$ 都比 $\frac{1}{\ln^{\beta} x}$ 高阶.

② 也可连续用洛必达法则来证明上述结论.

题型十一　讨论函数的连续性与间断点的类型

【例 1.40】 设有定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数：

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$　(B) $g(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0, \\ \cos x - 1, & x > 0; \end{cases}$

(C) $h(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$　(D) $m(x) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{|x|}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

则（Ⅰ）其中在定义域上连续的函数是_____；

（Ⅱ）以 $x = 0$ 为第二类间断点的函数是_____.

【分析】 （Ⅰ）当 $x > 0$ 与 $x < 0$ 时上述各函数分别与某初等函数相同，故连续. 从而只需再考察哪个函数在点 $x = 0$ 处连续. 注意到若 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leqslant 0, \\ h(x), & x > 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 连续，$h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续. 因 $f(x) = g(x)(x \in (-\infty, 0])$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x = 0$ 左连续. 若又有 $g(0) = h(0)$ $\Rightarrow$ $f(x) = h(x)(x \in [0, +\infty))$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x = 0$ 右连续. 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. (B) 中的函数 $g(x)$ 满足：$\sin x \big|_{x=0} = (\cos x - 1)\big|_{x=0}$，又 $\sin x, \cos x - 1$ 均连续 $\Rightarrow g(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 因此，(B) 中的 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. 应选 (B).

（Ⅱ）关于 (A)：由

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃间断点）.

关于 (C)：由

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \neq h(0)$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ 是 $h(x)$ 的第一类间断点（可去间断点）.

已证 (B) 中 $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 因此选 (D).

或直接考察 (D). 由

$$\lim_{x \to 0+} m(x) = \lim_{x \to 0+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ 是 $m(x)$ 的第二类间断点.

【例 1.41】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1, \\ 1 - x, & x > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 2, \\ 2(x-1), & 2 < x \leqslant 5, \\ x + 3, & x > 5, \end{cases}$ 讨论 $y = f[g(x)]$

www.TopSage.com

的连续性,若有间断点并指出类型.

【解法一】 先写出 $f[g(x)]$ 的表达式.考察 $g(x)$ 的值域:

$$g(x)\begin{cases}\leqslant 1, & x\leqslant 1,\\ >1, & x>1,\end{cases}\qquad f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & x\leqslant 1,\\ 1-g(x), & x>1,\end{cases}$$

即 $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 1-2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ 1-(x+3), & x>5\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 3-2x, & 2\leqslant x\leqslant 5,\\ -(x+2), & x\geqslant 5.\end{cases}$ (经过验证,$x=2,5$ 处可添加等号)

当 $x\neq 1,2,5$ 时 $f[g(x)]$ 分别在不同的区间与某初等函数相同,故连续.当 $x=2,5$ 时,分别由左、右连续得连续.当 $x=1$ 时, $\lim\limits_{x\to 1+0}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1+0}(1-x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-0}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1-0}x^2=1$, 从而 $f[g(x)]$ 在 $x=1$ 不连续且是第一类间断点(跳跃间断点).

【解法二】 注意 $u=g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2\leqslant x\leqslant 5,\\ x+3, & x\geqslant 5,\end{cases}$ 从而 $g(x)$ 处处连续;

$y=f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1,\\ 1-u, & u>1.\end{cases}$ 当 $u\neq 1$ 时连续,由复合函数连续性可知,当 $g(x)\neq 1$ 即 $x\neq 1$ 时, $f[g(x)]$ 连续.对 $x=1$,由于

$$\lim_{x\to 1+0}f[g(x)]\overset{g(x)=x}{=\!=\!=}\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(1-x)=0,$$

$$\lim_{x\to 1-0}f[g(x)]\overset{g(x)=x}{=\!=\!=}\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x^2=1.$$

因此,$x=1$ 为 $f[g(x)]$ 的第一类间断点(跳跃间断点).

题型十二 有关连续函数性质的命题

▶1. 连续函数性质的应用

【例 1.42】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,且 $f(0)=f(1)$,证明:在 $[0,1]$ 上至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right).$$

【分析与证明】 即证:$F(x)\triangleq f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ 在 $[0,1]$ 存在零点.因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,所以 $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ 在 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 连续.

事实上,我们要证:$F(x)$ 在 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 存在零点(只需证 $F(x)$ 在 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 有两点异号).考察

$$\begin{cases}F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right),\\ F\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right),\\ F\left(\frac{2}{n}\right)=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{3}{n}\right),\\ \cdots\cdots\\ F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1),\end{cases}$$

www.TopSage.com

则 $F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f(1)=0$.

于是 $F(0),F\left(\frac{1}{n}\right),\cdots,F\left(\frac{n-1}{n}\right)$中或全为0,或至少有两个值是异号的,于是由连续函数介值定理,$\exists$ $\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

▶2. 连续函数性质的推广

【例1.43】 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$连续,存在极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$. 证明:

(Ⅰ)设 $A<B$,则对 $\forall\mu\in(A,B)$,$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得 $f(\xi)=\mu$;

(Ⅱ)$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

【证法一】 利用极限的性质转化为有界区间的情形.

(Ⅰ)由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A<\mu$ 及极限的不等式性质可知,$\exists X_1$ 使得 $f(X_1)<\mu$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B>\mu$ 可知,$\exists X_2>X_1$ 使得 $f(X_2)>\mu$. 因 $f(x)$ 在$[X_1,X_2]$连续,$f(X_1)<\mu<f(X_2)$,由连续函数介值定理,得 $\exists\xi\in(X_1,X_2)\subset(-\infty,+\infty)$,使得 $f(\xi)=\mu$.

(Ⅱ)因 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$,由存在极限的函数的局部有界性定理即【定理1.4】可知 $\exists X_1$,使得当 $x\in(-\infty,X_1)$ 时 $f(x)$ 有界;$\exists X_2(>X_1)$,使得当 $x\in(X_2,+\infty)$ 时 $f(x)$ 有界. 又由有界闭区间上连续函数的有界性定理即【定理1.16】可知,$f(x)$ 在$[X_1,X_2]$上有界. 因此 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

【证法二】 利用变量替换与构造辅助函数的方法转化为有界区间的情形.

令 $t=\arctan x$,即 $x=\tan t$,$x\in(-\infty,+\infty)\Leftrightarrow t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 再令

$$F(t)=\begin{cases}A, & t=-\frac{\pi}{2},\\ f(\tan t), & t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ B, & t=\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

由复合函数连续性知,$F(t)=f(\tan t)$ 在 $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$连续. 又

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}+0}F(t)=\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}+0}f(\tan t)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A=F\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

同理 $$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}F(t)=F\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

因此 $F(t)$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$连续.

(Ⅰ)因 $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)<\mu<F\left(\frac{\pi}{2}\right)$,由连续函数介值定理知,$\exists t^*\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,$F(t^*)=\mu$,令 $\tan t^*$,则 $\xi\in(-\infty,+\infty)$,$f(\xi)=f(\tan t^*)=F(t^*)=\mu$.

(Ⅱ)当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时 $f(x)=f(\tan t)=F(t)$,$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,因 $F(t)$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续,故有界,从而 $F(t)$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$有界,因此 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$有界.

www.TopSage.com

题型训练

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处间断，又 $f(a)\neq 0$，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 在 $x=a$ 处间断.　　(B) $f[\varphi(x)]$ 在 $x=a$ 处间断.

(C) $[\varphi(x)]^2$ 在 $x=a$ 处间断.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断.

2. "$f(x)$ 在点 a 连续"是 $|f(x)|$ 在点 a 处连续的(　　)条件.

(A) 必要非充分　　(B) 充分非必要　　(C) 充要　　(D) 既非充分又非必要

3. 设数列 x_n, y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列正确的是

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小.　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

4. $f(x)=x\sin x$

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.　　(B) 当 $x\to+\infty$ 时为无穷大.

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.　　(D) 当 $x\to\infty$ 时有极限.

5. 设 $f(x), g(x)$ 在 $x=x_0$ 均不连续，则在 $x=x_0$ 处

(A) $f(x)+g(x), f(x)\cdot g(x)$ 均不连续.

(B) $f(x)+g(x)$ 不连续，$f(x)g(x)$ 的连续性不确定.

(C) $f(x)+g(x)$ 的连续性不确定，$f(x)g(x)$ 不连续.

(D) $f(x)+g(x), f(x)g(x)$ 的连续性均不确定.

6. 当 $n\to\infty$ 时 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 是 $\dfrac{1}{n}$ 的

(A) 高阶无穷小.　(B) 低阶无穷小.　(C) 等价无穷小.　(D) 同阶但非等价无穷小.

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2\sin\dfrac{1}{x}+2\sin x}{x}=$ _____.　2. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}=3$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$ _____.

设 K, L, δ 为正的常数，则 $\lim\limits_{x\to0}[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}=$ _____.

设 $f(x)=\begin{cases} a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则常数 $a=$ _____.

$+x^2-\mathrm{e}^{x^2}$ 当 $x\to0$ 时是 x 的_____阶无穷小(填数字).

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则 $a=$ _____.

求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}$，$t$ 为常数;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right]$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-x^2\cos x-1}{\sin(x^2)}$;

).

www.TopSage.com

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；

6. $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$；

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$；

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$；

9. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]$；

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^{2x}e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{3x}^{0}e^{2t^2}dt}$；

11. 数列极限：(Ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)$；(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中 $x_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$；

12. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\right)$.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^x-1}{x\ln x}, & x>1,\\ 0, & x=1,\\ \frac{\sin(1-x)+\cos(1-x)-1}{1-x}, & x<1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

四、证明题与计算题

1. 设 $0<x_0<1$，$x_{n+1}=x_n(2-x_n)$，求证：$\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 设 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，$x_1>0$，(Ⅰ) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；(Ⅱ) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$.

3. 设 $a>0$ 为常数，$x_n=\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n-1)}=\frac{4}{e}$.

5. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}f^*(x)=\lim\limits_{x\to a}g^*(x)=0$，且
$$f(x)\sim f^*(x),\quad g(x)\sim g^*(x)(x\to a).$$
(Ⅰ) 当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可比较，不等价 $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=r\neq1$，或 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty\right)$，求证：$f(x)-g(x)\sim f^*(x)-g^*(x)(x\to a)$；
(Ⅱ) 当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $f(x)$ 与 $f^*(x)$ 均为正值，求证：
$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}f^*(x)^{g^*(x)}$$
(其中一端极限存在，则另端极限也存在且相等).

6. 讨论下列函数的连续性并判断间断点的类型：

(Ⅰ) $y=(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}$；

(Ⅱ) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}-x\right)$；

(Ⅲ) $y=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0;\end{cases}$

(Ⅳ) $f(x)=\begin{cases}\frac{\int_0^{\sin x}\sin\frac{1}{x}\cos t^2dt}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(Ⅴ) $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$，$x\in(0,2\pi)$；

(Ⅵ) $y=f[g(x)]$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ 2-x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant1,\\ x+4, & x>1.\end{cases}$

大家网 TopSage.com

www.TopSage.com

7. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n \in (a,b)$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为任意 n 个正数，求证：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f(\xi) = \frac{\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\forall x \in [a,b]$，总 $\exists y \in [a,b]$，使得 $|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$. 试证：$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A > 0$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = +\infty$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x = A$.

www.TopSage.com

第二章　一元函数的导数与微分概念及其计算

内容概要与重难点提示

本章的内容是一元函数的导数与微分等概念及其各种计算方法．这是微积分学中最基本又是最重要的概念与计算之一．本章只含微分学中的概念与计算部分以及它的简单应用．

一元函数的导数是函数增量与自变量增量之比当自变量增量趋于零时的极限，从而是一类特殊的函数极限，也是一类$\frac{0}{0}$型极限．在几何上看函数的导数表示曲线切线的斜率，在力学上看路程函数的导数就是速度．因此导数有鲜明的几何意义与力学意义．导数还有更广泛的物理意义，许多物理量的变化率均用导数来描述，如由通过导线的电量求电流强度，由单位质量的物体的热量求比热等等．导数概念在几何上的应用就是求曲线的切线或法线的斜率．应熟练掌握平面上各种类型的曲线的切线或法线方程的求法．

函数的可微性与可导性是等价的，它是函数增量与自变量增量之间关系的另一种表达形式，函数的微分是函数增量的线性主要部分．可微与可导既然是等价的，那么人们为什么还要研究函数的可微性与微分呢?这是因为微分更确切地描述了“以直代曲”的含意——在一点附近可用切线近似代替曲线．微分，特别是一阶微分形式不变性是求导的逆运算（即求积分）的基础；用微分近似函数增量（即一次逼近）是泰勒公式（即高次逼近）的特殊情形．

函数的可导性是比函数的连续性更强的性质，因为函数可导必连续，而连续未必可导．

求一元函数的导数与微分的方法是相同的，因而把求导数与求微分的法则统称为微分法则．除了按定义求外，我们可根据基本初等函数导数（微分）表及微分法则来求任意初等函数的导数；初等函数可以求任意阶导数，导函数还是初等函数；微分法则还适用于可微的非初等函数．

应熟练掌握如下微分法则：导数的四则运算法则与复合函数求导法则，以及由复合函数求导法则导出的求导法则（幂指数函数的求导、反函数求导、参数式求导、隐函数求导、变限积分的求导）以及分段函数的求导．要会讨论分段函数在其分界点处的可导性及导函数的连续性．特别强调的是，要会用上述法则求二阶导数．

求高阶导数就是逐阶求导数．要掌握求 n 阶导数表达式的方法．

考核知识要点讲解

一、一元函数的导数与微分

（一）导数的定义、几何意义与力学意义

▶1. 导数的定义

【定义 2.1】 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

www.TopSage.com

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可导**，并称这个极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数（或微商）**，记作 $f'(x_0)$，$y'(x_0)$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ 等.

令 $x = x_0 + \Delta x$，导数的定义式可改写成 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

【定义 2.2】 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处存在如下单侧极限

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

则分别称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ **右、左可导**，上述极限值分别称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的右、左导数，记为 $f'_+(x_0)$，$f'_-(x_0)$ 或 $y'_+(x_0)$，$y'_-(x_0)$.

▶2. 几何意义 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

▶3. 力学意义 质点作直线运动，t 时刻质点的坐标为 $x = x(t)$，$x'(t_0)$ 是 $t = t_0$ 时刻的速度.

（二）单侧可导与双侧可导的关系

【定理 2.1】 $f(x)$ 在 x_0 可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 左、右导数均存在且相等，即

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

（三）可微的定义、微分的几何意义及可微、可导与连续之间的关系

▶1. 可微的定义

【定义 2.3】 设函数 $y = f(x)$，当自变量 $x = x_0$ 有增量 Δx 时，若存在与 Δx 无关的常数 $A(x_0)$，使得函数的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 可表为

$$\Delta y = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\qquad (\Delta x\to 0),$$

则称 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处**可微**，$A(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的**微分**，记为

$$dy|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x \quad 或 \quad df|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x,$$

其中 $o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小量.

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分是该函数在 $x = x_0$ 处函数增量的线性主要部分（简称线性主部）.

▶2. 微分的几何意义

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的纵坐标 $f(x_0)$ 的增量，微分 $dy|_{x=x_0}$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处的切线相应于自变量增量 Δx 的纵坐标的增量（见图 2.1）.

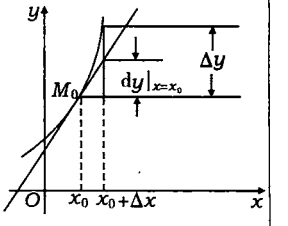


图 2.1

▶3. 可微、可导及连续之间的关系

【定理 2.2】 $f(x)$ 在 x_0 可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 可微 $\nRightarrow$ $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.

$y = f(x)$ 在 x_0 可微时 $dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$.

www.TopSage.com

（四）函数在区间上的可导性，导函数及高阶导数

▶1. 函数在区间上的可导性

若 $\forall x \in (a,b)$，$f(x)$ 可导，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f(x)$ 既在 $x = a$ 处右可导，又在 $x = b$ 处左可导，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 可导.

▶2. 导函数

若 $f(x)$ 在区间 I 可导，则 $\forall x \in I$ 都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值，这就构成一个新的函数，叫做 $y = f(x)$ 的导函数，简称**导数**，又叫一阶导数. 记作 y'，$f'(x)$，$\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

▶3. 二阶导数及高阶导数

函数 $y = f(x)$ 的导数仍是 x 的函数，把导函数 $y' = f'(x)$ 的导数，叫做 $y = f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y''，$f''(x)\left(\text{或 } \frac{d^2y}{dx^2}\right)$，即 $y'' = (y')'$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

把 $y = f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数称为 $y = f(x)$ 的 ***n* 阶导数**，记作 $y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$. 即

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}, \cdots, f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}.$$

函数 $f(x)$ 有 n 阶导数也称 $f(x)$ n 阶可导.

按定义，若 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域必具有一切低于 n 阶的导数.

▶4. 二阶导数的力学意义

质点作直线运动，t 时刻的坐标为 $x = x(t)$，则 $x''(t_0)$ 是 $t = t_0$ 时刻的加速度.

（五）奇偶函数与周期函数的导数性质

设 $f(x)$ 在 I 上可导，若 $f(x)$ 在 I 上为奇函数 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 在 I 上为偶函数；

若 $f(x)$ 在 I 上为偶函数 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 在 I 上为奇函数.

设 $f(x)$ 可导，以 T 为周期 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 也以 T 为周期.

【例 2.1】 说明下列事实的几何意义：

（Ⅰ）函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0) = g(x_0)$，$f'(x_0) = g'(x_0)$；

（Ⅱ）在题（Ⅰ）的条件下又 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x = x_0$ 有连续的二阶导数且 $f''(x_0) = g''(x_0) \neq 0$；

（Ⅲ）函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$，但 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$；

（Ⅳ）函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，且有 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$.

【解】 （Ⅰ）曲线 $y = f(x)$，$y = g(x)$ 在公共点 $M_0(x_0, f(x_0))$，即 $(x_0, g(x_0))$ 处相切.

（Ⅱ）曲线 $y = f(x)$，$y = g(x)$ 在公共点 $M_0(x_0, f(x_0))$，即 $(x_0, g(x_0))$ 处相切，有相同的曲率

$$K = \frac{|f''(x_0)|}{[1 + f'^2(x_0)]^{3/2}} = \frac{|g''(x_0)|}{[1 + g'^2(x_0)]^{3/2}},$$

且在 M_0 点某邻域有相同的凹凸性. 因 $f''(x)$，$g''(x)$ 在 x_0 处连续，$f''(x_0) = g''(x_0) > 0$ （或 < 0） $\Rightarrow$ $\exists x_0$ 的某邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，有 $f''(x) > 0$，$g''(x) > 0$ （或 $f''(x) < 0$，$g''(x) < 0$）.

（Ⅲ）曲线在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处存在左切线与右切线，且左右切线有一个夹角（见图 2.2）.

（Ⅳ）曲线 $y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 有垂直于 x 轴的切线 $x = x_0$（见图 2.3）.

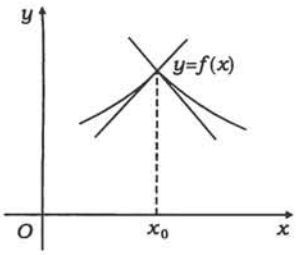


图 2.2

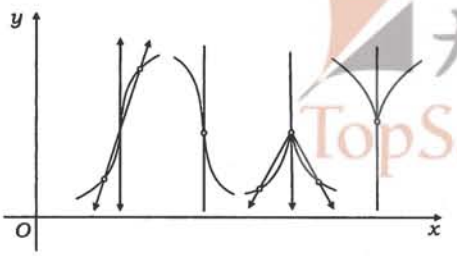


图 2.3

大家网 TopSage.com

【例 2.2】 判断下列结论是否正确?为什么?

(Ⅰ)若函数 $f(x),g(x)$ 均在 x_0 处可导,且 $f(x_0)=g(x_0)$,则 $f'(x_0)=g'(x_0)$;

(Ⅱ)若 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,$x\neq x_0$ 时 $f(x)=g(x)$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处有相同的可导性;

(Ⅲ)若存在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,使得 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $f(x)=g(x)$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处有相同的可导性.若可导,则 $f'(x_0)=g'(x_0)$.

【解】 (Ⅰ)不正确.函数在某点的可导性不仅与该点的函数值有关,还与该点附近的函数值有关.仅有 $f(x_0)=g(x_0)$ 不能保证 $f'(x_0)=g'(x_0)$.正如曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 可在某处相交但并不相切.

(Ⅱ)不正确.例如 $f(x)=x^2$, $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 显然,当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=g(x)$,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,而 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不可导(因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 不连续).

(Ⅲ)正确.由假设可得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,$x\neq x_0$ 时

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

故当 $x\to x_0$ 时等式左右端的极限或同时存在或同时不存在,而且若存在则相等.再由导数定义即可得出结论.

【例 2.3】 设 $f'(x)$ 存在,求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}$,其中 a,b 为非零常数.

【解】 按导数定义,将原式改写成

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+a\Delta x)-f(x)}{a\Delta x}a-\frac{f(x-b\Delta x)-f(x)}{-b\Delta x}(-b)\right]\\&=a\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}+b\lim_{s\to 0}\frac{f(x+s)-f(x)}{s}\qquad\begin{pmatrix}t=a\Delta x\\ s=-b\Delta x\end{pmatrix}\\&=af'(x)+bf'(x)=(a+b)f'(x).\end{aligned}$$

评注 这里除了按导数定义外,还用了变量替换法求极限.当 $ab=0$ 时结论也成立,但解法需作必要的改变,请读者自己完成.

【例 2.4】 请回答下列问题:

(Ⅰ)设 $f(x)$ 在 x_0 可微,$f'(x_0)\neq 0$,则 $\Delta x\to 0$ 时 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分与 Δx 比较是(　　)无穷小,$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 与 Δx 比较是(　　)无穷小,$\Delta y-\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}$ 与 Δx 比较是(　　)无穷小(用等价、同阶、低阶、高阶回答);

(Ⅱ)$\mathrm{d}u$ 与 Δu 是否相等?

(Ⅲ)设 $u=\varphi(x)$ 在 (a,b) 内可微,且在 (a,b) 内有 $\mathrm{d}u=\Delta u$,则 $\varphi(x)=$ _____.

www.TopSage.com

【分析】 (Ⅰ) $\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$,由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$ 知这时 $\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}$ 与 Δx 是同阶无穷小量;按定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$,故 Δy 与 Δx 也是同阶无穷小量;按微分定义可知差 $\Delta y - \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0} = o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$ 是比 Δx 高阶的无穷小.

(Ⅱ) 当 u 为自变量时 $\mathrm{d}u = \Delta u$,当 u 是另一变量 x 的函数 $u = \varphi(x)$ 时,一般来说,$\mathrm{d}u \neq \Delta u$,如 $u = x^2$,$\mathrm{d}u = 2x\Delta x$,$\Delta u = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$;又如 $u = ax + b$,则 $\mathrm{d}u = \Delta u$.

(Ⅲ) 取定 $x_0 \in (a,b)$,按题意

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0) \qquad (\forall x \in (a,b)),$$

则有 $\varphi(x) = C_1 x + C_2$,其中 C_1, C_2 为任意常数.

二、按定义求导数及其适用的情形

(一) 按定义求导数

按定义求一元函数 $y = f(x)$ 在某点 $x = x_0$ 处的导数,就是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限,即求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

注意当 $\Delta x \to 0$ 时,若 $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 不是无穷小量,则 $f'(x_0)$ 不存在,即 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

(二) 适合用定义求导数的几种情形

情形 Ⅰ 除了常数函数外还有某些基本初等函数的导数公式,如 $(\sin x)' = \cos x$,$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 等均可按定义导出.而其他基本初等函数的导数公式可由这些导数公式及求导法则得出.

情形 Ⅱ 求导法则不能用的情形:如设 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$,$\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续,试问 $f(x)$ 在 $x = a$ 处是否可导?因为不知道 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处是否可导,因此,乘积的求导法则不适用.需要按导数的定义考察极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

情形 Ⅲ 求某类分段函数在分界点处的导数,见本章第六项.

(三) 利用导数定义求极限

Ⅰ. 设 $f'(x)$ 存在,若所求极限可化为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 的形式,则按导数定义即是 $f'(x)$.

Ⅱ. 设 $f'(x)$ 存在,由数列极限与函数极限的关系还可得当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+x_n) - f(x)}{x_n} = f'(x).$$

【例 2.5】 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x) - b}{x - a} = A$,则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x) - \sin b}{x - a} =$ _____.

【分析】 补充定义 $f(a) = b$,则有

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - b}{x - a} = A.$$

www.TopSage.com

于是$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin b}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin f(a)}{x-a}=[\sin f(x)]'\big|_{x=a}=\cos f(a)\cdot f'(a)=A\cos b$.

【例2.6】 设$f(x)$在$x=a$可导,且$f(a)=1$,$f'(a)=3$,求数列极限$w=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)\right]^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}}$.

【分析与求解】 这是指数型数列极限,先转化成

$$f\left(a+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)},$$

其指数是$\dfrac{0}{0}$型数列极限,用等价无穷小因子替换,由数列极限与函数极限的关系及导数定义知

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n^2}}\left[\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)\right]$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}=2[\ln f(x)]'\big|_{x=a}$$

$$=2\frac{f'(a)}{f(a)}=2\cdot\frac{3}{1}=6,$$

因此$w=\mathrm{e}^6$.

评注 下面方法是错误的:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=2\lim_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t)}{t}=2\lim_{t\to 0}\frac{\frac{f'(a+t)}{f(a+t)}}{1}=2\frac{f'(a)}{f(a)}=6.\quad\times$$

这是因为题目中没设$f(x)$在$x=a$邻域可导及$f'(x)$在$x=a$连续,但若题目加强条件,假设了这些条件,那么这种解法就是正确的.

二、基本初等函数导数表,导数四则运算法则与复合函数微分法则

(一) 基本初等函数导数表(微分表)与求导法则

▶1. 基本初等函数导数表(微分表)

$(c)'=0$　　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$　　$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0,a\neq 1)$

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$　　$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

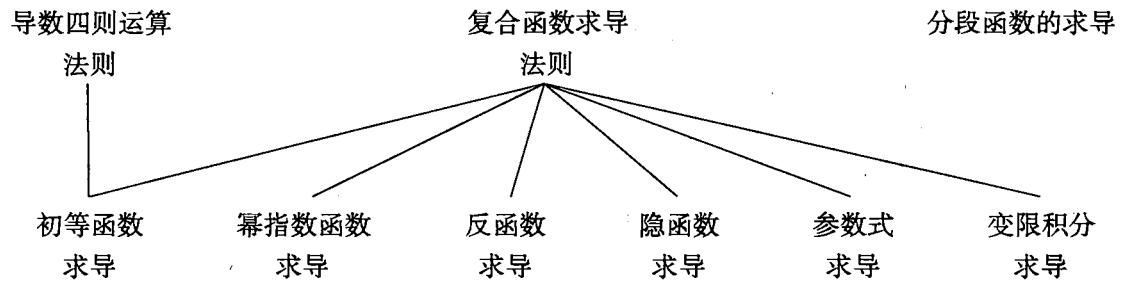
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

www.TopSage.com

【注】 相应地有基本初等函数微分表.

▶2. 求导法则的几种情形

求导法则分如下几种情形(在本章后面详细叙述):



【注】 用求导法则可将初等函数的求导转化为套用基本初等函数导数表中的结果.求导法则也适用于非初等函数.

(二) 导数与微分的四则运算法则

【定理 2.3】 设 $f(x),g(x)$ 在 x 处可导(可微),则

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$, $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

(2) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\ (g(x)\neq 0)$;

(3) $\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}f(x)\pm \mathrm{d}g(x)$, $\mathrm{d}[f(x)g(x)]=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x)$;

(4) $\mathrm{d}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)}\ (g(x)\neq 0)$.

(三) 复合函数的微分法则

【定理 2.4】 设 $\varphi(x)$ 在 x 处可导,$y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad 或\quad y'_x=y'_u u'_x\quad 或\quad y'_x=f'(u)\varphi'(x).$$

用微分表示为 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$,其中 u 可以是自变量也可以是另一变量的可微函数——这就是**一阶微分形式不变性**.

若是多层复合函数,则可逐次用复合函数求导法求它的导数.例如:由 $y=f(u),u=g(v),v=h(x)$ 构成复合函数 $y=f[g(h(x))]$.若 $v=h(x)$ 在 x 可导,$u=g(v)$ 在 $v=h(x)$ 处可导,$y=f(u)$ 在 $u=g(v)$ 处可导,则复合函数 $y=f[g(h(x))]$ 在 x 可导,且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

或
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[g(h(x))]=f'[g(h(x))]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g[h(x)]=f'[g(h(x))]g'[h(x)]h'(x).$$

这里,我们约定:$f'[g(x)]=f'(u)\big|_{u=g(x)}$.

www.TopSage.com

四、初等函数求导法

利用基本初等函数导数表、导数的四则运算法则及复合函数求导法可求任意初等函数的导数. 关键是恰当地选取中间变量,将给定的初等函数分解成基本初等函数的复合或四则运算. 复合函数求导时,先对中间变量求导,将所得结果再乘上中间变量对自变量的导数即可. 这样每一步都是基本初等函数的求导,可用基本初等函数的导数公式. 如果读者比较熟练也可以不写出中间变量.

初等函数的导数还是初等函数,因此初等函数可求任意阶导数.

【例 2.7】 求下列函数的导数 y':

(Ⅰ) $y = \arctan e^{x^2}$; (Ⅱ) $y = \log_{\sin x}\cos x$.

【解】 (Ⅰ) $y' = \dfrac{1}{1+e^{2x^2}}(e^{x^2})' = \dfrac{1}{1+e^{2x^2}}e^{x^2}(x^2)' = \dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}$.

(Ⅱ) 先作恒等变形,然后再求导数. 由 $y = \log_{\sin x}\cos x = \dfrac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$,得

$$y' = \left(\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}\right)' = \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}\ln\sin x - \frac{\cos x}{\sin x}\ln\cos x}{\ln^2\sin x} = -\frac{\tan x}{\ln\sin x} - \cot x\frac{\ln\cos x}{\ln^2\sin x}.$$

【例 2.8】 设 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 $f(x)$ 可微,则 $dy =$ _____.

【分析】 $dy = e^{f(x)}df(\ln x) + f(\ln x)de^{f(x)} = e^{f(x)}\left[\dfrac{f'(\ln x)}{x} + f(\ln x)f'(x)\right]dx$.

五、复合函数求导法的应用——由复合函数求导法则导出的几类函数的微分法

(一) 幂指数函数 $f(x)^{g(x)}$ 的求导法

设 $f(x) > 0$, $f(x)$, $g(x)$ 均可导.

▶1. 将 $f(x)^{g(x)}$ 表成 $e^{g(x)\ln f(x)}$ 后求导

对 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ 用复合函数求导法得

$$[f(x)^{g(x)}]' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)}[g(x)\ln f(x)]'$$
$$= f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

▶2. 对数求导法

对 $y = f(x)^{g(x)}$ 两边取对数,得 $\ln y = g(x)\ln f(x)$. 两边对 x 求导并注意 y 是 x 的函数,得

$$\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

因此
$$y' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

用对数求导法求连乘积的导数或微分常常是方便的. 如:

$$y = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x),$$

先取绝对值再取对数得

www.TopSage.com

$$\ln|y| = \ln|f_1(x)| + \ln|f_2(x)| + \cdots + \ln|f_n(x)|.$$

设 $f_i(x)$ 可导$(i = 1,2,\cdots,n)$,求导得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)},\text{即}\quad y' = y\left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right].$$

【例 2.9】 设 $y = (1+x^2)^{\arctan x}$,求 y'.

【解法一】 $y = e^{\arctan x\ln(1+x^2)}$,

$$y' = (1+x^2)^{\arctan x}[\arctan x\ln(1+x^2)]'$$

$$= (1+x^2)^{\arctan x}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{2x\arctan x}{1+x^2}\right].$$

【解法二】 取对数得 $\ln y = \arctan x \cdot \ln(1+x^2)$,两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{2x\arctan x}{1+x^2},$$

$$y' = (1+x^2)^{\arctan x - 1}[\ln(1+x^2) + 2x\arctan x].$$

(二) 反函数求导法

【定理 2.5】 设 $y = f(x)$ 在区间 I_x 内可导且 $f'(x) \neq 0$,值域为区间 I_y,则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 在 I_y 可导且 $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

【例 2.10】 若已知反函数存在且可导,则反函数的导数可由复合函数求导法则求出:

设 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$,则

$$\frac{d}{dy}(y) = \frac{d\,f(x)}{dy} = f'(x)\cdot\frac{dx}{dy} \Leftrightarrow 1 = f'(x)\frac{dx}{dy}.$$

因此 $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'_x}.$$

若又设 $f(x)$ 在区间 I_x 二阶可导,可再用复合函数求导法则求反函数的二阶导数,即

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'_x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'_x}\right)\frac{dx}{dy} = \frac{-y''_{xx}}{y'^2_x}\cdot\frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{y'^3_x}.$$

(三) 由参数方程确定的函数的求导法

给定参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in$ 区间 I.

(1) 若 $x = \varphi(t)$ 是区间 I 上的单调函数,则它存在反函数记为 $t = \varphi^*(x)$,参数方程确定了 y 是 x 的函数 $y = \psi[\varphi^*(x)]$,定义域是 $x = \varphi(t)$ 在区间 I 上的值域 X.

(2) 又设 $\varphi(t), \psi(t)$ 在区间 I 上连续,则 $y = \psi[\varphi^*(x)]$ 在 X 上连续.

(3) 再设 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $t \in I$ 可导且 $\varphi'(t) \neq 0$,则 $y = \psi[\varphi^*(x)]$ 在对应点 $x = \varphi(t)$ 可导且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

由复合函数求导法则及反函数求导公式可导出:$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$;若 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $t \in I$ 二阶可导,可进一步求得二阶导数,即

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

【例 2.11】 设 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ a 为常数,求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

大家网 TopSage.com

www.TopSage.com

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$，或 $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

继续对 x 求导，并注意 t 是 x 的函数，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(-\tan t)=-(\tan t)'\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{x'_t}=-\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

（四）变限积分的求导法

【定理2.6】 设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\varphi(x),\psi(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可导，当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，$a\leqslant\varphi(x),\psi(x)\leqslant b$，则 $y=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\,dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)}f(t)\,dt-\frac{d}{dx}\int_a^{\psi(x)}f(t)\,dt=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x).$$

【注】 这里 $\int_a^{\varphi(x)}f(t)\,dt$ 是 $\int_a^u f(t)\,dt$（变限积分）与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，由 $\dfrac{d}{du}\int_a^u f(t)\,dt=f(u)$ 及复合函数求导法则得结论.

【例2.12】 求 $\dfrac{d}{dx}\int_{\cos^2 x}^{2x^3}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

【解】
$$\frac{d}{dx}\int_{\cos^2 x}^{2x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{d}{dx}\int_0^{2x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{d}{dx}\left(-\int_0^{\cos^2 x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+4x^6}}(2x^3)'-\frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}}(\cos^2 x)'=\frac{6x^2}{\sqrt{1+4x^6}}+\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

（五）隐函数微分法

设有二元方程 $F(x,y)=0$（如 $x^2+y^2=1$，$x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$），若在区间 I 上存在函数 $y=y(x)$ 满足 $F(x,y(x))=0$，则称这个函数 $y=y(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 上确定的**隐函数**. 若它可导，则由 $F(x,y(x))=0$ 及复合函数求导法则可求得 y' 或 dy 所满足的方程，再解出 y' 或 dy 即可. 将 y' 的表达式或 y' 满足的方程再对 x 求导，由复合函数求导法可求得 y''.

【例2.13】 设 $e^{x+y}=y$ 确定 $y=y(x)$，求 y',y''.

【解】 注意 y 是 x 的函数，将方程两端对 x 求导得

$$e^{x+y}(1+y')=y',\text{即}\quad y'=\frac{y}{1-y}=-1+\frac{1}{1-y}.\text{（这里用方程 } e^{x+y}=y \text{ 化简）}$$

再对 x 求导得

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-1+\frac{1}{1-y}\right)'_y\frac{dy}{dx}=\frac{y}{(1-y)^3}.$$

或将 $\dfrac{dy}{dx}$ 满足的方程 $\dfrac{dy}{dx}=y\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)$ 两边对 x 求导得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y\dfrac{d^2y}{dx^2}$，再代入 $\dfrac{dy}{dx}$ 的表达式，同样可求得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y}{(1-y)^3}$.

六、分段函数求导法

分段函数是指在定义域内不同区间上有不同表达式的函数. 只有一个分界点 $x=x_0$ 的分段函数有

www.TopSage.com

如下三种类型：

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\leqslant x_0,\\ h(x), & x>x_0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}g(x), & x<x_0,\\ A, & x=x_0,\\ h(x), & x>x_0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}g(x), & x\neq x_0,\\ A, & x=x_0,\end{cases}$$

这里称 $x=x_0$ 为分界点(或连接点)．

对非分界点处的求导就是通常的非分段函数的求导．因此，讨论分段函数求导法的关键点是如何求出分界点处的导数．常用以下三种方法：

方法 1° 按定义求分界点处的导数或左右导数；

方法 2° 按求导法则分别求分界点处的左右导数；

方法 3° 分界点是连续点时，求导函数在分界点处的极限值．

(一) 按定义求分界点处的导数或左右导数

设 $f(x)=\begin{cases}g(x), & x_0-\delta<x<x_0,\\ A, & x=x_0,\\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta,\end{cases}$ 其中 $\delta>0$ 为某常数，$g(x)$ 与 $h(x)$ 在 x_0 处无定义，则可按定义求 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$：

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{h(x_0+\Delta x)-A}{\Delta x},$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{g(x_0+\Delta x)-A}{\Delta x}.$$

若上述极限均存在且相等，记为 l，则 $f'(x_0)=l$．

【注】 对于 $f(x)=\begin{cases}g(x), & x\neq x_0,\\ A, & x=x_0,\end{cases}$ 类似地可按定义求 $f'(x_0)$(如果它们存在的话)．

【例 2.14】 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的导数．

【解】
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}\quad\left(\frac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{\frac{1}{x}}-1\sim\ln\frac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{\frac{1}{x}},x\to 0\right)$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

(二) 按求导法则分别求分段函数在分界点处的左右导数

根据是：

(1) $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f'_+(x_0)$，$f'_-(x_0)$ 均存在且相等，即 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$．

(2) 若在 x_0 的右邻域 $x_0\leqslant x<x_0+\delta$ 或左邻域 $x_0-\delta<x\leqslant x_0$ 上，$f(x)=g(x)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点处有相同的右或左可导性．

若 $g(x)$ 可导，则 $f'_+(x_0)=g'_+(x_0)$ 或 $f'_-(x_0)=g'_-(x_0)$．

www.TopSage.com

根据上述结论,我们立即得到如下求分界点处导数的一个方法:

设 $f(x)=\begin{cases}g(x), & x_0-\delta<x\leqslant x_0,\\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta,\end{cases}$ $\delta>0$ 为某常数,若 $g'_-(x_0)=h'_+(x_0)\xlongequal{\text{记为}}A$,又 $g(x_0)=h(x_0)$,则 $f'(x_0)=A$.

【例 2.15】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}, & x>1,\\ \arctan x, & |x|\leqslant 1,\\ -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x+1}{2}, & x<-1,\end{cases}$ 求 $f'(1)$ 与 $f'(-1)$.

【解】 由题设知 $f(1+0)=\dfrac{\pi}{4}=f(1)$, $f(-1-0)=-\dfrac{\pi}{4}=f(-1)$,故 $f(x)$ 又可以写成

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}, & x\geqslant 1,\\ \arctan x, & |x|\leqslant 1,\\ -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x+1}{2}, & x\leqslant -1,\end{cases}\quad \text{所以}$$

$$f'_+(1)=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}\right)'\Big|_{x=1}=\frac{1}{2},\qquad f'_-(1)=(\arctan x)'\big|_{x=1}=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$f'_+(-1)=(\arctan x)'\big|_{x=-1}=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=-1}=\frac{1}{2},$$

$$f'_-(-1)=\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{x+1}{2}\right)'\Big|_{x=-1}=\frac{1}{2},$$

因此 $f'(1)=f'(-1)=\dfrac{1}{2}$.

(三) 分界点是连续点时,求导函数在分界点处的极限值

设 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $U_0(x_0,\delta)$ 内可导且 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 若存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$,则 $f'(x_0)=A$.

【证明】 按导数定义及洛必达法则可得

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to x_0}f'(x)=A.$$

【例 2.16】 设 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 已求得 $f'(x)=3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$,求 $f'(0)$.

【解法一】 按定义求: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x}=0$.

【解法二】 显然 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,又

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}\right)=0$,因此 $f'(0)=0$.

www.TopSage.com

七、高阶导数及 n 阶导数的求法

对给定的函数 $f(x)$，我们可用逐阶求导法求出高阶导数．但对某些简单的函数 $y=f(x)$ 常用如下方法求其 n 阶导数的表达式．

（一）归纳法

先依次求出 $y=f(x)$ 的前几阶导数，并由此观察出规律性，写出 $y^{(n)}$ 的公式，再用数学归纳法证明公式的正确性．

【例 2.17】 设函数 $f(x)$ 有任意阶导数且 $f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$ _____ $(n>2)$.

【分析】 将 $f'(x)=f^2(x)$ 两边求导得 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$，再求导得

$$f^{(3)}(x)=3!f^2(x)f'(x)=3!f^4(x).$$

由此可归纳证明 $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$.

（二）利用简单的初等函数的 n 阶导数公式

用归纳法易导出下列函数的 n 阶导数公式：

(1) $(e^{ax+b})^{(n)}=a^ne^{ax+b}$；

(2) $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$；

(3) $[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$；

(4) $[(ax+b)^\beta]^{(n)}=a^n\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)(ax+b)^{\beta-n}$；

(5) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^na^nn!}{(ax+b)^{n+1}}$；

(6) $[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n(n-1)!\frac{1}{(ax+b)^n}$.

特别地 $(e^x)^{(n)}=e^x$；　$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；　$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；

$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$；　$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

其中 a,b,α,β 为常数，且 $a\neq0$.

（三）分解法

通过恒等变形将要求 n 阶导数的函数分解成上述简单初等函数之和．常有以下情形：

▶1. 有理函数与无理函数的分解

【例 2.18】 求下列 $y^{(n)}$：

(Ⅰ) $y=\frac{x^n}{1-x}$；　(Ⅱ) $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

【解】 (Ⅰ) $y=\frac{x^n-1+1}{1-x}=\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{1-x}+\frac{1}{1-x}$

$$=-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)+\frac{1}{1-x},$$

www.TopSage.com

$$y^{(n)} = 0 + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

（Ⅱ）由于 $y = \dfrac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}$，于是

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= [2(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(n)} - [(1-x)^{\frac{1}{2}}]^{(n)} \\ &= 2\cdot(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n} \\ &\quad -(-1)^n\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-n} + \frac{(2n-3)!!}{2^n}(1-x)^{\frac{1}{2}-n}. \end{aligned}$$

▶2. 三角函数的分解（利用三角函数恒等式及有关公式）

【例 2.19】 设 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$，求 $y^{(n)}$.

【解】 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$，

$$y^{(n)} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)} = \frac{1}{4}\cdot 4^n\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

（四）用莱布尼兹法则求乘积的 n 阶导数

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x),$$

其中 $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，$u^{(0)}(x) = u(x)$，$v^{(0)}(x) = v(x)$.

【例 2.20】 设 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(n)}$.

【解】 用莱布尼兹法则并注意 $(x^2)^{(k)} = 0$ $(k = 3,4,\cdots)$，$(e^{2x})^{(k)} = 2^k e^{2x}$，得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)} \\ &= x^2(e^{2x})^{(n)} + n(x^2)'(e^{2x})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(x^2)''(e^{2x})^{(n-2)} \\ &= 2^n e^{2x}\left[x^2 + nx + \frac{1}{4}n(n-1)\right]. \end{aligned}$$

（五）由 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒公式的系数或幂级数展开式的系数求 $f^{(n)}(x_0)$（详见后面的泰勒公式与级数部分）

八、一元函数微分学的简单应用

（一）平面曲线的切线与法线

▶1. 用显式方程表示的平面曲线

若平面曲线 C 的方程为 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$，则曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0)$ $(y_0 = f(x_0))$ 处的切线方程为 $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$，

其中 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，在点 M_0 处的法线方程为

www.TopSage.com

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0), \quad x = x_0 \quad (f'(x_0) = 0),(\text{见图 2.4}).$$

当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ 且 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时，则 C 在 M_0 点的切线方程为 $x = x_0$（见图 2.5）.

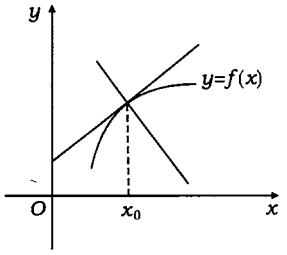


图 2.4

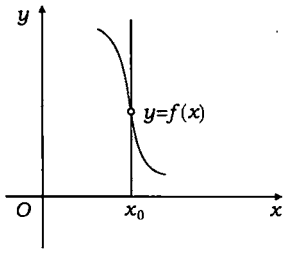


图 2.5

▶2. 用参数方程表示的平面曲线

若平面曲线 C 的参数方程为 $x = x(t), y = y(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$，则曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0)$（$(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$）处的切线方程与法线方程分别为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)}, \quad \frac{x - x_0}{-y'(t_0)} = \frac{y - y_0}{x'(t_0)},$$

其中，$(x'(t_0), y'(t_0))$ 为曲线 C 在点 M_0 的切向量，$x(t), y(t)$ 在 t_0 可导且 $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) \neq 0$.

▶3. 用极坐标方程表示的平面曲线

若平面曲线 C 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$，则曲线 C 的参数方程为

$$x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta).$$

由此可得曲线的切线的斜率，其中 $r(\theta)$ 可导.

▶4. 用隐式方程表示的平面曲线

若平面曲线 C 的隐式方程为 $f(x, y) = 0$，其中 $f(x, y)$ 有连续的一阶偏导数，则曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = 0,$$

这里 $\left(\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ 是切线的法向量，也是曲线 C 在点 M_0 的法向量.

【例 2.21】 设曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处相切，其中 a, b 是常数，则

(A) $a = 0, b = 2$.　　(B) $a = 1, b = -3$.

(C) $a = -3, b = 1$.　　(D) $a = -1, b = -1$.

【分析】 曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点 $(1, -1)$ 处的斜率

$$y' = (x^2 + ax + b)'\big|_{x=1} = 2 + a.$$

将方程 $2y = -1 + xy^3$ 对 x 求导得 $2y' = y^3 + 3xy^2y'$. 由此知，该曲线在 $(1, -1)$ 处的斜率 $y'(1)$ 为 $2y'(1) = (-1)^3 + 3y'(1)$，$y'(1) = 1$. 因这两条曲线在 $(1, -1)$ 处相切，所以在该点它们的斜率相同，即 $2 + a = 1, a = -1$. 又曲线 $y = x^2 + ax + b$ 过点 $(1, -1)$，所以 $1 + a + b = -1, b = -2 - a = -1$. 因此选 (D).

【例 2.22】 对数螺线 $r = e^\theta$ 在点 $(r, \theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为_____.

【分析】 对数螺线的参数方程为 $\begin{cases} x = r\cos\theta = e^\theta\cos\theta, \\ y = r\sin\theta = e^\theta\sin\theta, \end{cases}$ 于是它在点 $\left(e^{\frac{\pi}{2}}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 处切线的斜率为

www.TopSage.com

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1.$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $x=0, y=e^{\frac{\pi}{2}}$. 因此该切线方程为 $y=e^{\frac{\pi}{2}}-x$.

(二) 平面曲线的曲率

平面曲线的曲率与曲率圆等问题是一元函数微分学与积分学的综合应用,我们在第三章(一元函数积分概念、计算及应用)来讲述该内容(见第三章七(三)).

(三) 用导数描述某些物理量

设有变量 x 与 y 之间的函数关系 $y=f(x)$. $f'(x_0)$ 表示 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处随 x 的变化率.

实际中除了速度是路程函数的导数之外,常用的还有:

(1) 一根杆从一端 0 点算起,$[0,x]$ 段杆的质量为 $m=m(x)$,则杆在点 x 处的线密度 $\rho(x)=m'(x)$.

(2) 一根导线在$[0,t]$这段时间内通过导线横截面的电量为 $Q=Q(t)$,则导线在 t 时刻的电流强度 $I(t)=Q'(t)$.

(3) 某单位质量的物体从某确定的温度升高到温度 T 时所需的热量为 $q(T)$,则物体在温度 T 时的比热 $C(T)=q'(T)$.

(4) 某力在$[0,t]$时间内所做的功 $w=w(t)$,则 t 时刻的功率为 $w'(t)$.

常 考题型及其解题方法与技巧

题型一 有关一元函数的导数与微分概念的命题

【例 2.23】 设 $f(x_0)\neq 0$, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 可导是 $|f(x)|$ 在 x_0 可导的( )条件 .

(A) 充分非必要　　(B) 充分必要

(C) 必要非充分　　(D) 非充分非必要

【分析】 由 $f(x_0)\neq 0\Rightarrow f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$,因 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)$ 在 x_0 某邻域是保号的,即 $\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$$f(x)\begin{cases}>0, & f(x_0)>0\text{ 时},\\ <0, & f(x_0)<0\text{ 时}\end{cases}\Rightarrow \quad |x-x_0|<\delta\text{ 时},f(x)=\begin{cases}|f(x)|, & f(x_0)>0,\\ -|f(x)|, & f(x_0)<0,\end{cases}$$

因此应选(B).

【例 2.24】 设 $f(x_0)=0$,则 $f'(x_0)=0$ 是 $|f(x)|$ 在 x_0 可导的( )条件.

(A) 充分非必要　　(B) 充分必要

(C) 必要非充分　　(D) 非充分非必要

【分析】 按定义, $|f(x)|$ 在 x_0 可导,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}$ 存在,

即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}(\geqslant 0)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}(\leqslant 0)$ 均存在且相等

www.TopSage.com

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0.$$

因此应选(B).

评注 (1)这里用到了 $\lim_{x\to x_0}g(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}|g(x)|=0$.

(2)【例 2.23】与【例 2.24】给出了 $|f(x)|$ 与 $f(x)$ 可导性之间的关系.

题型二 两一元函数乘积的可导性的讨论

【例 2.25】 设 $F(x)=g(x)\varphi(x)$,$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续但不可导,又 $g'(a)$ 存在,则 $g(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导的(　　)条件.

(A) 充分必要　　(B) 充分非必要　　(C) 必要非充分　　(D) 非充分非必要

【分析】 ① 不能对 $g(x)\varphi(x)$ 用乘积的求导法则,因为 $\varphi'(a)$ 不存在;② 当 $g(a)\neq 0$ 时,若 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导,可对 $\frac{F(x)}{g(x)}$ 用商的求导法则.

(Ⅰ)若 $g(a)=0$,按定义考察

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\frac{g(x)\varphi(x)-g(a)\varphi(a)}{x-a}=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\varphi(x),$$

则 $$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\lim_{x\to a}\varphi(x)=g'(a)\varphi(a),$$

即 $F'(a)=g'(a)\varphi(a)$.

(Ⅱ)可用反证法证明:若 $F'(a)$ 存在,则必有 $g(a)=0$. 若 $g(a)\neq 0$,由商的求导法则即知 $\varphi(x)=\frac{F(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 可导,与假设条件 $\varphi(a)$ 在 $x=a$ 处不可导矛盾. 因此应选(A).

评注 设 $g(x)$ 在 $x=a$ 可导,$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续而不可导,则

$$g(x)\varphi(x) \text{ 在 } x=a \text{ 处}\begin{cases}\text{不可导}, & \text{若 } g(a)\neq 0,\\ \text{可导且导数为 } g'(a)\varphi(a), & \text{若 } g(a)=0\end{cases}$$

【例 2.26】 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点有

(A) 3个.　　(B) 2个.　　(C) 1个.　　(D) 0个.

【分析】 函数 $|x|$,$|x-1|$,$|x+1|$ 分别仅在 $x=0$,$x=1$,$x=-1$ 不可导且它们处处连续. 因此只须在这些点考察 $f(x)$ 是否可导,或用【例 2.25】的结论,或按定义考察.

方法 1° 用【例 2.25】的结论来判断. $f(x)=(x^2-x-2)|x||x-1||x+1|$,只需考察 $x=0,1,-1$ 是否可导.

考察 $x=0$,令 $g(x)=(x^2-x-2)|x^2-1|$,则 $f(x)=g(x)|x|$,$g'(0)$ 存在,$g(0)\neq 0$,$\varphi(x)=|x|$ 在 $x=0$ 连续但不可导,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

考察 $x=1$,令 $g(x)=(x^2-x-2)|x^2+x|$,$\varphi(x)=|x-1|$,则 $g'(1)$ 存在,$g(1)\neq 0$,$\varphi(x)$ 在 $x=1$ 连续但不可导,则 $f(x)=g(x)\varphi(x)$ 在 $x=1$ 不可导.

考察 $x=-1$,令 $g(x)=(x^2-x-2)|x^2-x|$,$\varphi(x)=|x+1|$,则 $g'(-1)$ 存在,$g(-1)=0$,$\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 连续但不可导,则 $f(x)=g(x)\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 可导. 因此选(B).

方法 2° 按定义考察.

www.TopSage.com

考察 $x=0$ 处，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=(x^2-x-2)|x^2-1|\dfrac{|x|}{x}$，于是

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-2\times 1\times\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=-2,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-2\times 1\times\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=2.$$

故 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

考察 $x=1$ 处，$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=(x^2-x-2)|x^2+x|\dfrac{|x-1|}{x-1}$，于是

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2\times 2\times 1=-4,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2\times 2\times(-1)=4.$$

故 $f'_+(1)\neq f'_-(1)$. 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 不可导.

考察 $x=-1$ 处，$\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=(x^2-x-2)|x^2-x|\dfrac{|x+1|}{x+1}$，于是

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=0.$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1}[(x^2-x-2)|x^2-x|]=0\times 2=0$，而且 $\dfrac{|x+1|}{x+1}$ 为有界变量，所以 $f'(-1)=0$. 因此 $f(x)$ 在 $x=-1$ 可导. 因此应选(B).

题型三　求各类一元函数的导数或微分

▶1. 求复合函数在指定点处的导数

【例 2.27】 设 $f(x+1)=af(x)$ 总成立，$f'(0)=b$，a,b 为非零常数，则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处

(A) 不可导.　　(B) 可导且 $f'(1)=a$.

(C) 可导且 $f'(1)=b$.　　(D) 可导且 $f'(1)=ab$.

【分析】 通过变量替换 $t=x+1$ 或按定义由关系式 $f(x+1)=af(x)$ 将 $f(x)$ 在 $x=1$ 的可导性与 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性联系起来.

方法 1° 令 $t=x+1$，则 $f(t)=af(t-1)$，由复合函数可导性及求导法则知，$f(t)$ 在 $t=1$ 可导且

$$f'(t)\big|_{t=1}=af'(t-1)(t-1)'\big|_{t=1}=af'(0)=ab.$$

因此，应选(D).

方法 2° 按定义考察

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab,$$

因此，应选(D).

▶2. 求初等函数的导数或微分

【例 2.28】 求下列函数的导数或微分：

(Ⅰ) 设 $y=\arcsin^{-\sqrt{x}}$，求 y'；　　(Ⅱ) 设 $y=\ln(1+3^{-x})$，求 $\mathrm{d}y$；

(Ⅲ) 设 $y=(x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(2-x)}$，求 y'.

【解】 (Ⅰ) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}}(\mathrm{e}^{-\sqrt{x}})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x})'=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\sqrt{(1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}})x}}$.

www.TopSage.com

(Ⅱ) $dy = \frac{1}{1+3^{-x}}d(1+3^{-x}) = \frac{-3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}dx = -\frac{\ln 3}{3^x+1}dx$.

(Ⅲ) 这是求连乘积的导数,用对数求导法方便. 因函数可取负值,先取绝对值后再取对数得

$$\ln|y| = \ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|3x+1| + \frac{1}{3}\ln|2-x|.$$

对 x 求导,得 $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\frac{3}{3x+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x-2}$,

因此 $y' = \sqrt[3]{(3x+1)^2(2-x)}\left[1 + \frac{2(x-1)}{3x+1} + \frac{x-1}{3(x-2)}\right]$.

▶3. 求反函数的导数

【例 2.29】 设 $y = \int_0^{2x} e^{t^2}dt + 1$,求它的反函数 $x = \varphi(y)$ 的二阶导数 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 及 $\varphi''(1)$.

【解】 由变限积分求导法先求得 $\frac{dy}{dx} = 2e^{4x^2}$,再由反函数求导法得 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}e^{-4x^2}$,最后由复合函数求导法得

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{-4x^2}\right)\frac{dx}{dy} = -4xe^{-4x^2}\cdot\frac{1}{2}e^{-4x^2} = -2xe^{-8x^2}.$$

由原方程知 $y = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \varphi''(1) = -2xe^{-8x^2}\big|_{x=0} = 0$.

▶4. 求由参数式确定的函数的导数

【例 2.30】 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\frac{dy}{dx} \xlongequal{\text{参数式求导公式}} \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}$,将该式对 x 求导,右端先对 t 求导再乘上 $\frac{dt}{dx}$ 得

$$\frac{d^2y}{dx^2} \xlongequal{\text{复合函数求导法}} \left(\frac{1}{2t}\right)'\cdot\frac{dt}{dx} \xlongequal{\text{反函数求导法}} -\frac{1}{2t^2}\cdot\frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2t^2\cdot\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

▶5. 求由方程式 $F(x,y) = 0$ 确定的一元隐函数 $y = y(x)$ 的导数与微分

【解题思路】 (1) 求隐函数的导数常用下列方法:

方法 1° 原方程两端同时对自变量(如 x)求导,方程中另一变量(如 y)是 x 的函数($y = y(x)$),由复合函数求导法导出 y' 满足的方程,然后解出 y'.

方法 2° 将方程两边同时微分,并写成 $p(x,y)dy = q(x,y)dx$ 的形式,即可求出 $\frac{dy}{dx} = \frac{q(x,y)}{p(x,y)}$.

方法 3° 代公式. 利用多元函数复合函数求导法,导出由二元方程 $F(x,y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数公式 $y'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}$,然后代此公式求出 $y'(x)$.

(2) 求隐函数的微分常用两种方法:

方法 1° 直接利用微分运算法则特别是一阶微分形式不变性求解.

方法 2° 将等式两端对 x 求导并注意 $y = y(x)$ 求出 y' 或代公式求出 y',再写出 $dy = y'dx$.

【例 2.31】 求下列隐函数的微分或导数:

(Ⅰ) 设 $y\sin x - \cos(x-y) = 0$,求 dy;

(Ⅱ) 设方程 $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctan\frac{y}{x}}$ 确定 $y = y(x)$,求 y' 与 y''.

【解】 (Ⅰ) **方法 1°** 利用一阶微分形式不变性求得

$$d(y\sin x) - d\cos(x-y) = 0,$$

大家网 TopSage.com

即　　$\sin x\mathrm{d}y + y\cos x\mathrm{d}x + \sin(x-y)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) = 0$,

整理得　　$[\sin(x-y) - \sin x]\mathrm{d}y = [y\cos x + \sin(x-y)]\mathrm{d}x$,

故　　$\mathrm{d}y = \dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}\mathrm{d}x$.

方法 2° 先求 y',再写出 $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$. 等式两端对 x 求导,注意 $y = y(x)$. 下略.

方法 3° 记 $F(x,y) = y\sin x - \cos(x-y)$,代公式得

$$\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}x = -\frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin x - \sin(x-y)}\mathrm{d}x.$$

(Ⅱ) **方法 1°** 先简化原方程,两边取对数得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \arctan\frac{y}{x}.$$

现将方程两边求微分得

$$\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2},$$

化简得　　$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$,即　$(x-y)\mathrm{d}y = (x+y)\mathrm{d}x$,

由此解得　　$y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

为求 y'',将 y' 满足的方程 $(x-y)y' = x+y$ 两边再对 x 求导,即得

$$(1-y')y' + (x-y)y'' = 1 + y' \Rightarrow \quad y'' = \frac{1+y'^2}{x-y}.$$

代入 y' 表达式即得

$$y'' = \frac{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}{x-y} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

方法 2° 注意 y 是 x 的函数,于是对 x 求导得

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}\frac{\frac{y'x-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},\quad \text{即}\quad (x+yy')\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}(y'x-y).$$

注意　$\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$,得　$y' = \dfrac{x+y}{x-y}$,

再求导得　$y'' = \dfrac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \dfrac{2(xy'-y)}{(x-y)^2}$,

将 y' 表达式代入得 $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

评注　求隐函数的导数时,求解过程中要使用方程将结果化简时应尽量化简,特别是当题目要求再计算隐函数的二阶导数时,化简往往会给后面的计算带来方便. 解题(Ⅱ)的先将方程两边取对数 $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \arctan\frac{y}{x}$,然后将化简的方程再对 x 求导,显得简化了计算.

▶6. 求分段函数的导数

【例 2.32】　设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{2x}, & x > 0, \\ (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + \cos 2x - 1, & x \leqslant 0, \end{cases}$　求 $f'(x)$ 及 $f''(0)$.

【解】　$f(x)$ 是以 $x = 0$ 为分界点的分段函数,其中左边一段的表达式包括分界点即 $x = 0$,从而

www.TopSage.com

当 $x \leqslant 0$ 时 $f'(x) = \frac{8}{3}x(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 2\sin 2x$，$x = 0$ 处是左导数 $f'_-(0) = 0$；

当 $x > 0$ 时 $f'(x) = \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)' = \frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{2x^2}$，

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{(2x\cos 2x - \sin 2x)'}{4x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-4x\sin 2x}{4x} = 0.$$

又 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 = f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 右连续 $\Rightarrow f'_+(0) = 0$. 于是 $f'(0) = 0$. 因此

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x\cos 2x - \sin 2x}{2x^2}, & x > 0, \\ \dfrac{8}{3}x(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 2\sin 2x, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

$f'(x)$ 也是分段函数，$x = 0$ 是分界点. 为求 $f''(0)$，要分别求 $f''_+(0)$ 与 $f''_-(0)$. 同前可求

$$f''_-(0) = \left[\frac{8}{3}x(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 2\sin 2x\right]'\Big|_{x=0}$$

$$= \left[\frac{8}{3}(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 4\cos 2x\right]\Big|_{x=0} = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}.$$

按定义求 $f''_+(0)$，则有

$$f''_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-4x\sin 2x}{6x^2} = -\frac{4}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{\sin 2x}{2x} = -\frac{4}{3}.$$

因为 $f''_+(0) = f''_-(0) = -\frac{4}{3}$，所以 $f''(0) = -\frac{4}{3}$.

评注 求分段函数在各区间内的导数与其他函数导数的求法类似，但在分界点处的导数要用导数的定义来求解或求左右导数，或在连续的条件下求导函数的极限.

【例 2.33】 确定常数 a 和 b，使得函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2ae^x, & x < 0, \\ 9\arctan x + 2b(x-1)^3, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 处处可导.

【分析】 这是分段函数，当 $x > 0$ 与 $x < 0$ 时分别与某初等函数相等，是可导的，关键是确定 a 和 b，使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导. 对这类问题是根据：① 函数在某点可导则在该点连续；② 函数在某些点处可导，则在该点处左、右导数相等这两个性质，建立两个待定常数间的两个关系式，然后解出来.

【解】 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 由表达式知，$f(x)$ 在 $x = 0$ 右连续. 于是，$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (\sin x + 2ae^x) = 2a = f(0) \Rightarrow 2a = -2b$，即 $a + b = 0$.

又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导 $\Leftrightarrow f'_+(0) = f'_-(0)$. 在 $a + b = 0$ 条件下，$f(x)$ 可改写成

$$f(x) = \begin{cases} 9\arctan x + 2b(x-1)^3, & x \geqslant 0, \\ \sin x + 2ae^x, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

于是 $$f'_+(0) = [9\arctan x + 2b(x-1)^3]'\big|_{x=0} = \left[\frac{9}{1+x^2} + 6b(x-1)^2\right]\Big|_{x=0} = 9 + 6b,$$

$$f'_-(0) = (\sin x + 2ae^x)'\big|_{x=0} = 1 + 2a.$$

因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导 $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0, \\ 9 + 6b = 1 + 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$

故仅当 $a = 1, b = -1$ 时 $f(x)$ 处处可导.

www.TopSage.com

题型四　求变限积分的导数

▶1. 求仅积分限含参变量 x 的变限积分的导数

【例 2.34】 设 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\,dt$，$f(x)$ 连续，则 $F'(x)=$

(A) $\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$.　　(B) $f(\ln x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

(C) $\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$.　　(D) $f(\ln x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$.

【分析】 这是上、下限均为已知函数的变限积分，直接由变限积分求导法得

$$F'(x)=f(\ln x)(\ln x)'-f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right).$$

故应选(A).

▶2. 求被积函数也含有参变量 x 的变限积分的导数

【例 2.35】 设 $f(x)=\int_0^x e^{tx-t^2}\,dt$，求 $f'(x)$.

【分析】 这里被积函数也含参变量 x，要设法转化为被积函数不含参变量 x 的情形. 注意相对于积分变量 t，x 是常量.

先将被积函数作恒等变形，即配方 $tx-t^2=-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}$，于是被积函数中含变量 x 的因子 $e^{\frac{x^2}{4}}$ 被分离出来可以提到积分号外，最后再作变量替换 $s=t-\frac{x}{2}$.

【解】
$$f(x)=\int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2+\frac{x^2}{4}}\,dt=e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,dt$$

$$\xrightarrow{s=t-\frac{x}{2}} e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} e^{-s^2}\,ds=2e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-s^2}\,ds,$$

$$\Rightarrow\quad f'(x)=2\cdot\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-s^2}\,ds+2e^{\frac{x^2}{4}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}=xe^{\frac{x^2}{4}}\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-s^2}\,ds+1.$$

▶3. 求被积函数还是变限积分的导数

【例 2.36】 求 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(\int_0^{\tan^2 y}\frac{\sin t}{t}dt\right)dy}{x^3}$.

【解】 这是求 $\frac{0}{0}$ 型的极限. 用洛必达法则时就要求变限积分的导数. 这里被积函数 $f(x)=\int_0^{\tan^2 x}\frac{\sin t}{t}dt$ 还是变限积分. 注意到这一点就容易求得

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(y)\,dy}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan^2 x}\frac{\sin t}{t}dt}{3x^2}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin(\tan^2 x)}{\tan^2 x}2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right]\Big/6x=\frac{1}{3}.$$

题型五　一元函数求导与求微分的综合题

【例 2.37】 已知 $y=\int_1^{1+\sin t}\left(1+e^{\frac{1}{u}}\right)du$，　①

www.TopSage.com

其中 $t = t(x)$ 由 $\begin{cases} x = \cos 2v, \\ t = \sin v \end{cases}$ ②

确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

【分析】 由①式给出 $y = y(t)$，由参数式②给出 $t = t(x)$. 于是 $y(t)$ 与 $t = t(x)$ 复合的结果 y 是 x 的函数，由复合函数求导法可得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}$，其中求 $\dfrac{dy}{dt}$ 是变限积分求导，求 $\dfrac{dt}{dx}$ 是参数式求导.

【解】 由①式得 $\dfrac{dy}{dt} = \left(1 + e^{\frac{1}{1+\sin t}}\right)(1 + \sin t)' = \left(1 + e^{\frac{1}{1+\sin t}}\right)\cos t$.

由②得 $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{t'_v}{x'_v} = \dfrac{\cos v}{-2\sin 2v} = -\dfrac{1}{4\sin v} = -\dfrac{1}{4t}$.

因此， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{\cos t}{4t}\left(1 + e^{\frac{1}{1+\sin t}}\right)$.

【例 2.38】 设 $y = y(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

【分析】 这里 y 与 x 的函数关系由参数方程 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 给出，且 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. 其中 $x = x(t)$ 是显式表示，易直接计算 x'_t，而 $y = y(t)$ 由 y 与 t 的方程式确定，由隐函数求导法求出 y'_t .

【解】 由方程组的第一个方程式对 t 求导得 $x'_t = 6t + 2 = 2(3t + 1)$.

将第二个方程对 t 求导并注意 $y = y(t)$ 得 $y'_t e^y \sin t + e^y \cos t - y'_t = 0$，

整理并由方程式化简得 $y'_t = \dfrac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t} = \dfrac{e^y \cos t}{2 - y}$. $\qquad (**)$

因此，有 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{e^y \cos t}{2(2 - y)(3t + 1)}$.

于是，有 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{e^y \cos t}{2(2 - y)(3t + 1)}\right]\dfrac{1}{x'_t}$

$$= \frac{1}{4}\frac{e^y(y'_t \cos t - \sin t)(2 - y)(3t + 1) - e^y \cos t[-y'(3t + 1) + 3(2 - y)]}{(3t + 1)^3(2 - y)^2}.$$

注意：由(*)式得 $y|_{t=0} = 1$，由(**)式得 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = e$. 在上式中令 $t = 0$ 得

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \frac{2e^2 - 3e}{4}.$$

题型六 求一元函数的 n 阶导数

▶1. 求 $y^{(n)}$

【例 2.39】 设 $y = e^x \sin x$，求 $y^{(n)}$.

【分析】 逐次求导求出 y'，y''，…，从中总结出规律并依此写出 $y^{(n)}$ 表达式，然后用归纳法证明公式正确.

【解】 逐次求导，得

www.TopSage.com

$$y' = e^x(\sin x + \cos x) = 2^{\frac{1}{2}}e^x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\frac{1}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}e^x 2^{\frac{1}{2}}\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 2^{\frac{1}{2}\times 2}e^x\sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

$$y^{(3)} = 2^{\frac{2}{2}}e^x\left[\sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right)\right] = 2^{\frac{3}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right),$$

观察其规律性得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right). \qquad (*)$$

易用归纳法证明,对任意自然数 n,(*) 式成立.

【例 2.40】 设 $y = \ln(3 + 7x - 6x^2)$,求 $y^{(n)}$.

【分析】 利用对数函数性质将函数 y 分解为形如 $\ln(ax + b)$ 的对数函数之和,再用 $[\ln(ax + b)]^{(n)}$ 的公式即可得结果.

【解】 先分解

$$y = \ln(3 - 2x)(1 + 3x) = \ln(3 - 2x) + \ln(1 + 3x)$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n)} = [\ln(3 - 2x)]^{(n)} + [\ln(1 + 3x)]^{(n)}.$$

然后利用 $[\ln(ax + b)]^{(n)}$ 的公式得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(-2)^n(n-1)!}{(3-2x)^n} + \frac{(-1)^{n-1}3^n(n-1)!}{(1+3x)^n}$$

$$= \frac{-2^n(n-1)!}{(3-2x)^n} + \frac{(-1)^{n-1}3^n(n-1)!}{(1+3x)^n}.$$

►2. 求 $y^{(n)}(x_0)$

【解题思路】 给定 $y = y(x)$,若能求出 $y^{(n)}(x)$,自然也就求出了 $y^{(n)}(x_0)$. 若求不出 $y^{(n)}(x)$ 的表达式,但能求出 $y(x)$ 在 $x = x_0$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式或幂级数展开式,由 $(x - x_0)^n$ 项的系数可求得 $y^{(n)}(x_0)$. (详见第五章三(一)及第十一章【例 11.21】).

题型七 一元分段函数的可导性与导函数的连续性等命题的讨论

【解题思路】 讨论分段函数的可导性(或可微性),导函数的连续性等问题时,对非分界点通常按可导性(可微性)或连续性运算法则. 在分界点处通常按定义来讨论.

【例 2.41】 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}(1 - \cos x), & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

【分析】 我们可先讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的可导性. 因为当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导或 $f'_+(0)$,$f'_-(0)$ 均存在但不等时,均可得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 由 $f(x)$ 分段定义的具体形式,我们分别按定义求出 $f'_+(0)$,$f'_-(0)$ 来讨论 $f'(0)$ 是否存在.

www.TopSage.com

【解】 按定义

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x^2-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\sin x^2}{2}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2(\sin x-x)}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x}=0,$$

因此，$f'_+(0)=f'_-(0)=0$. 因此$f(x)$在$x=0$可导，因而也必连续.

【例2.42】 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有一阶连续导数，且$f(0)=0$并存在$f''(0)$. 若

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$$

求$F'(x)$，并证明$F'(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续.

【求解与证明】 首先求$F'(x)$. 当$x\neq0$时，由求导法则易求$F'(x)$，而$F'(0)$需按定义计算.

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}\overset{f(x)\text{在}x=0\text{处二阶可导}}{=\!=\!=}\frac{1}{2}f''(0),$$

于是

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}, & x\neq0,\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0.\end{cases}$$

然后讨论$F'(x)$的连续性，当$x\neq0$时由连续性的运算法则得到$F'(x)$连续，当$x=0$时可按定义证明$\lim\limits_{x\to0}F'(x)=F'(0)$，这是$\frac{0}{0}$型极限问题，可用洛必达法则.

$$\lim_{x\to0}F'(x)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{[f'(x)x-f'(0)x]-[f(x)-f'(0)x]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}$$

$$=f''(0)-\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$

$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=F'(0),$$

即$F'(x)$在$x=0$也连续. 因此，$F'(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续.

评注 ① 因为在本题中没有假设$f(x)$在$x=0$邻域二阶可导，所以不能再用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

② 求$F'(0)$并证明$F'(x)$在$x=0$连续的另一种方法是：

因为$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=F(0)$，即$F(x)$在$x=0$连续，同前求得当$x\neq0$时$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，从而当$x\neq0$时$F'(x)$连续. 又因$\lim\limits_{x\to0}F'(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)$，故$F'(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$且$F'(x)$在$x=0$连续，因此$F'(x)$处处连续.

www.TopSage.com

题型八　一元函数导数概念的应用

▶1. 求平面曲线的切线与法线

【例 2.43】　给定曲线 $y = x^2 + 5x + 4$,

(Ⅰ) 确定 b,使直线 $y = -\frac{1}{3}x + b$ 为曲线的法线;

(Ⅱ) 求过点(0,3) 的切线.

【分析】　关键是写出该曲线上任意点(x_0,y_0)处的切线方程$y = y_0 + (2x_0 + 5)(x - x_0)$,或不垂直于 x 轴的法线方程 $y = y_0 - \frac{1}{2x_0 + 5}(x - x_0)$,其中 $y_0 = x_0^2 + 5x_0 + 4$,再根据题中的条件来确定 x_0 .

【解】　(Ⅰ) 曲线过任意点$(x_0,y_0)(y_0 = x_0^2 + 5x_0 + 4)$不垂直于 x 轴的法线方程是

$$y = -\frac{1}{2x_0 + 5}(x - x_0) + y_0 .$$

要使 $y = -\frac{1}{3}x + b$ 为此曲线的法线,则 $-\frac{1}{2x_0 + 5} = -\frac{1}{3}$,$x_0^2 + 5x_0 + 4 + \frac{x_0}{2x_0 + 5} = b$. 解得 $x_0 = -1$,$b = -\frac{1}{3}$.

(Ⅱ) 曲线上任意点$(x_0,y_0)(y_0 = x_0^2 + 5x_0 + 4)$处的切线方程是

$$y = y_0 + (2x_0 + 5)(x - x_0), \tag{2.6}$$

点(0,3) 不在给定的曲线上,在(2.6) 式中令 $x = 0$,$y = 3$ 得 $x_0^2 = 1$,$x_0 = \pm 1$,即曲线上点(1,10),(-1,0) 处的切线 $y = 7x + 3$,$y = 3x + 3$,通过点(0,3),也就是过点(0,3) 的切线方程是 $y = 7x + 3$ 与 $y = 3x + 3$.

▶2. 物理量的表达

【例 2.44】　设有长为 12cm 的非均匀杆 AB,AM 部分的质量与动点 M 到端点 A 的距离 x 的平方成正比,杆的全部质量为 360(g),则杆的质量表达式 $m(x) =$ _____,杆在任一点 M 处的线密度 $\rho(x) =$ _____.

【分析】　按题意,$m(x) = kx^2$,令 $x = 12$,得 $360 = k \cdot 12^2$,则 $k = \frac{5}{2}$,从而 $m(x) = \frac{5}{2}x^2$. 在任一点 M 处的线密度为 $\rho(x) = \frac{dm}{dx} = 5x$.

题型训练

一、选择题

1. 设有多项式 $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$,又设 $x = x_0$ 是它的最大实根,则 $P'(x_0)$ 满足

(A)　$P'(x_0) > 0$.　　(B)　$P'(x_0) < 0$.　　(C)　$P'(x_0) \leqslant 0$.　　(D)　$P'(x_0) \geqslant 0$.

2. 设 $f(x) = 3x^2 + x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n =$

(A)　0.　　(B)　1.　　(C)　2.　　(D)　3.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x > 0, \\ ax + b, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导,则 a,b 满足

www.TopSage.com

(A) $a=0,b=0$.　　(B) $a=1,b=1$.

(C) a 为 $\forall$ 常数,$b=0$.　　(D) a 为 $\forall$ 常数,$b=1$.

4. 设 $f'(a)>0$,则 $\exists\delta>0$,有

(A) $f(x)\geqslant f(a)(x\in(a-\delta,a+\delta))$.

(B) $f(x)\leqslant f(a)(x\in(a-\delta,a+\delta))$.

(C) $f(x)>f(a)(x\in(a,a+\delta)),f(x)<f(a)(x\in(a-\delta,a))$.

(D) $f(x)<f(a)(x\in(a,a+\delta)),f(x)>f(a)(x\in(a-\delta,a))$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}, & x<0,\end{cases}$ 则

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(B) $f'(0)$ 存在.

(C) $f'(0)$ 不 $\exists$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处不 $\exists$ 切线.

(D) $f'(0)$ 不 $\exists$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处有切线.

二、填空题

1. 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$ 且 $f'(x)=\arctan x^2$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ _____.

2. 设 $F(x)=\int_{x^2}^{e^{-x}}f(t)dt$,其中 $f(x)$ 连续,则 $F'(x)$ _____.

3. 设 $f(x)$ 有任意阶导数且 $f'(x)=f^3(x)$,则 $f^{(n)}(x)=$ _____.

4. 设 $y=\ln(1+x^2)$,则 $y^{(5)}(0)=$ _____.　5. 设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ _____.

6. 曲线 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=t^3\end{cases}$ 上对应点 $t=2$ 处的切线方程为_____.

7. $r=a(1+\cos\theta)$ 在点 $(r,\theta)=(2a,0),\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right),(0,\pi)$ 处的切线方程分别为_____.

8. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $M_0(2a,\sqrt{3}b)$ 处的法线方程为_____.

9. 设 $f'(0)=1,f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}=$ _____.

10. 设 k 为常数,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k-1\right]=$ _____.

三、计算题

1. 设 $y=e^{\sin^2 x}+\sqrt{\cos x}\,2^{\sqrt{\cos x}}$,求 $\dfrac{dy}{dx}$.　　2. 设 $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

3. 设 $z=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}$,求 dz.

4. 设 $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$,其中 $a>b>0$,求 y'.

5. 设 $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 其中 $f(t)$ 三阶可导,且 $f''(t)\neq 0$,求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2},\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

6. 设 $\begin{cases}x=\cos t^2,\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}du,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值.

www.TopSage.com

7. 由方程 $x^y = y^x$ 确定 $x = x(y)$，求 $\dfrac{dx}{dy}$.

8. 方程 $y^{-x}e^y = 1$ 确定 $y = y(x)$，求 $y''(x)$.

9. 设 $2x - \tan(x - y) = \int_0^{x-y} \sec^2 t\,dt$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

10. 把 y 看作自变量，x 为因变量，变换方程 $\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = x$.

11. 设 $x \in [0,a]$ 时 $f(x)$ 连续且 $f(x) > 0$，又满足 $f(x) = \sqrt{\int_0^{x^2} f(\sqrt{t})\,dt}$，求 $f(x)$.

12. 设 $f''(x)$ 存在，求 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$.

13. 设 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$，$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)\,dt$，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

www.TopSage.com

大家网
TopSage.com

第三章　一元函数积分概念、计算及应用

内容概要与重难点提示

积分学是微积分的主要部分之一，在高等数学中占有重要地位．而一元函数积分学是积分学的基础，重积分、曲线积分与曲面积分的概念与基本性质都与定积分相似，而其计算又最终都要化为定积分．

一元函数积分学包括不定积分与定积分两部分．定积分在几何、物理、工程技术、经济等诸多领域均有广泛的应用，是一元积分的核心．从某种意义上讲，不定积分处于辅助地位，它的重要性就在于为定积分的计算提供了一种简便快捷的工具．不定积分实质上也是变限的定积分．

在积分的计算中，分项积分法，分段积分法，换元积分法与分部积分法是最基本的方法．按函数类的积分法中有理函数积分法则是最基本的．其他一些特殊函数类（如三角函数有理式，某些无理式）的积分法则是通过特定的换元法转化为有理函数的积分．

牛顿－莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式也称为微积分基本公式，它是定积分，乃至于整个微积分学的重要结果之一．之所以称为基本公式就是由于它联系了定积分与原函数、不定积分，并通过原函数联系了微分学．从实用的角度看，它为使用原函数计算定积分提供了理论根据．连续函数的变限积分的性质表明连续函数一定存在原函数．

反常积分（广义积分）是变限积分的极限，因而由定积分的计算法则加上极限运算法则就得到相应的反常积分（广义积分）的计算方法．

积分学的应用是它的概念，也就是分割、近似、求和、取极限这个方法的应用，其中的关键步骤是分割与近似，因而在应用中“四步法”常常被微元法所代替．一元函数部分，要求掌握用定积分表达和计算一些几何量和物理量（各种形式的平面图形的面积、平面曲线的弧长、曲率、曲率圆与曲率半径、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力作功、引力、压力、质心与形心等）及函数平均值．

考核知识要点讲解

一、一元函数积分的概念、性质与基本定理

（一）原函数与不定积分的概念与基本性质

▶1. 原函数与不定积分的定义

若 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 在区间 I 上成立，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 中的一个**原函数**．$f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分**，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$．其中 $\int$ 为积分号，x 为积分变量，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式．

▶2. 原函数与不定积分的关系

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中 C 为任意常数，称为积分常数．

▶3. 求不定积分与求微分（导数）的关系 —— 互为逆运算

（1）已知与未知相反　$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，已知 $F(x)$ 求 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 是微分运算；已知 $f(x)\mathrm{d}x$ 求 $F(x)$ 使得 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 是积分运算．

(2) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$;

$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

▶4. 不定积分的简单性质

设 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 I 上存在原函数,则在区间 I 上

$$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0 \text{ 为常数}).$$

▶5. 原函数的存在性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续,则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数. $\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数,其中 $x_0 \in I$ 为某一定点(参见本章【例 3.34】).

若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点,则 $f(x)$ 在 I 上不存在原函数(参见本章题型四).

▶6. 原函数的几何意义与力学意义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则由曲线 $y = f(x)$,x 轴及直线 $x = a$,$x = x$ 围成的曲边梯形的面积函数(指代数和——x 轴上方取正号,下方取负号)是 $f(x)$ 的一个原函数. 若 x 为时间变量,$f(x)$ 为直线运动的物体的速度函数,则 $f(x)$ 的原函数就是路程函数.

▶7. 初等函数的原函数

初等函数在定义域区间上连续,因而一定存在原函数,但它的原函数不一定是初等函数. 如:

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x,\ \int \sin(x^2)\mathrm{d}x,\ \int \cos(x^2)\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$

等均积不出来,即被积函数存在原函数,但原函数不是初等函数.

【例 3.1】 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$ 的原函数是_____.

【分析】 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$,那么 $f(x)$ 应具有形式 $-\cos x + C_1$,所以 $f(x)$ 的原函数应为 $-\sin x + C_1 x + C_2$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

(二) 定积分的概念与基本性质

▶1. 定积分的定义

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,其中 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在定积分,也称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

关于定积分的概念提醒读者注意以下几点:

(1) 定积分要求积分区间有限,被积函数有界;

(2) 定积分是积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限,构造积分和时,分割与点 ξ_i 的选取都是任意的,所谓取极限是指当 $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \to 0$ 时的极限;

(3) 定积分的值与积分变量的选取无关,只与被积函数及积分区间有关,所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

▶2. 定积分的几何意义与力学意义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示界于 x 轴,曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a$,$x = b$ 之间各部分面积的代数和,在 x 轴上方取正号,在 x 轴下方取负号. 若 x 为时间变量,$f(x)$ 为作直线运动的

www.TopSage.com

物体的速度函数，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$就是物体从时刻a到b所走过的路程.

▶3. 函数的可积性

可积的必要条件：$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

可积的充分条件：(1) $f(x)$在$[a,b]$上连续；(2) $f(x)$在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点；(3) $f(x)$在$[a,b]$上单调. 以上函数类在$[a,b]$上可积.

▶4. 不定积分与变限定积分的关系

设$f(x)$在区间I上连续，则$\int f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t + C$，其中$x_0 \in I$为某定值.

▶5. 定积分的基本性质

当$b < a$时，约定$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$. 特别地，当$a = b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

定积分有如下基本性质：

设函数$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上可积，则

(1) **线性性质** $\int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，其中$k_1, k_2$为任意常数.

(2) **对区间的可加性质** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (c可以在$[a,b]$之内，也可以在$[a,b]$之外，$f(x)$在大的区间上可积).

(3) **比较定理** 设$a < b$，$f(x) \leqslant g(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

若又有$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x) \not\equiv g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

特别地，$m \underset{\neq}{\leqslant} f(x) \underset{\neq}{\leqslant} M$，则$m(b-a) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < M(b-a)$. (3.1)

(4) **积分中值定理** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在(a,b)上至少存在一点ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{3.2}$$

(5) **连续非负函数的积分性质** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续；非负，若$[\alpha,\beta] \subset [a,b]$，则有

$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，且$\int_a^x f(x)\mathrm{d}t$在$[a,b]$是不减的；

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，非负且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则$f(x) \equiv 0$ $(x \in [a,b])$.

(6) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，若在$[a,b]$的任意子区间$[\alpha,\beta]$上$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = 0$，则

$f(x) \equiv 0$ $(x \in [a,b])$.

【例 3.2】 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(b)$. 求证：在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使$f'(\xi) = 0$.

【证明】 因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，由积分中值定理可知，在(a,b)内至少存在一点c，使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这就说明$f(c) = f(b)$，而根据假设：$f(x)$在$[c,b]$上连续，在(c,b)内可导，故由罗尔定理知，在(c,b)内至少存在一点ξ，使$f'(\xi) = 0$，其中$\xi \in (c,b) \subset (a,b)$.

www.TopSage.com

(三) 基本定理

▶1. 变上限积分

【定理 3.1】 设 $x_0 \in [a,b]$ 为任意固定的一点,则有如下结论:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则变上限积分 $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

【注】 该定理的证明见【例 3.55】.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则变上限积分 $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数,且

$$\Phi'(x) = f(x),\ x \in [a,b]. \tag{3.3}$$

如果积分下限是变动的,例如 $\Phi(x) = \int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{b}^{x} f(t)\mathrm{d}t$,则 $\Phi'(x) = -f(x)$.

一般地,设 $F(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$,则有

$$F'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x), \tag{3.4}$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 在某区间 I 上可导,且 $a \leqslant \varphi(x), \psi(x) \leqslant b$ $(x \in I)$.

▶2. 牛顿 - 莱布尼兹公式

【定理 3.2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任意一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{3.5}$$

这就是**牛顿 - 莱布尼兹公式**.

【注】 关于(3.3)与(3.5)的重要性这里再强调两点:第一,根据定义计算定积分是很困难的,牛顿 - 莱布尼兹公式把求定积分化为求原函数的改变量,从而为连续函数的定积分的计算提供了一种简捷的方法;第二,(3.3)式表明 $\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数,这就说明连续函数的原函数一定存在.

牛顿 - 莱布尼兹公式有如下推广:

【推论 1】 设 $f(x)$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

【证明】 此时必有 $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$. 因为

$$F'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim_{x \to a+0} F'(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a),$$

类似可证 $F'_-(b) = f(b)$. 因此 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

【推论 2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数,又

$$F(a+0) = \lim_{x \to a+0} F(x),\ F(b-0) = \lim_{x \to b-0} F(x)$$

都存在,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a+0}^{b-0} = F(b-0) - F(a+0).$

【证明】 只需引入辅助函数 $G(x) = \begin{cases} F(a+0), & x = a, \\ F(x), & a < x < b, \\ F(b-0), & x = b, \end{cases}$ 则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且 $G'(x) = F'(x) = f(x)$ $(x \in (a,b))$,因此由【推论 1】即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a) = F(b-0) - F(a+0).$$

www.TopSage.com

【推论3】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 除去 $c \in (a,b)$ 连续，$F(c-0)$ 与 $F(c+0)$ 存在，且 $F'(x)=f(x)$，$x \in (a,b)$，$x \neq c$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{c-0} + F(x)\Big|_{c+0}^b = F(b) - F(c+0) + F(c-0) - F(a).$$

【例3.3】 以下计算是否正确？为什么？

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

【分析】 若求出 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \neq 0)$，则知积分应是负值．事实上

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\arctan x\Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

本题中所给出的计算是错误的．因为 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 不连续，不能直接在 $[-1,1]$ 上应用牛顿-莱布尼兹公式．但我们可以如下计算：

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0-} + \arctan\frac{1}{x}\Big|_{0+}^1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

（四）奇偶函数与周期函数的积分性质

▶1. 对称区间上奇偶函数的定积分

对于对称区间上的定积分，首先要观察被积函数的奇偶性，这是因为有如下结论：

【定理3.3】 假定 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ $(a>0)$ 为可积函数或连续函数，则有

(1) $$\begin{cases}\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时},\\ \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时}.\end{cases}$$

(2) $$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \begin{cases}\text{在 } [-a,a] \text{ 为奇函数}, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时},\\ \text{在 } [-a,a] \text{ 为偶函数}, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时}.\end{cases}$$

假定 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 为连续函数，则

(3) 当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 的全体原函数均为偶函数；当 $f(x)$ 为偶函数时，$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 只有唯一原函数为奇函数即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$．

【证明】 证(2)．设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 为偶函数，记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，要证 $F(x)$ 在 $[-a,a]$ 为奇函数，即证 $F(-x)=-F(x)$ 或 $F(x)+F(-x)=0$，$(x \in [-a,a])$．由

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-s} -\int_0^x f(-s)\mathrm{d}s = -\int_0^x f(s)\mathrm{d}s = -F(x) \quad (x \in [-a,a]),$$

可知 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数．

当 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 连续且为偶函数时，也可通过求导数证 $F(x)+F(-x)=0(x \in [-a,a])$．

因 $[F(x)+F(-x)]' = f(x)-f(-x)=0(x \in [-a,a])$，故 $F(x)+F(-x)$ 在 $[-a,a]$ 为常数，又 $[F(x)+F(-x)]_{x=0}=0$，则有 $F(x)+F(-x)=0(x \in [-a,a])$，即 $F(x)$ 在 $[-a,a]$ 为奇函数．

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

另一结论类似可证.

证(3). $\int f(x)\,dx = \int_0^x f(t)\,dt + C$,其中 C 为 $\forall$ 常数.

当 $f(x)$ 为奇函数时,$\int_0^x f(t)\,dt$ 为偶函数,$\forall$ 常数 C 也是偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 的全体原函数 $\int_0^x f(t)\,dt + C$ 为偶函数.

当 $f(x)$ 为偶函数时,$\int_0^x f(t)\,dt$ 为奇函数,$\forall$ 常数 $C \neq 0$ 时为偶函数 $\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt + C$ 既非奇函数也非偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 只有唯一的一个原函数即 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是奇函数.

▶2. 周期函数的积分

【定理 3.4】 假定函数 $f(x)$ 以 T 为周期,即对于任意的实数 x 有 $f(x+T) = f(x)$,在 $[0,T]$ 上 $f(x)$ 可积(或连续),那么

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$,即在任何长度为 T 的区间上的积分值是相等的;

(2) $\int_0^x f(t)\,dt$ 以 T 为周期的充要条件是 $\int_0^T f(t)\,dt = 0$;

(3) 设连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期,则 $f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充要条件是

$$\int_0^T f(t)\,dt = 0.$$

【证明】 (1) 由于 $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$,

在上式右端最后一个积分中,令 $x = T + t$,则有

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(T+t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = -\int_a^0 f(x)\,dx,$$

它与右端第一个积分的和正好为零,所以等式成立.

【注】 若 $f(x)$ 连续,我们也可通过求导数,证明 $\Phi(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$ 为常数来证明该结论.

(2) $\int_0^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{x+T} f(t)\,dt \xlongequal{\text{由(1)}} \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt.$

由此得 $\int_0^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$(即 $\int_0^x f(t)\,dt$ 以 T 为周期) $\Leftrightarrow \int_0^T f(t)\,dt = 0.$

(3) 由结论(2)及 $\int f(x)\,dx = \int_0^x f(t)\,dt + C$ 立即得结论(3).

【例 3.4】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\,dx = A$,则 $I = \int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\,dx =$ _____.

【分析】 由于 $f(|\cos x|)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,以 π 为周期,且为偶函数,则根据周期函数与偶函数的积分性质得

$$I = 2\int_0^{\pi} f(|\cos x|)\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\,dx = 2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\,dx = 4A.$$

【例 3.5】 n 为自然数,证明:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

www.TopSage.com

【证明】 $\int_0^{2\pi}\cos^n x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\sin^n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x \xlongequal{t=x+\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t$

$= \int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x$ （$\sin^n x$ 以 2π 为周期），

当 n 为奇数时，$\int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x \xlongequal{\text{周期函数积分性质}} \int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x \xlongequal{\text{奇函数积分性质}} 0$；

当 n 为偶数时，$\int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x \xlongequal{\sin^n x\text{ 为偶函数}} 2\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x$

$\xlongequal{\sin^n x\text{ 以 }\pi\text{ 为周期}} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

（五）利用定积分求某些 n 项和式数列的极限

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任意积分和均以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为极限，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，其中 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$.

我们给出的问题是：求某和式的极限，并没指出它是哪个函数的积分和，而我们的任务是通过对和式结构的分析，指出该和式是哪个函数在哪个区间上的积分和：包括被积函数、积分区间及区间的分点，点 ξ_i 的取法 .

常见的情形有：

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}$；

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}$.

若某类和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 能表成 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$，其中 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上已知的连续函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x .$$

【注】 有关例子可参见第一章【例 1.35】与【例 1.36】.

二、基本积分表与积分法则

（一）基本积分表

对应于基本初等函数的导数公式，就有相应的基本积分公式：

(1) $\int 0\cdot\mathrm{d}x = C$；

(2) $\int x^k\mathrm{d}x = \frac{1}{1+k}x^{k+1}+C$ $(k\neq -1)$；

(3) $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$；

(4) $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}+C$，$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x+C$；

(5) $\int\cos x\mathrm{d}x = \sin x+C$，$\int\sin x\mathrm{d}x = -\cos x+C$；

www.TopSage.com

(6) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 x dx=\tan x+C$，$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\int\csc^2 x dx=-\cot x+C$；

(7) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$，$\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$.

基本积分表的补充：

(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$；

(9) $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

【注】 基本积分表在积分计算的作用是，通过积分计算法则，把所求积分转化为积分表中的情形.

（二）积分法则

最基本的积分方法是分项积分法、分段积分法、换元积分法和分部积分法. 而换元积分法对不定积分又分第一换元积分法（凑微分法）与第二换元积分法. 当被积函数或原函数分段表示时要用分段积分法.

▶1. 分项积分法

我们常把一个复杂的函数分解成几个简单的函数之和：$f(x)=k_1g_1(x)+k_2g_2(x)$，若右端的积分会求，则应用法则$\int f(x)dx=k_1\int g_1(x)dx+k_2\int g_2(x)dx$，其中$k_1,k_2$是不全为零的任意常数，就可求出积分$\int f(x)dx$，这就是分项积分法. 对定积分也有类似的分项积分法.

【例3.6】 求下列不定积分：

（Ⅰ）$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$；（Ⅱ）$\int\frac{1}{x^4(1+x^2)}dx$；（Ⅲ）$\int\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}dx$.

【解】 （Ⅰ）利用三角函数的倍角公式：$1+\cos 2x=2\cos^2 x$进行分项得

$$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}x+C.$$

（Ⅱ）利用加减同一项进行拆项得

$$\int\frac{dx}{x^4(1+x^2)}=\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^4(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^4}-\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}dx$$

$$=\int\frac{dx}{x^4}-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C.$$

（Ⅲ）将被积函数的分母有理化后得

$$J\overset{记}{=\!=}\int\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{x(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x-1})^2}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x\sqrt{x-1}dx.$$

再将第二项拆项得

$$J=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int(x-1)^{\frac{3}{2}}dx+\int(x-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

▶2. 分段积分法

分段函数的定积分要分段进行计算，这里重要的是搞清积分限与分段函数的分界点之间的位置关系，以便对定积分进行正确分段.

www.TopSage.com

被积函数中含有绝对值时，也可以看成分段函数，这是因为正数与负数的绝对值是以不同的方式定义的，0 就是其分界点.

【例 3.7】 计算下列定积分：

(Ⅰ) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\min\left\{\frac{1}{2},\cos x\right\}\mathrm{d}x$；　(Ⅱ) $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0.\end{cases}$

【解】 (Ⅰ) 由于 $\min\left\{\frac{1}{2},\cos x\right\}$ 为偶函数，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的分界点为 $\frac{\pi}{3}$，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\min\left\{\frac{1}{2},\cos x\right\}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\min\left\{\frac{1}{2},\cos x\right\}\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\frac{1}{2},\cos x\right\}\mathrm{d}x$$

$$=0+2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right)=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{3}+2-\sqrt{3}.$$

(Ⅱ) 由于分段函数 $f(x)$ 的分界点为 0，所以，令 $t=x-1$ 后，有

$$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\int_{-1}^0\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\Big|_{-1}^0+\ln 2=\ln(1+\mathrm{e}).$$

【注】 求分段函数的原函数也用类似的方法(见题型五).

【例 3.8】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 并记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$，试求 $F(x)$.

【解】 根据牛顿 - 莱布尼兹公式，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$F(x)=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_0^x=\frac{x^3}{3};$$

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$F(x)=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1+\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x$

$$=\frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}-\left(2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}.$$

评注 若对被积的 $f(x)$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$，则计算 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 更方便，

$$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_1^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^3-1), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \int_1^x(2-t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

于是 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

若被积函数的原函数是分段表示的，则也常用分段积分法求定积分(见本节【例 3.44】(Ⅴ)的评注).

▶3. 换元积分法(变量替换法)

(1) 不定积分的换元积分法

■ 第一换元积分法(凑微分法)

【定理 3.5】 设 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，且函数 $\varphi(x)$ 可导，则

www.TopSage.com

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xrightarrow{\text{令 } u=\varphi(x)} \int f(u)\mathrm{d}u$$
$$= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C . \tag{3.6}$$

在(3.6)式中,第一个等式就是凑微分过程;第二个等式是换元,也就是将积分变量 x 换成 u;第三个等式是求原函数,实际上就是 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 不好求,而 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 好求,所以先求出后一个不定积分;最后,再将变量 u 换成 x. 当熟练掌握这个方法后,可以不必引入变量 u .

几种常用的凑微分形式:

① $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b) \quad (a \neq 0)$;

② $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$; $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$;

③ $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$; $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$;

④ $\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n \quad (n \neq 0)$;

⑤ $\int f\left(\frac{1}{x^n}\right)\frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int f\left(\frac{1}{x^n}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (n \neq 0)$; 特别地,

$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$;

⑥ $\int f(\tan x)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$; $\int f(\cot x)\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$;

⑦ $\int f(\arcsin x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$;

$\int f(\arctan x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$;

⑧ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$.

【例 3.9】 求下列不定积分:

(Ⅰ) $\int \sec x\mathrm{d}x$; (Ⅱ) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x}$; (Ⅲ) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解】 (Ⅰ) $\int \sec x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} + C$$
$$= \ln|\sec x + \tan x| + C .$$

(Ⅱ) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x} = \int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} - \tan\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C .$$

(Ⅲ) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}\arctan\sqrt{x} = \arctan^2\sqrt{x} + C$.

www.TopSage.com

评注 在本题3个小题中，所采用的都是凑微分法，其中第(Ⅰ)小题先作恒等变形后“凑”出$d(\sin x)$；第(Ⅱ)小题先作恒等变形后“凑”出$d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$；第(Ⅲ)小题中“凑”出$d(\arctan\sqrt{x})$．因而，分别以$u=\sin x$，$u=\tan\frac{x}{2}$，$u=\arctan\sqrt{x}$为新的积分变量求原函数．在用凑微分法时，变量替换过程可以省略．

■ 第二换元积分法

事实上，倒转第一换元法的公式(3.6)就是第二换元积分法的公式．

【定理3.6】 设$x=\varphi(t)$可微，$\varphi'(t)\neq 0$，若$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=G(t)+C$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=G(t)+C=G[\varphi^{-1}(x)]+C, \tag{3.7}$$

其中$t=\varphi^{-1}(x)$是$x=\varphi(t)$的反函数．

【注】 与第一换元积分法相反，第二换元积分法就是由于积分$\int f(x)\mathrm{d}x$不便计算，而改求$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$．关键是：如何选择变量替换？(下面有具体介绍)

(2) 定积分的换元积分法

【定理3.7】 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，若代换$x=\varphi(t)$满足条件：

(ⅰ)$\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上连续；

(ⅱ)$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，并且当$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$(或$\beta\leqslant t\leqslant\alpha$)时，$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，

则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{3.8}$$

【注】 ①在定理的叙述中，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，这里可以$\alpha<\beta$，也可以$\beta<\alpha$．

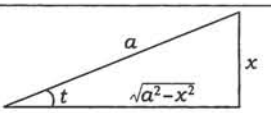
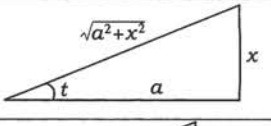
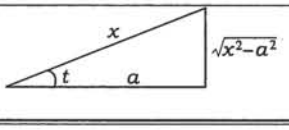
②在定积分作变量替换时，一定要同时更换积分的上、下限．

③我们知道不定积分的换元法有两个，相应于第二换元积分法，在(3.8)中就相当于把积分变量由左端的x换成右端的t；相应于第一换元积分法(凑微分法)，则是把右端的t换成左端的x．定积分的换元法统一在一个公式中，由于换元也相应地换积分限，就不必变量还原．

(3) 常用变量替换

■ 三角替换

三角代换法常用于被积函数中含有二次根式的积分，特别是下述三种类型的根式．

根式的形式	所作替换	三角形示意图($x>0$)
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$，$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$，$0\leqslant t\leqslant\pi$，$t\neq\frac{\pi}{2}$	

www.TopSage.com

上述三种类型的根式包含所有形如$\sqrt{ax^2+bx+c}$的根式．当$a>0$时，经配方$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，令$u=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$，那么，若$4ac-b^2>0$，即属于第二种类型，若$4ac-b^2<0$，即属于第三种类型；而当$a<0$时，同样采用配方法，即可将其化为第一种类型．

【例 3.10】 求下列不定积分：

（Ⅰ）$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x$；　（Ⅱ）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$；　（Ⅲ）$\int x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$．

【解】 （Ⅰ）令$x=\frac{1}{\cos t}\left(0\leqslant t\leqslant\pi,t\neq\frac{\pi}{2}\right)$，于是$\mathrm{d}x=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2-1}=\frac{\sin t}{|\cos t|}$，则

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t\cdot\operatorname{sgn}x=\int\sin^2 t\mathrm{d}\sin t\cdot\operatorname{sgn}x=\frac{1}{3}\sin^3 t\cdot\operatorname{sgn}x+C,$$

其中$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

再用上面的三角形示意图$\left(\sin t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}\right)$，则得

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^3+C.$$

（Ⅱ）令$x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，于是$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C,$$

再利用上面的三角形示意图，则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C=\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}+C=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C_1,$$

其中$C_1=C-\ln a$．

（Ⅲ）由于$\int x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x^2$，故可令$x^2=\sin t$，于是

$$\begin{aligned}\int x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2t)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{16}\left(3t+2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C\\&=\frac{1}{16}[3t+4\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}(1-2\sin^2 t)]+C\\&=\frac{1}{16}[3\arcsin x^2+4x^2\sqrt{1-x^4}+x^2(1-2x^4)\sqrt{1-x^4}]+C\\&=\frac{1}{16}(3\arcsin x^2+5x^2\sqrt{1-x^4}-2x^6\sqrt{1-x^4})+C.\end{aligned}$$

评注　题（Ⅰ）中出现$\operatorname{sgn}x$是因为$\sqrt{x^2}=|x|=x\operatorname{sgn}x$．

■ 幂函数替换

被积函数是x与$\sqrt[n]{ax+b}$或x与$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$的有理式时，常用幂函数替换$t=\sqrt[n]{ax+b}$或$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$去掉根号．（参见简单无理函数积分部分）．

www.TopSage.com

■ 指数函数替换

被积函数由 e^x 构成的代数式时，可考虑选用指数函数替换.

【例 3.11】 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

【解】 作替换 $t=\sqrt{e^x+1}$（指数函数替换与幂函数替换的结合），则 $x=\ln(t^2-1)$. 于是有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$= \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C = 2\ln(\sqrt{e^x+1}-1)-x+C.$$

■ 倒替换

【例 3.12】 求下列积分：

（Ⅰ） $\int_1^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$；　　（Ⅱ） $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}(a>0)$.

【解】 （Ⅰ）原式 $= \int_1^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} -\int_1^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}}$

$$= -\arcsin\frac{t+1}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}-1} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

（Ⅱ） $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{x^3\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot \operatorname{sgn}x = \frac{1}{2a^2}\int \frac{d\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot \operatorname{sgn}x$

$$= -\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot \operatorname{sgn}x + C = -\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+C.$$

评注 ① 题（Ⅱ）中出现 $\operatorname{sgn}x$ 是因为 $\sqrt{x^2}=|x|=x\operatorname{sgn}x$；

② 这里实质上分别作了倒替换：$t=\frac{1}{x}$ 与 $t=\frac{a^2}{x^2}$；

③ 这两道题均可作三角替换来计算，但作倒替换更为简单.

►4. 分部积分法

(1) 不定积分的分部积分法

【定理 3.8】 假定 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 均具有连续的导函数，则

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx. \tag{3.9}$$

或

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{3.10}$$

(2) 定积分的分部积分法

【定理 3.9】 若 $u'(x)$，$v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx. \tag{3.11}$$

或

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{3.12}$$

www.TopSage.com

【注】 (3.9)与(3.10),(3.11)与(3.12)均为分部积分公式.它们分别是一个公式的两种表现形式,至于使用哪种形式,一方面取决于题目的类型,另一方面也取决于个人的习惯.

(3) 利用分部积分法求$\int f(x)\mathrm{d}x$或$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的解题方法

1° 首先要将它写成$\int u\mathrm{d}v$(或$\int uv'\mathrm{d}x$)的形式.

选择u,v,使用分部积分法的常见题型:

被积函数的形式	所用方法
$P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, $P_n(x)\sin\alpha x$, $P_n(x)\cos\alpha x$, 其中$P_n(x)$为n次多项式,α为常数	进行n次分部积分,每次均取$\mathrm{e}^{\alpha x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$为$v'(x)$,多项式部分为$u(x)$
$P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin x$, $P_n(x)\arctan x$,即多项式与对数函数或反三角函数的乘积	取$P_n(x)$为$v'(x)$,$\ln x$,$\arcsin x$,$\arctan x$等为$u(x)$
$\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$, $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$	取$\mathrm{e}^{\alpha x}=v'(x)$(或$u(x)$), $\sin\beta x$, $\cos\beta x$为$u(x)$(或$v'(x)$),进行两次分部积分

2° 多次应用分部积分法,每分部积分一次得以简化,直至最后求出.

3° 用分部积分法有时可导出$\int f(x)\mathrm{d}x$的方程,然后解出.

4° 有时用分部积分法可导出递推公式.

【例3.13】 求下列不定积分:

(Ⅰ) $\int\arcsin x\cdot\arccos x\mathrm{d}x$; (Ⅱ) $\int x^2\sin^2 x\mathrm{d}x$; (Ⅲ) $\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$.

【解】 (Ⅰ)按照上表第二栏所讲的方法,有

$$\int\arcsin x\cdot\arccos x\mathrm{d}x\overset{\text{直接分部积分}}{=\!=\!=}x\arcsin x\cdot\arccos x-\int x\left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=x\arcsin x\cdot\arccos x+\int(\arccos x-\arcsin x)\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=x\arcsin x\cdot\arccos x+\sqrt{1-x^2}(\arccos x-\arcsin x)+2x+C.$$

(Ⅱ)由于$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$,所以

$$\int x^2\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}\int x^2\mathrm{d}\sin 2x.$$

连续使用分部积分法得

$$\int x^2\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}\int x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2\sin 2x-\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\cos 2x$$

$$=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$$

(Ⅲ) $$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+a^2}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\left(\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x,$$

其中$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$已在【例3.10】第(Ⅱ)小题中求出,注意到等式右端也包含积分$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$,因而得到

www.TopSage.com

关于$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$的方程,解得

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

评注　本例的第(Ⅱ)小题是在免使用平凡公式后才使用分部积分法的.

【例3.14】　求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x(n=0,1,2,3,\cdots)$.

【解】　记此积分为I_n,当$n\geqslant 2$时,则有

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

解出I_n,于是得递推公式$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.　(3.13)

由于$I_0=\frac{\pi}{2}$,$I_1=1$,应用这一递推公式,对于n为偶数时,则有

$$I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}I_0=\frac{(n-1)!!}{n!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2};$$

对于n为奇数时,则有

$$I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}I_1=\frac{(n-1)!!}{n!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{(n-1)!!}{n!!}.$$

评注　①分部积分法常用于递推公式.

②由于$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,所以,令$t=\frac{\pi}{2}-x$,则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x.\qquad(3.14)$$

这说明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$,而且这一结果可以推广到一般情形,即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

三、各类函数的积分法

(一)有理函数的积分

对于有理函数的积分,我们指出有理函数可以化为整式与以下四种部分分式之和,这四种部分分式及其不定积分如下:

(1)　$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+C$;

(2)　$\int\frac{A}{(x-a)^m}\mathrm{d}x=-\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C\quad(m\neq 1)$;

(3)　$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$;

www.TopSage.com

(4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}\mathrm{d}x = -\frac{A}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m}$.

其中，二次多项式 x^2+px+q 无实根，即 $p^2-4q<0$；且

$$I_m = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m} \xlongequal{\text{令 } t=x+\frac{p}{2}} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^m},$$

可使用分部积分法导出递推公式来计算，而 $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$. 利用配方法及分项积分法可得 $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ 的表达式.

通过多项式除法总可分解有理函数为多项式与真分式之和，通过待定系数法真分式可分解成部分分式之和，在应用待定系数法时，首先要把分解的形式写正确. 设有真分式 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，$Q(x)$ 已被因式分解. 若分母中有一个因子 $(x-a)^n$，则分解式有对应项

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

若分母中有一个因子 $(x^2+px+q)^n$ $(p^2-4q<0)$，则分解式就有对应项

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

如 $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$（已不能再分解），则 $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ 的分解式应是

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

写出真分式的正确分解形式后，再通分，比较分子的同次幂项系数，定出分解式中待定系数.

【例 3.15】 计算不定积分 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

【分析】 本题属于有理函数的不定积分，按照上面所叙述的方法，应该先将分母进行分解，即分解为 $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$，然后表成部分分式之和，即

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

确定 A,B,C,D 后即可求其不定积分，然而这样做比较麻烦，下面所使用的凑微分法要简捷得多.

【解】 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$

（二）简单无理函数的积分

所谓简单无理函数的积分，通常是指在被积函数中含有形如 $\sqrt[n]{ax+b}$，$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 或 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的根式. 此时一般都是要通过变量替换将根式去掉，化为有理函数的积分. 具体方法是：

对第一个可令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$，即 $x=\varphi(t)=\frac{1}{a}(t^n-b)$；

www.TopSage.com

对第二个可令 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，即 $x=\varphi(t)=\dfrac{b-dt^n}{ct^n-a}$；

而第三个根式经过配方后，都可以化为在第二换元积分法中所介绍的 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$ 与 $\sqrt{x^2-a^2}$ 中的一种．

【例 3.16】 求下列不定积分：

（Ⅰ）$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$；　　（Ⅱ）$\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$．

【解】 （Ⅰ）被积函数中含有两个根式 $\sqrt{x}$ 与 $\sqrt[3]{x}$，为了能够同时消去这两个根式，令 $x=t^6$．则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int\frac{6t^5\mathrm{d}t}{(1+t^2)t^3}=6\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C;$$

（Ⅱ）尽管被积函数中所含根式的形式与上面所介绍的有所不同，然而也应该通过变量替换将根式去掉．令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，即 $x=\ln(1+t^2)$，从而

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+t^2)\ln(1+t^2)}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=2\int\ln(1+t^2)\mathrm{d}t=2t\ln(1+t^2)-4\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=2t\ln(1+t^2)-4t+4\arctan t+C$$
$$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.$$

（三）三角有理式的积分

所谓三角有理式就是指以 $\sin x$ 与 $\cos x$ 为变量的有理函数，通常记为 $R(\sin x,\cos x)$ 的形式．由于 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 都可以由 $\sin x$ 与 $\cos x$ 表示，所以只要讨论 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的有理函数就够了．对于这类积分，总可以作代换 $\tan\dfrac{x}{2}=t$（称为万能代换）使被积函数有理化，事实上，作这样的代换后，就有

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

于是 $\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$．这样，就把三角有理式的积分化成了有理函数的积分．

对以下特殊情形的三角有理式作别的变换更简单些．

设 $R(u,v)$，$R_1(u,v)$ 均为 u,v 的有理函数，

（1）若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则有

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R_1(\sin^2x,\cos x)\sin x\mathrm{d}x\xlongequal{t=\cos x}-\int R_1(1-t^2,t)\mathrm{d}t;$$

（2）若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则有

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R_1(\sin x,\cos^2x)\cos x\mathrm{d}x\xlongequal{t=\sin x}\int R_1(t,1-t^2)\mathrm{d}t;$$

www.TopSage.com

(3) 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则有

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R_1(\tan x)\,dx\xrightarrow{t=\tan x}\int R_1(t)\,\frac{1}{1+t^2}dt,\quad R_1(u)\text{ 为有理函数}.$$

【例 3.17】 求下列不定积分：

(Ⅰ) $J=\int\frac{1}{1+\sin x}dx$；　(Ⅱ) $J=\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

【解】 作恒等变形后凑微分.

(Ⅰ) **方法 1°**

$$J=\int\frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\int\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\int\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

方法 2° $J=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$

方法 3°

$$J=\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\int\frac{2d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

(Ⅱ)

$$J\xrightarrow{\text{分解}}\int\frac{2}{2+\cos x}dx+\int\frac{d(\cos x+2)}{2+\cos x}=\int\frac{2}{1+2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\ln(2+\cos x)$$

$$=\int\frac{4d\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}\left[1+\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}+\ln(2+\cos x)=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\ln(2+\cos x)+C.$$

评注 用三角替换 $t=\tan\frac{x}{2}$，总可把三角有理式的积分化为有理函数的积分，然而作这样的代换常导致比较复杂的运算，因此，对于某些类型的三角函数的积分，往往是先寻求简单的方法，例如：利用三角函数恒等式将被积表达式作恒等变形，再凑微分，不同的恒等变形产生不同的凑微分法.

【例 3.18】 求下列不定积分：

(Ⅰ) $\int\sin mx\cdot\cos nx\,dx(m\neq\pm n)$；　(Ⅱ) $\int\cos^2x\sin^5x\,dx$.

【解】 (Ⅰ) 利用积化和差的公式，有

$$\int\sin mx\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]\,dx$$

$$=\frac{1}{2(m+n)}\int\sin(m+n)x\,d(m+n)x+\frac{1}{2(m-n)}\int\sin(m-n)x\,d(m-n)x$$

$$=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C.$$

(Ⅱ) 利用分解法与凑微分法，有

www.TopSage.com

$$\int \cos^2 x \sin^5 x \mathrm{d}x = -\int \cos^2 x (1-\cos^2 x)^2 \mathrm{d}(\cos x) = -\int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$$

四、积分计算技巧

掌握了积分法则之后,再掌握一些积分计算技巧,就可使某些计算更加灵活,简便.

求积分时常用到以下技巧:

1. 利用定积分的几何意义求定积分值.

若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是熟知的平面图形的面积,由面积值就可得该定积分值.

2. 利用对称区间上奇偶函数的积分性质(【定理 3.3】).

3. 利用周期函数的积分性质(【定理 3.4】).

4. 利用积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{(n-1)!!}{n!!} I^*, \text{其中 } I^* = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

5. 利用被积函数的分解与结合:被积函数的分解即分项积分法.另一方面,有时对$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$施行变量替换,将它转换为另一形式$I = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,将它们结合在一起:$2I = \int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$却容易算出结果.

【例 3.19】 求定积分$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

【解】 由于$\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2} = \left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$,故

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\mathrm{d}x \xlongequal{t = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}} |\sin t|\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{周期函数积分性质}} 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin t \mathrm{d}t = 2\sqrt{2}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 4\sqrt{2}.$$

【例 3.20】 求$\int_a^b x^2\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$.

【解】 由于$\sqrt{(x-a)(b-x)} = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}$,故作平移变换:$x - \frac{a+b}{2} = t$,并记$c = \frac{b-a}{2}$,则

$$\int_a^b x^2\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x = \int_{-c}^{c}\left(t + \frac{a+b}{2}\right)^2\sqrt{c^2 - t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-c}^{c} t^2\sqrt{c^2 - t^2}\mathrm{d}t + 2\frac{a+b}{2}\int_{-c}^{c} t\sqrt{c^2 - t^2}\mathrm{d}t + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\int_{-c}^{c}\sqrt{c^2 - t^2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal[\text{定积分的几何意义,半圆的面积}]{\text{奇函数在对称区间上的积分性质}} \int_{-c}^{c} t^2\sqrt{c^2 - t^2}\mathrm{d}t + 0 + \frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi c^2$$

www.TopSage.com

$$= \frac{\pi}{32}(b-a)^2\left[\frac{(b-a)^2}{4} + (a+b)^2\right],$$

其中 $$\int_{-c}^{c} t^2\sqrt{c^2-t^2}\,dt \xlongequal{t=c\sin\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c^2\sin^2\theta c^2\cos^2\theta\,d\theta = 2c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= 2c^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}c^4.$$

【例 3.21】 求下列定积分：

(Ⅰ) $I = \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；　　(Ⅱ) $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\arctan e^x dx$.

【分析】 积分 $I = \int_0^b f(x)\,dx$ 在变量替换 $t = b - x$ 下积分区间保持不变，即

$$I = -\int_b^0 f(b-t)\,dt = \int_0^b f(b-t)\,dt = \int_0^b f(b-x)\,dx,$$

于是 $2I = \int_0^b [f(x) + f(b-x)]\,dx$. 若右端易求，则就求出了 I 值. 题(Ⅰ)就是如此.

积分区间的对称性除了奇函数或偶函数带来方便之外，有时对某些其他函数也会带来方便. 在对称区间的情形：$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$，若作变量替换 $x = -t$，则积分区间保持不变，即 $I = \int_{-a}^{a} f(-t)\,dt$.

于是 $$2I = \int_{-a}^{a}[f(x) + f(-x)]\,dx.$$

若右端积分易算，则就求出了 I 的值. 题(Ⅱ)就是这样.

【解】 (Ⅰ) $$I \xlongequal{x=\pi-t} \int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\pi\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi^2}{4}.$$

(Ⅱ) $$J \xlongequal{x=-t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(-t)\arctan e^{-t}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\arctan e^{-x}dx$$

$$\Rightarrow \quad 2J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(\arctan e^x + \arctan e^{-x})\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{\pi^2}{8}.$$

五、反常积分(广义积分)

定积分有两个基本要求：积分区间有限与被积函数有界. 反常积分(广义积分)就是通过去掉这两个限制来推广定积分的.

(一) 无穷限反常积分(广义积分)的概念

1. 设 $f(x)$ 定义在 $[a, +\infty)$ 上，且在任意一个有界区间 $[a,b]$ 上存在定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$，定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx; \tag{3.15}$$

2. 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, b]$ 上，且在任意一个有界区间 $[a,b]$ 上存在定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$，定义

www.TopSage.com

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx; \tag{3.16}$$

3. 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上,定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\,dx . \tag{3.17}$$

(3.15),(3.16) 中若右端极限存在,则称反常积分(广义积分) 收敛,否则称为发散. (3.17) 式要求右端两个反常积分(广义积分) 同时收敛,则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛,有一个发散则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散.

(二) 无界函数反常积分(广义积分) 的概念

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义且在任何一个区间 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积,其中 $\varepsilon>0$,在 a 点的右邻域无界,定义

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx; \tag{3.18}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义且在任何一个区间 $[a,b-\varepsilon]$ 上可积,其中 $\varepsilon>0$,在 b 点的左邻域无界,定义

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx; \tag{3.19}$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,c)$ 及 $(c,b]$ 上都有定义,且在 $[a,c-\varepsilon]$ 及 $[c+\varepsilon,b]$ 上可积,其中 $\varepsilon>0$,在点 c 的邻域内无界,定义

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to0+}\int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to0+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx . \tag{3.20}$$

(3.18),(3.19) 中若右端极限存在,则称该反常积分收敛,否则发散. (3.20) 式要求右端两个反常积分均收敛,则称 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 收敛. 若有一个发散,则称 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 发散. 无界函数的反常积分(广义积分) 也称为**瑕积分**,被积函数 $f(x)$ 在其邻域内无界的点称为**瑕点**.

(三) 几个常见的反常积分(广义积分)

1. $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\begin{cases}\text{收敛}, p>1,\\ \text{发散}, p\le1,\end{cases}\ a>0;$

2. $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}\begin{cases}\text{收敛}, p>1,\\ \text{发散}, p\le1,\end{cases}\ a>1;$

3. $\int_{a}^{+\infty} x^k e^{-\lambda x}dx\begin{cases}\text{收敛}, \lambda>0,\\ \text{发散}, \lambda\le0,\end{cases}\ k\ge0;$

4. $\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)^p}\begin{cases}\text{收敛}, p<1,\\ \text{发散}, p\ge1.\end{cases}$

(四) 反常积分(广义积分) 的计算

反常积分(广义积分) 是变限积分的极限,因此由定积分的运算法则及极限运算法则就可得到反常积分(广义积分) 的运算法则.

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续,$F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续,$F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,+\infty))$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\triangleq F(+\infty)$ 存在,则

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty)-F(a);$$

大家网 TopSage.com

2. 设$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f(x)+k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 k_1, k_2 为常数;

3. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有连续的导数,若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ 存在, $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)g(x)] - f(a)g(a)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续, $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ 有连续的导数且单调, $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty$,

则 $$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

这里 β 可以是有限的,也可以为 ∞.

【注】 ① 要注意上述反常积分运算法则成立的条件"收敛",否则会导致错误的结论.

② 无界函数的反常积分也有上述类似的运算法则.

【例 3.22】 计算下列反常积分(广义积分)的值:

(Ⅰ) $\int_3^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$; (Ⅱ) $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

【解】 (Ⅰ) 由于 $x^2-2x=(x-1)^2-1$,所以为去掉被积函数中的根号,可令 $x-1=\sec t$,则有

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t\tan t}{\sec^4 t\tan t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\mathrm{d}(\sin t)$$

$$= \left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3};$$

(Ⅱ) 采用分解法与分部积分法. 注意 $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$,将被积函数分解并用分部积分法有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

评注 本例的第(Ⅰ)小题是对无界函的反常积分(广义积分),而所引入新的积分变量 t 后就变成了定积分,这说明定积分与反常积分(广义积分)有时可以相互转换.

六、积分学应用的基本方法——微元分析法

定积分所计算的是某函数改变量,如曲边梯形的面积是面积函数改变量,弧长是弧长函数改变量. 所用方法是分割、近似、求和、取极限这四步法,即

www.TopSage.com

$$F(b)-F(a)\xrightarrow[\text{局部改变量之和}]{\text{整体改变量化为}}\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]\overset{\text{近似函数改变量}}{\overset{\text{局部上用微分}}{\approx}}\sum_{i=1}^{n}F'(x_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i.$$

取极限从近似转化为精确,即

$$F(b)-F(a)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这四步法中的关键是分割与近似,从微分式与积分式的等价性来看:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则

$$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x\ (\forall x\in[a,b])\Leftrightarrow\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)\ (\forall x\in[a,b]).$$

这四步法归结为两步:

第一步,求出 $F(x)$ 的微分式 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 是已知的,$F(x)$ 是要求的;

第二步,将微分式积分,即 $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

怎样写出 $F(x)$ 的微分式,常用的方法是微元分析法:任取微元区间 $[x,x+\Delta x]$,求出

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)\approx f(x)\Delta x.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时上面的近似式转化为等式,即 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$.

【例 3.23】 求一块铅直平板如图 3.1 所示在某种液体(比重为 γ)中所受的压力.

【解】 液体中深度为 h 处所受的压强为 $p=h\gamma$,从深度为 a 到 x 之间平板所受的压力记为 $P(x)$,任取 $[x,x+\Delta x]$ 上小横条,所受压力为

$$\Delta P=P(x+\Delta x)-P(x)\approx x\gamma\cdot c\Delta x.$$

令 $\Delta x\to 0$,得 $\mathrm{d}P(x)=x\gamma c\mathrm{d}x$.于是,总压力为

$$P=\int_a^b x\gamma c\mathrm{d}x=\frac{\gamma c}{2}(b^2-a^2)$$

$$=\gamma\cdot\frac{1}{2}(a+b)c(b-a)=\gamma\cdot\text{矩形中心的深度}\cdot\text{矩形的面积}.$$

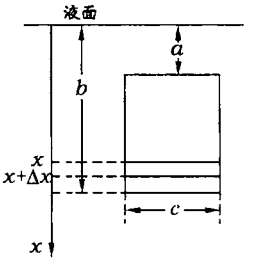


图 3.1

【注】 近似公式 $\Delta F\approx f(x)\Delta x$ 转化为等式 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 的关键是:ΔF 与 $f(x)\Delta x$ 的误差是 Δx 的高阶无穷小($\Delta x\to 0$ 时).

七、一元函数积分学的几何应用

(一) 平面图形的面积

▶1. 直角坐标系中的平面图形

(1) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,则由曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 及直线 $x=a,x=b(a<b)$ 所围成的区域 D 的面积为 $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$,其中曲线 $y=f(x),y=g(x)(x\in[a,b])$ 可以有有限个交点.见图 3.2.

特别地,若 $f(x)\geqslant g(x)\ (\forall x\in[a,b])$,如图 3.3,则 $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

若 $g(x)=0$,如图 3.4,则 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

www.TopSage.com

【注】 上述公式也可从二重积分的计算公式得到(如图 3.3):

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{g(x)}^{f(x)} \mathrm{d}y = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x .$$

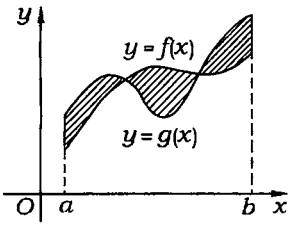


图 3.2

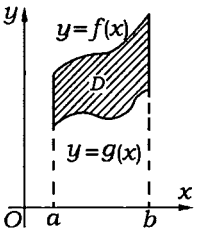


图 3.3

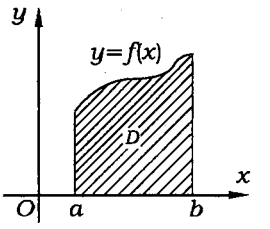


图 3.4

(2) 设 $\varphi(y)$, $\psi(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续,则由曲线 $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$ 及直线 $y = \alpha$, $y = \beta(\alpha < \beta)$ 所围的区域 D 的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta |\varphi(y) - \psi(y)|\mathrm{d}y,$$

其中,曲线 $x = \varphi(y)$ 与 $x = \psi(y)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上可以有有限个交点(如图 3.5).

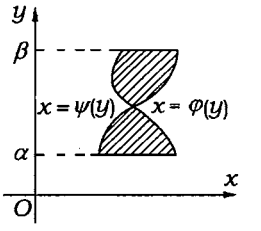


图 3.5

【注】 这一公式也可由二重积分的计算公式得到(如图 3.5):

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}y \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta [\varphi(y) - \psi(y)]\mathrm{d}y,$$

其中 $\varphi(y) \geqslant \psi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$.

▶2. 极坐标系中的平面图形

(1) 设 $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续, $r_1(\theta) \leqslant r_2(\theta)$ $(\forall \theta \in [\alpha, \beta])$,则在极坐标系中由曲线 $r = r_1(\theta)$, $r = r_2(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ 所围成的区域 D 的面积(如图 3.6)为

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta .$$

特别地,当 $r_2(\theta) = r(\theta)$, $r_1(\theta) = 0$ 时(如图 3.7),有 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$.

【注】 以上公式可由二重积分的极坐标变换得

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta .$$

(2) 设 $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$ 在 $[a,b]$ 连续, $\theta_1(r) \leqslant \theta_2(r)$ $(\forall r \in [a,b])$,如图 3.8,则在极坐标系中由曲线 $\theta = \theta_1(r)$, $\theta = \theta_2(r)$ 及圆弧 $r = a$, $r = b(a < b)$ 所围成的区域 D 的面积为(见【例 3.24】)

$$S = \int_a^b r[\theta_2(r) - \theta_1(r)]\mathrm{d}r .$$

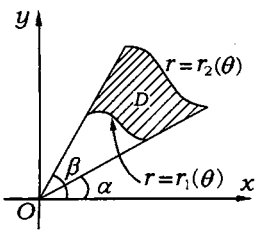


图 3.6

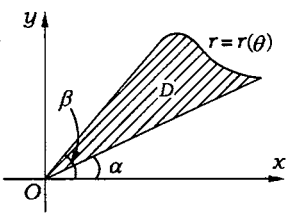


图 3.7

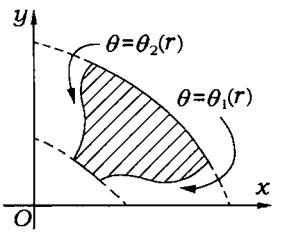


图 3.8

www.TopSage.com

▶3. 边界曲线方程由参数方程给出的情形

(1) 当曲边梯形的曲边 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0, x\in[a,b])$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 给出时，若 $x=\varphi(t)$ 适合：$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上有连续导数且 $\varphi'(t)$ 不变号，$\psi(t)\geqslant 0$ 连续，则曲边梯形的面积为（如图 3.9）

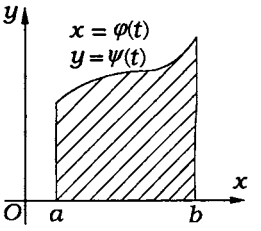


图 3.9

$$S=\int_a^b y\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 设有界闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，则 D 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,$$

其中，L 对 D 来说取正向.

【注】 该公式可由格林公式得到：

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \text{ 中，取 } P=-y, Q=x \text{ 即可}.$$

【例 3.24】 导出图 3.8 所示的平面区域 D 的面积公式 $S=\int_a^b r[\theta_2(r)-\theta_1(r)]\mathrm{d}r$.

【解法一】 利用定积分的微元法. 在极坐标系中任取 $[r,r+\mathrm{d}r]$ 所对应的小圆环的一段，其半径为 r，对应的圆心角为 $\theta_2(r)-\theta_1(r)$，于是此微元的面积为 $\mathrm{d}S=r[\theta_2(r)-\theta_1(r)]\mathrm{d}r$，整个区域 D 的面积为

$$S=\int_a^b r[\theta_2(r)-\theta_1(r)]\mathrm{d}r.$$

【解法二】 平面图形面积的二重积分表示式，在极坐标变换下化二重积分为定积分.

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \quad (\text{其中 } D'=\{(r,\theta)\mid \theta_1(r)\leqslant\theta\leqslant\theta_2(r), a\leqslant r\leqslant b\})$$

$$=\int_a^b\left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r=\int_a^b r[\theta_2(r)-\theta_1(r)]\mathrm{d}r.$$

(二) 平面曲线的弧微分与弧长

1. 已知平面曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $x=x(t), y=y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t \quad ((\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2),$$

弧长为 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$. 其中 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续的导数，$x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$.

2. 已知平面曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的显式表示为 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则弧微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$，弧长为 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数.

3. 已知平面曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，也就知道了它的参数方程 $x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，则弧微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$，弧长为 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$，其中 $r=r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续的导数.

【例 3.25】 求下列平面曲线的弧长：

(Ⅰ) 曲线 $9y^2=x(x-3)^2$ $(y\geqslant 0)$ 位于 $x=0$ 到 $x=3$ 之间的一段；

(Ⅱ) 曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1(a>0,b>0,a\neq b)$.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

【解】 (Ⅰ)先求 y' 与 $\sqrt{1+y'^2}$：将 $9y^2 = x(x-3)^2$ 两边对 x 求导得 $6yy' = (x-3)(x-1)$，

$$y' = \frac{1}{6y}(x-3)(x-1),\quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}.$$ 因此该段曲线的弧长为

$$s = \int_0^3 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^3 \frac{1+x}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}.$$

(Ⅱ)先写出曲线的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t, \end{cases} t \in [0,2\pi]$，再求

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 3\,|\sin t\cos t|\,\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}.$$

于是代公式并由对称性得，该曲线的弧长为

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2-a^2)\sin^2 t}\,d\sin^2 t = \frac{4}{b^2-a^2}[a^2 + (b^2-a^2)\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{b^2-a^2}(b^3-a^3).$$

(三) 平面曲线的曲率

►1. 平面曲线的曲率、曲率圆与曲率半径的概念

设 C 是光滑曲线(每一点处都有切线且随切点的移动而连续转动) $y = f(x)$. 选定一端点作为度量弧 s 的基点. 曲线上每一点 M 就对应有弧长为 s，点 M 切线的倾角(如图 3.10(a) 或 3.10(b)) 为 $\alpha = \alpha(s)$，称

$$K = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

为平面曲线 C 在点 M 的**曲率**，$\rho = \frac{1}{K}$ 为 C 在点 M 的**曲率半径**. 在点 M 处的曲线 C 的法线上，在凹的一侧取一点 D，使 $|DM| = \rho = \frac{1}{K}$，以 D 为圆心，ρ 为半径作圆(图 3.10(a) 或图 3.10(b))，这个圆叫做曲线 C 在点 M 处的**曲率圆**，圆心 D 叫做曲线 C 在点 M 的**曲率中心**.

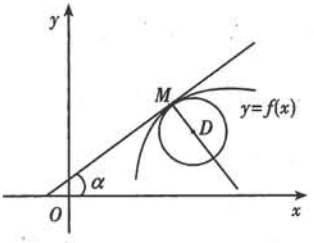


图 3.10(a)

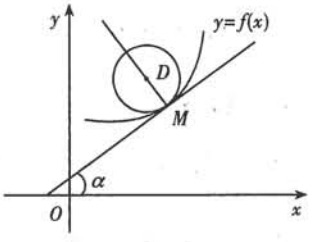


图 3.10(b)

由此可知，曲线 C 在点 M 处与其曲率圆有相同的切线和曲率，且在点 M 邻近处有相同的凹凸性. (参见本章【例 3.27】.)

【注】 对于凸函数，它的凹的一侧即切线的下方一侧(图 3.10(a))；对于凹函数，它的凹的一侧即切线的上方一侧(图 3.10(b)).

►2. 曲率的计算公式

(1) 设曲线 C 的参数方程为 $x = x(t)$，$y = y(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$，则

www.TopSage.com

$$K = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}},$$

其中 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 有二阶导数.

(2) 设曲线 C 的直角坐标方程为 $y = y(x)$, $y(x)$ 二阶可导,则 $K = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$.

【例 3.26】 求下列曲线的曲率或曲率半径:

(Ⅰ) 求 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的曲率;

(Ⅱ) 求 $y = \ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率半径.

【解】 (Ⅰ) 先求 x', x'', y' 与 y'',然后代公式.

$x' = a(1 - \cos t)$, $x'' = a\sin t$; $y' = a\sin t$, $y'' = a\cos t$. 于是,在任意点处的曲率为

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|a(1 - \cos t)a\cos t - a\sin t \cdot a\sin t|}{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t]^{3/2}}$$

$$= \frac{a^2(1 - \cos t)}{a^3 2^{\frac{3}{2}}(1 - \cos t)^{3/2}} = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

(Ⅱ) 先求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$,然后代公式: $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$. 于是,在任意点 $x > 0$ 处曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left[1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}}.$$

于是曲线在点 $(1,0)$ 处的曲率半径 $\rho = \left.\frac{1}{K}\right|_{x=1} = 2^{3/2}$.

【例 3.27】 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $P(1,2)$,且在该点与圆 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 相切,有相同的曲率半径和凹凸性,求常数 a, b, c.

【解】 圆 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 的半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$,所以在圆上任何一点的曲率为 $\sqrt{2}$. 由于点 $P(1,2)$ 是下半圆上的一点,可知曲线 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 在点 $P(1,2)$ 处为凹的,所以由 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 确定的连续函数 $y = y(x)$ 在 $P(1,2)$ 处的 $y'' > 0$. 又经过计算,可知在点 $P(1,2)$ 处的 $y' = 1$.

由题设条件知,抛物线经过点 $P(1,2)$,于是有

$$a + b + c = 2.$$

抛物线与圆在点 $P(1,2)$ 相切,所以在点 $P(1,2)$ 处 $y' = 1$,即有 $2a + b = 1$. 又抛物线与圆在点 $P(1,2)$ 有相同的曲率半径及凹凸性,因此有

$$\sqrt{2} = \left.\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_P = \frac{y''}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{2^{\frac{3}{2}}},$$

解得 $a = 2$,从而 $b = -3$, $c = 2 - a - b = 3$.

（四）空间图形的体积

▶1. 平行截面面积为已知的立体的体积

设空间某立体由一曲面和垂直于 z 轴的二平面 $z=\alpha$，$z=\beta$ 围成（$\alpha<\beta$），如果过 z 轴上任一点 $z(\alpha\leqslant z\leqslant\beta)$ 且垂直于 z 轴的平面截立体所得的截面面积 $S(z)$ 是已知的连续函数，则该立体的体积（见图 3.11）为

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}S(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

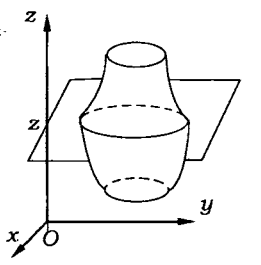


图 3.11

【注】 该立体是空间 $Oxyz$ 中的一个有界闭区域记为 Ω，则

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D(z),\alpha\leqslant z\leqslant\beta\},$$

其中 $D(z)$ 是竖坐标为 z 与 z 轴垂直的平面截 Ω 所得到的平面有界闭区域，它的面积已知为连续函数 $S(z)$，则 Ω 的体积为

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_{\alpha}^{\beta}\Big(\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z=\int_{\alpha}^{\beta}S(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

▶2. 旋转体的体积

设有连续曲线 $\Gamma:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则该曲线与直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的平面图形（如图 3.12）绕 x 轴旋转一周产生一个旋转体，其体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

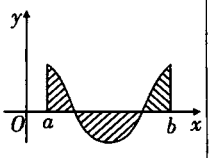


图 3.12

当 $a>0$ 时，该平面图形绕 y 轴旋转一周产生另一旋转体，其体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

【例 3.28】 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 连续，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的平面图形（如图 3.12）绕 y 轴旋转一周得旋转体，试导出该旋转体的体积公式．

【解】 用微元法．任取 $[a,b]$ 上小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，相应得到小曲边梯形，它绕 y 轴旋转所成立体的体积（见图 3.12）为 $\mathrm{d}V=|f(x)|2\pi x\mathrm{d}x$，于是积分得旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

【例 3.29】 设底面长短轴分别为 $2a$，$2b$ 的正椭圆柱体被过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角 $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的平面截得一楔形体（如图 3.13），求它的体积．

【解】 椭圆柱体底面的椭圆方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$．垂直于 y 轴的平面截此立体得直角三角形，其中一锐角为 α，邻边边长为 $x=a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}$，对边边长为 $a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\tan\alpha$，它的面积为

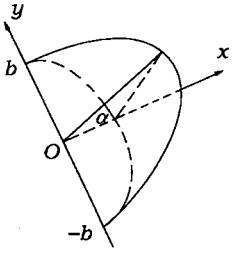


图 3.13

$$S(y)=\frac{1}{2}a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cdot a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\tan\alpha=\frac{1}{2}a^2\Big(1-\frac{y^2}{b^2}\Big)\tan\alpha\ .$$

楔形体的体积为

$$V=\int_{-b}^{b}S(y)\,\mathrm{d}y=2\int_0^b\frac{1}{2}a^2\Big(1-\frac{y^2}{b^2}\Big)\tan\alpha\,\mathrm{d}y=a^2\Big(y-\frac{1}{3b^2}y^3\Big)\Big|_0^b\tan\alpha=\frac{2}{3}a^2b\tan\alpha\ .$$

【例 3.30】 设两曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与 $y=\ln\sqrt{x}$ 在 (x_0,y_0) 处有公切线（如图 3.14），求这两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V．

www.TopSage.com

【解】 先求 a 值与切点坐标.

$$y_1 = a\sqrt{x},\ y'_1 = \frac{a}{2\sqrt{x}},\ y_2 = \ln\sqrt{x},\ y'_2 = \frac{1}{2x}.$$

由两曲线在(x_0, y_0)处有公切线得

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2x_0}, \\ a\sqrt{x_0} = \ln\sqrt{x_0}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a\sqrt{x_0} = 1, \\ \ln\sqrt{x_0} = 1. \end{cases} \text{解得 } x_0 = e^2,\ a = e^{-1}.$$

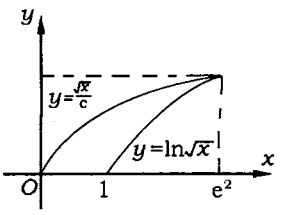


图 3.14

我们所求的旋转体体积等于曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{e}$, $y = \ln\sqrt{x}$ 分别与 x 轴及直线 $x = e^2$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积之差.

$$V = \pi\int_0^{e^2}\left(\frac{1}{e}\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi\int_1^{e^2}(\ln\sqrt{x})^2 dx = \frac{\pi}{e^2}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{e^2} - \frac{\pi}{4}x\ln^2 x\Big|_1^{e^2} + \frac{\pi}{4}\int_1^{e^2} 2\ln x dx$$

$$= \frac{\pi}{2}e^2 - \pi e^2 + \frac{\pi}{2}x\ln x\Big|_1^{e^2} - \frac{\pi}{2}\int_1^{e^2} dx = \frac{\pi}{2}e^2 - \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

(五) 旋转面的(侧) 面积

在 x 轴上方有一平面曲线$\overset{\frown}{AB}$绕 x 轴旋转一周得旋转曲面(如图 3.15),其面积记为 F.

(1) 若$\overset{\frown}{AB}$为直线段$\overline{AB}$,则

$F = \pi l(y_A + y_B)$,其中 l 为$\overline{AB}$的长度,y_A, y_B 分别为点 A, B 的纵坐标.

(2) 设$\overset{\frown}{AB}$以弧长为参数的方程为 $x = x(s), y = y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$,则

$$F = 2\pi\int_0^l y(s)\,ds.$$

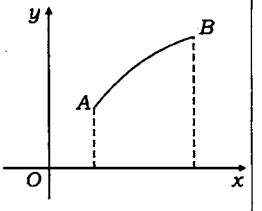


图 3.15

(3) 设$\overset{\frown}{AB}$的参数方程为 $x = x(t), y = y(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,则

$$F = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt,$$

其中 $x(t), y(t)$ 在$[\alpha, \beta]$有连续导数.

(4) 设$\overset{\frown}{AB}$的方程为 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$,则

$$F = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

其中 $f(x)$ 在$[a, b]$有连续的导数.

(5) 设$\overset{\frown}{AB}$的极坐标方程为 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$,则

$$F = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta,$$

其中 $r(\theta)$ 在$[\alpha, \beta]$有连续的导数.

例 3.31 求圆弧 $x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{a}{2} \leqslant y \leqslant a\right)$绕 y 轴旋转一周所得球冠的面积.

【解法一】 如图 3.16,由对称性只需考虑 y 轴右方部分的圆弧,将它表为 $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ $\left(\frac{a}{2} \leqslant y \leqslant a\right)$,则$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = -\frac{y}{x}$. 直接由旋转面的面积计算公式得

$$F = 2\pi\int_{\frac{a}{2}}^a x(y)\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_{\frac{a}{2}}^a x\frac{a}{x}dy$$

$$= 2\pi\cdot\frac{a}{2}a = \pi a^2.$$

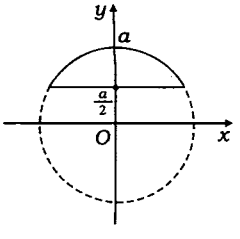


图 3.16

www.TopSage.com

【解法二】 圆弧曲线的参数方程为 $x = a\cos t, y = a\sin t\left(\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，由侧面积公式得

$$F = 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = 2\pi a^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t = 2\pi a^2\sin t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2.$$

八、一元函数积分学的物理应用

（一）液体的静压力

在液面下深度为 h 处，由液体重量产生的压强等于它的深度 h 与液体比重 γ 的乘积：$p = \gamma h$. 并且同一点的压强在各个方向都是相等的.

设一薄板垂直放在均匀的静止液体中，如图 3.17，则液体对薄板的侧压力

$$P = \int_a^b \gamma x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 γ 为液体的密度，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续（$[x,x+\mathrm{d}x]$ 对应的小条薄板所受的侧压力 $\mathrm{d}P = \gamma x f(x)\mathrm{d}x$）.

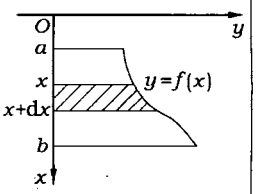


图 3.17

【例 3.32】 有一椭圆形薄板，长半轴为 a，短半轴为 b，薄板垂直立于水中，而其短半轴与水面相齐，求水对薄板的侧压力.

【解法一】 取坐标系如图 3.18 所示，椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

分割区间 $[0,a]$，在小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 对应的小横条薄板上，水对它的压力

$$\mathrm{d}P = \text{压强} \times \text{面积} = \gamma x \cdot 2y\mathrm{d}x = \gamma x\frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x,$$

其中 γ 为水的比重. 从 0 到 a 积分便得到椭圆形薄板所受的压力

$$P = \int_0^a \frac{2b\gamma}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{b\gamma}{a}\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{2}{3}\gamma a^2 b.$$

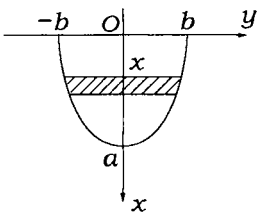


图 3.18

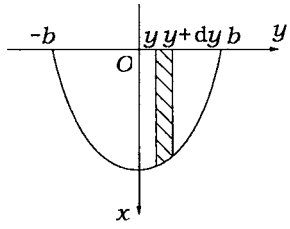


图 3.19

【解法二】 分割区间 $[-b,b]$，在小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 对应的小竖条薄板上，水对它的压力（如图 3.19 所示）

$$\mathrm{d}P = \text{中心处的压强} \times \text{面积} = \gamma \cdot \frac{x}{2}x\mathrm{d}y = \frac{\gamma}{2}a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y.$$

从 $-b$ 到 b 积分便得到椭圆形薄板所受的压力

$$P = \int_{-b}^{b}\frac{\gamma}{2}a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y = \gamma a^2\int_0^b\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y = \gamma a^2\left(b - \frac{y^3}{3b^2}\Big|_0^b\right) = \frac{2\gamma}{3}a^2 b.$$

评注 在定积分的分割、近似、求和、取极限这四步法中关键是分割与近似，抓住了这个关键，我们把这个方法简化为微元分析法. 作适当分割取微元是为了近似，找到函数改变量的主要部分，从而直接写出所求函数的微分表达式，再积分便得到所求的量.

www.TopSage.com

在【例 3.32】的【解法一】中，作横向分割，任取$[x,x+\Delta x]$对应的小横条薄板，把变压强转化为常压强，从而得到压力函数改变量的近似值$\Delta P \approx \gamma x \cdot 2y\Delta x, \Delta x \to 0$时近似式转化为等式$\frac{dP}{dx} = 2\gamma xy$，即

$$dP = 2\gamma xy dx.$$

在【解法二】中，作纵向分割，任取$[y,y+\Delta y]$对应的小竖条薄板，虽然压强是变量，但小竖条的长度转化为常量，即可近似看成矩形，对矩形薄板（如图 3.20），它所受的压力为

$$P = \int_a^b \gamma x c dx = \frac{1}{2}\gamma c(b^2 - a^2) = \gamma \cdot \frac{b+a}{2}(b-a)c$$

= 矩形中心处的压强 × 矩形面积.

因此也是可行的.

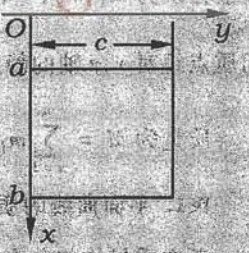


图 3.20

（二）变力做功

▶1. 设一物体沿x轴运动，在运动过程中始终有力F作用于物体上. 力F的方向或与Ox轴方向一致（此时F取正值）或与Ox轴方向相反（此时F取负值）. 物体在x处的力为$F(x)$，则物体从a移到b时变力$F(x)$做的功为

$$W = \int_a^b F(x)dx \text{（任取}[x,x+dx]\text{一段，力}F(x)\text{做的功}dW = F(x)dx\text{）.}$$

▶2. 设有一容器（如图 3.21），其顶部所在平面与Ox轴（铅直向下）相交于原点，液体表面与Ox轴相截于$x=a$，底面与Ox轴相截于$x=b$，垂直于Ox轴的平面截容器所得的截面面积为x的连续函数$S(x)$，则将容器中的液体全部抽出所做的功为

$$W = \int_a^b \rho g x S(x)dx,$$

其中ρ为液体密度，g为重力加速度.

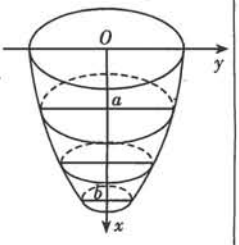


图 3.21

【例 3.33】 半径为R的球沉入水中，上顶点与水面相切，将球从水中取出要做多少功？（设球的比重为 1）

【解】 首先建立坐标系，取x轴垂直水平面并过球心，方向向上，原点为球心，见图 3.22.

任取$[-R,R]$中的小区间$[x,x+dx]$相应的球体中的薄片，其重量为$\pi(R^2-x^2)dx$，在水中时浮力与重量相等. 当球从水中移出时，此薄片离水面的距离是$R+x$，故对它需做功$dW = (R+x)\pi(R^2-x^2)dx$. 因此，将球从水中取出时要做功

$$W = \int_{-R}^{R} \pi(R+x)(R^2-x^2)dx = \pi\int_{-R}^{R} R(R^2-x^2)dx$$

$$= 2\pi R\int_0^R (R^2-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi R^4.$$

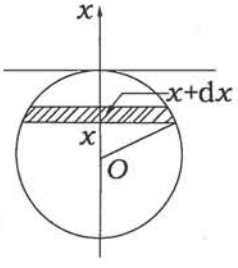


图 3.22

（三）引力问题

质量分别为m_1, m_2相距为r的两质点间的引力的大小为$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$，其中k为引力常数，引力的方向沿着两质点的连线方向.（有关例子参见本章题型训练四、5 题）

www.TopSage.com

（四）质心与形心问题

设平面上有 n 个质点：

$$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n),$$

质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，这 n 个质点对 x,y 轴的静力矩为 $my_i,\quad mx_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$；

而质点组对 x,y 轴的静力矩分别为 $M_x=\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i,\quad M_y=\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i$；

质量为 $M=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$，设质点组的质心 $(\bar{x},\bar{y})$，则 $\bar{x}=\dfrac{M_y}{M},\quad \bar{y}=\dfrac{M_x}{M}$.

▶1. 平面曲线的质心

考虑质量均匀分布的平面光滑物体曲线 $\overset{\frown}{AB}$，其线密度为常数 ρ，$\overset{\frown}{AB}$ 的全长为 l，以 A 点为计算弧长的起点（如图 3.23），取弧长 s 为自变量，$0\leqslant s\leqslant l$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程（以弧长 s 为参数）为

$$\begin{cases}x=x(s),\\ y=y(s)\end{cases}\quad (0\leqslant s\leqslant l).$$

$\forall$ 取 $[s,s+\mathrm{d}s]$，看作质点，坐标为 $(x(s),y(s))$，小微元的质量为 $\rho\mathrm{d}s\Rightarrow$ 静力矩微元

$$\mathrm{d}M_x=y(s)\rho\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}M_y=x(s)\rho\mathrm{d}s,$$

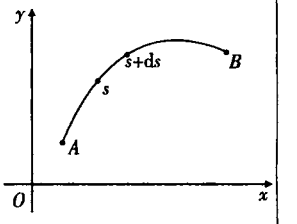


图 3.23

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}$ 对 x,y 轴的静力矩 $M_x=\int_0^l y(s)\rho\mathrm{d}s,\quad M_y=\int_0^l x(s)\rho\mathrm{d}s,$

$\overset{\frown}{AB}$ 的质量 $M=\int_0^l\rho\mathrm{d}s=\rho l$，设 $\overset{\frown}{AB}$ 的质心为 $(\bar{x},\bar{y})$，则

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{1}{l}\int_0^l x(s)\mathrm{d}s,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{l}\int_0^l y(s)\mathrm{d}s.$$

若 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程是 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，

其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续的导数，由变量替换及弧微分公式得 $\overset{\frown}{AB}$ 的质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 为

$$\bar{x}=\frac{\int_\alpha^\beta\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t},\quad \bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t}.$$

▶2. 平面图形的质心（形心）

设有平面薄片，所占的平面图形是 $D:a\leqslant x\leqslant b,g(x)\leqslant y\leqslant f(x)$，其中 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，质量均匀分布，不妨设面密度为 1. 求它的质心 $(\bar{x},\bar{y})$. 见图 3.24.

$\forall$ 取 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 与之相应的小窄条，其质量为 $[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$，质心为 $\left(x,\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)]\right)$，静力矩为

$$\mathrm{d}M_y=x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}M_x=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x.$$

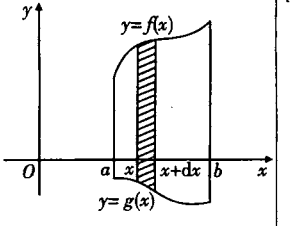


图 3.24

整个图形的静力矩为 $M_y=\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,\quad M_x=\frac{1}{2}\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x.$

总质量 $M=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$，因此，质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 为

www.TopSage.com

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x},\qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x}.$$

该均匀平面薄片的质心也叫做这平面薄片所占的平面图形 D 的形心. 因此,求质心与求形心有相同的公式. 有关例子参见题型十五之3.

(五) 函数在区间上的平均值

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值为 $\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 有关原函数与定积分概念的命题

【例 3.34】 设 $f(x)$ 是连续函数,并满足 $\int f(x)\sin x\mathrm{d}x=\cos^2x+C$,又 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,且满足 $F(0)=0$,则 $F(x)=$ _____.

【分析】 按题意 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 为求 $f(x)$,将题设等式求导得

$$f(x)\sin x=\left[\int f(x)\sin x\mathrm{d}x\right]'=(\cos^2x+C)'=-2\sin x\cos x,$$

从而 $f(x)=-2\cos x$,于是

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x -2\cos t\mathrm{d}t=-2\sin x.$$

【例 3.35】 设 $f(x)$ 为连续函数,且满足 $f(x)=x+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)=$ _____.

【分析】 定积分是积分和的极限,当被积函数和积分区间确定后,它就是一个确定的数. 从而由题设知可令 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=A$,只要求得常数 A 就可得到函数 $f(x)$ 的表达式. 为此将题设等式两边同乘 x 并从 0 到 1 求定积分,就有

$$A=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 Ax\mathrm{d}x\quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}A\quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{2}{3}.$$

故 $f(x)=x+\frac{2}{3}$.

题型二 积分值的比较或积分值符号的判断

【例 3.36】 设 $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$, $N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\mathrm{d}x$,则有

(A) $M<1<N$. (B) $M<N<1$. (C) $N<M<1$. (D) $1<M<N$.

【分析】 $\sin(\sin x),\cos(\cos x)$ 均在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,由 $\sin x\leqslant x\Rightarrow\sin(\sin x)\lneqq\sin x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,

$\Rightarrow$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = 1$，即 $M < 1$.

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\,dx \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)\,dt > \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt = 1$,

即 $N > 1$. 因此选(A).

【例 3.37】 比较定积分 $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}dx$ 与 $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{-\sin x}{2\sqrt{x}}dx$ 的大小.

【解】 当两个定积分的积分区间相同且被积函数连续时，只需比较被积函数的大小就可比较定积分的大小. 这里被积函数连续，但积分区间不同，应先通过变量替换转化为积分区间相同的情形之后再比较被积函数的大小.

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{-\sin x}{2\sqrt{x}}dx \xrightarrow{t=x-\pi} \int_0^{\pi}\frac{-\sin(t+\pi)}{2\sqrt{t+\pi}}dt = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t+\pi}}dt = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2\sqrt{x+\pi}}dx < \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}dx .$$

【例 3.38】 函数 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt$，其中 $f(t) = e^{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)\cos 2t$，则 $F(x)$

(A) 为正数. (B) 为负数. (C) 恒为零. (D) 不是常数.

【分析】 由于被积函数连续且以 π 为周期(2π 也是周期)，故 $F(x) = F(0) = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} f(t)\,dt$，即 $F(x)$ 为常数. 由于被积函数是变号的，为确定积分值的符号，可通过分部积分转化为被积函数定号的情形，即

$$2\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \int_0^{\pi} e^{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)\,d(\sin 2t) = \int_0^{\pi} -\sin^2 2t\, e^{\sin^2 t}(2+\sin^2 t)\,dt < 0,$$

故应选(B).

题型三 估计积分值

【解题思路】 估计积分值常用以下方法：假设被积函数连续，

1° 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，$f(x)$ 不恒为常数，则

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a);$$

2° 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，$g(x) \geqslant 0$，$f(x)g(x) \not\equiv Mg(x)$，$mg(x)$ $(x \in [a,b])$，则

$$m\int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b f(x)g(x)\,dx < M\int_a^b g(x)\,dx;$$

3° 若 $f(x) \leqslant g(x)$ 且 $f(x) \not\equiv g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$，则 $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$.

【例 3.39】 证明下列不等式：

(Ⅰ) $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$；(Ⅱ) $\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}\,dx < \frac{\pi^2}{32}$.

【证明】 (Ⅰ) 用微分学方法或配方法易求得 $f(x) = 2+x-x^2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $\frac{9}{4}$，最小值为 2. 于是 $\frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(x \in (0,1))$，则 $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

www.TopSage.com

(Ⅱ)注意 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时,$0 < x < \tan x < 1$,则

$$\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}.$$

题型四　有关原函数的存在性问题

【例 3.40】 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义,$c \in (a,b)$,又 $f(x)$ 在 $(a,b)\setminus\{c\}$ 连续,c 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 问 $f(x)$ 在 (a,b) 是否存在原函数?为什么?

【分析】 $f(x)$ 在 (a,c) 与 (c,b) 上连续,分别存在原函数,于是关键是看 $x = c$ 处的情况.

【解】 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 的原函数. 考察

$$\lim_{x\to c}\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \xlongequal[\text{(洛必达法则)}]{(\frac{0}{0})} \lim_{x\to c}F'(x) = \lim_{x\to c}f(x),$$

于是 $F'_+(c) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x)$, $F'_-(c) = \lim\limits_{x\to c-0} f(x)$.

由 $x = c$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to c+0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$ 存在但不相等,即 $F'_+(c) \neq F'_-(c)$.

或 $\exists \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \lim\limits_{x\to c-0} f(x) \neq f(c)$, 即 $F'(c) \neq f(c)$.

这都与 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 的原函数相矛盾. 因此 $f(x)$ 在 (a,b) 不存在原函数.

【例 3.41】 设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上,$c \in (a,b)$,又设 $H(x)$,$G(x)$ 分别在 $(a,c]$,$[c,b)$ 连续,且分别在 (a,c) 与 (c,b) 是 $f(x)$ 的原函数. 令

$$F(x) = \begin{cases} H(x), & a < x < c, \\ G(x) + c_0, & c \leqslant x < b, \end{cases}$$ 其中选常数 c_0,使得 $F(x)$ 在 $x = c$ 处连续.

就下列情形回答 $F(x)$ 是否是 $f(x)$ 在 (a,b) 的原函数.

(Ⅰ)$f(x)$ 在点 $x = c$ 处连续; (Ⅱ) 点 $x = c$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点;

(Ⅲ) 点 $x = c$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

【分析】 关键就看是否有 $F'(c) = f(c)$.

【解】 (Ⅰ)$F'(c) = \lim\limits_{x\to c}\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim F'(x) = \lim\limits_{x\to c}f(x) = f(c)$,

因此,$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 的原函数.

(Ⅱ)$F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 (a,b) 的原函数,因为在这种情形下 $f(x)$ 在 (a,b) 不存在原函数(见【例 3.40】).

(Ⅲ) 在这种情形下结论与 $f(x)$ 的表达式有关,需要对问题作具体分析.

题型五　求分段函数的原函数

【例 3.42】 已知 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & x < 0, \\ A, & x = 0, \\ \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \dfrac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在原函数,求常数 A 以及 $f(x)$ 的原函数.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

【解】 易求得

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{2} \overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0-} \frac{-x\sin x}{2x} = 0.$$

仅当 $A = 0$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 于是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,从而存在原函数. 当 $A \neq 0$ 时 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不存在原函数. 因此求得 $A = 0$. 下求 $f(x)$ 的原函数.

方法 1° 被积函数是分段定义的连续函数,它存在原函数,也是分段定义的. 由于原函数必是连续的,我们先分段求出原函数,然后把它们连续地粘合在一起,就构成一个整体的原函数(见【例 3.41】).

当 $x < 0$ 时,

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx = \int \frac{1}{x}d\sin x + \sin x d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} + C_1;$$

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{2}\right]dx = \int[\ln(1+x)-x]d\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x\\ &= \frac{1}{x}[x - \ln(1+x)] + \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)dx + \frac{1}{2}x\\ &= 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} - \ln(1+x) + \frac{1}{2}x + C_2.\end{aligned}$$

取 $C_1 = 0$,随之取 $C_2 = 1$,于是当 $x \to 0^-$ 时与 $x \to 0^+$ 时 $\int f(x)\,dx$ 的极限同为 1,这样就得到 $f(x)$ 的一个原函数

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0,\\ 1, & x = 0,\\ 2 - \dfrac{\ln(1+x)}{x} - \ln(1+x) + \dfrac{1}{2}x, & x > 0. \end{cases}$$

因此 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, 其中 C 为 $\forall$ 常数.

方法 2° 由 $f(x)$ 是连续函数知 $f(x)$ 一定存在原函数,并且 $\forall$ 常数 a 变上限定积分 $\int_a^x f(t)\,dt$ 均为 $f(x)$ 的一个原函数. 由于 $x = 0$ 是分段函数 $f(x)$ 的分界点,因此可取 $a = 0$. 下面求 $\int_0^x f(t)\,dt$:

当 $x < 0$ 时,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}dt = \int_0^x d\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{\sin t}{t}\Big|_{0-}^{x} = \frac{\sin x}{x} - 1;$$

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^x\left[\frac{\ln(1+t)-t}{t^2} + \frac{1}{2}\right]dt = \int_0^x[\ln(1+t)-t]d\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}x\\ &= \frac{1}{t}[t - \ln(1+t)]\Big|_{0+}^{x} + \int_0^x \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1+t} - 1\right)dt + \frac{1}{2}x\\ &= 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} - \ln(1+t)\Big|_0^x + \frac{1}{2}x = 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} - \ln(1+x) + \frac{1}{2}x.\end{aligned}$$

于是求得 $f(x)$ 的一个原函数

www.TopSage.com

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}-\ln(1+x)+\dfrac{1}{2}x, & x>0.\end{cases}$$

因此 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中 C 为 $\forall$ 常数.

题型六 各类被积函数不定积分的计算

【例 3.43】 计算下列不定积分：

(Ⅰ) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；　(Ⅱ) $\int\frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；

(Ⅲ) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ (a\neq b)$；　(Ⅳ) $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x\ (a^2+b^2\neq 0)$；

(Ⅴ) $\int\frac{(1+x^2)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　(Ⅵ) $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

【解】 (Ⅰ) 采用凑微分法，并将被积函数变形，则有

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x^2}+C.$$

(Ⅱ) 如果令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$，计算将较为复杂，而将分子有理化则较简便. 于是

$$\int\frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

对于右端第一个积分，使用凑微分法，即可得到

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\sqrt{1-x^2}+C,$$

而第二个积分可使用代换 $x=\sin t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C,$$

因此 $\int x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{1-x^2}+C$.

(Ⅲ) **方法 1°** 配方法.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a+b)x-x^2-ab}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{|a-b|}+C=\arcsin\frac{2x-a-b}{|a-b|}+C.$$

www.TopSage.com

方法 2° 换元法，消去根式.

设 $b > a$（当 $a > b$ 时，结果相同），并令 $t = \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$，则 $x = \dfrac{a+bt^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x = \dfrac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$.

于是 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{1}{x-a}\cdot\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C .$$

评注 （Ⅰ）～（Ⅲ）为无理函数的积分，一般都是通过变量替换去掉根式，然后利用基本积分表或能直接求出原函数，第（Ⅰ）小题就是一例.

（Ⅳ）对此三角有理式，如果分子是 $a\sin x + b\cos x$ 与 $(a\sin x + b\cos x)' = a\cos x - b\sin x$ 的线性组合，就很容易求其原函数，故设

$$a_1\sin x + b_1\cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x).$$

为此应有 $\begin{cases} aA - bB = a_1, \\ bA + aB = b_1, \end{cases}$ 解得 $A = \dfrac{aa_1 + bb_1}{a^2+b^2}$，$B = \dfrac{ab_1 - ba_1}{a^2+b^2}$.

故 $$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}x = A\int \mathrm{d}x + B\int \frac{(a\sin x + b\cos x)'}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{aa_1 + bb_1}{a^2+b^2}x + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin x + b\cos x| + C .$$

评注 此三角有理式易化成形如 $\int R(\tan x)\mathrm{d}x$ 的积分，再令 $t = \tan x$，化成有理式的积分，后续留给自己完成.

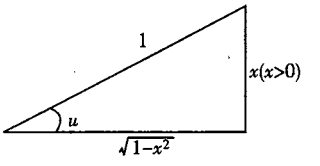
（Ⅴ）记原式为 J，先分项：

$$J = \int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{记}} J_1 + J_2.$$

易凑微分得 $J_2 = \int \arcsin x \mathrm{d}\arcsin x = \dfrac{1}{2}\arcsin^2 x + C.$

下求 J_1.

方法 1° 作变量替换 $x = \sin u\left(u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，则



$$J_1 = \int \frac{u}{\sin^2 u\cos u}\cos u\mathrm{d}u = -\int u\mathrm{d}\cot u$$

$$= -u\cot u + \int \frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = -u\cot u + \ln|\sin u| + C.$$

变量还原得 $J_1 = -\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + C.$

方法 2° 作分部积分，注意

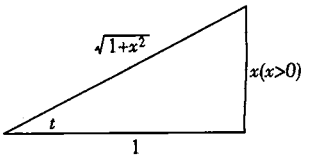
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\operatorname{sgn}x = -\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\operatorname{sgn}x + C = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} + C,$$

于是 $$J_1 = \int \arcsin x \mathrm{d}\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + C.$$

www.TopSage.com

因此，$J=\frac{1}{2}\arcsin^2x-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C$.



（Ⅵ）记原积分为 J.

方法 1° 作变量替换 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$J=\int\ln\left(\tan t+\frac{1}{\cos t}\right)\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}}dt=\int\ln\left(\tan t+\frac{1}{\cos t}\right)d\sin t.$$

再分部积分得 $J=\sin t\ln\left(\tan t+\frac{1}{\cos t}\right)-\int\frac{\sin t}{\tan t+\frac{1}{\cos t}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)dt$

$$=\sin t\ln\left(\tan t+\frac{1}{\cos t}\right)-\int\frac{\sin t}{\cos t}dt=\sin t\ln\left(\tan t+\frac{1}{\cos t}\right)+\ln|\cos t|+C.$$

变量还原得 $J=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

方法 2° 作分部积分．注意

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}\xlongequal{x=\tan t}\int\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}}dt=\int\cos t dt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C,$$

于是 $J=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

题型七　各类被积函数定积分的计算

【例 3.44】 计算下列定积分：

（Ⅰ）$\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx$；　　（Ⅱ）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{1+\sin x+\cos x}$；

（Ⅲ）$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx$；　　（Ⅳ）$\int_1^{16}\arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$；

（Ⅴ）$\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$　$(a>0,b>0)$.

【解】 （Ⅰ）这是一个含根式的积分，首先应该通过变量替换去掉根式．

方法 1° 令 $\sqrt{1-e^{2x}}=t$，则 $x=\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$，$dx=\frac{-t}{1-t^2}dt$．于是

$$\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{-t^2}{1-t^2}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln(2+\sqrt{3}).$$

方法 2° 令 $e^x=\sin t$，则 $x=\ln\sin t$，$dx=\frac{\cos t}{\sin t}dt$．于是

$$\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{1-\cos^2 t}d\cos t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-\cos^2 t}\right)d\cos t$$

www.TopSage.com

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2+\sqrt{3}).$$

（Ⅱ）**方法** 1° 万能代换．令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $x = 2\arctan t$，$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$．故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\sin x+\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2t}{(1+t)(1+t^2)}dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \left[\arctan t + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\right]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 .$$

方法 2° 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\cos t+\sin t}dt$．于是

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\right)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} .$$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\frac{x}{2}} = \ln\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2$，

因此 $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

（Ⅲ）由于 $\sqrt{\sin x - \sin^3 x} = \sqrt{\cos^2 x \sin x} = |\cos x|\sqrt{\sin x}$，故被积函数为分段函数，其分界点为 $\frac{\pi}{2}$.

于是 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\sqrt{\sin x}dx = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{3}$.

（Ⅳ）**方法** 1° 作幂函数替换后再分部积分，则有

$$\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}dx \xrightarrow[x=t^2]{t=\sqrt{x}} \int_1^4 \arctan\sqrt{t-1}dt^2$$

$$= \left(t^2\arctan\sqrt{t-1}\right)\Big|_1^4 - \int_1^4 t^2 \frac{1}{1+(t-1)} \frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt$$

$$= \frac{16}{3}\pi - \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{t-1+1}{\sqrt{t-1}}dt = \frac{16}{3}\pi - \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)dt$$

$$= \frac{16}{3}\pi - \left[\frac{1}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{t-1}\right]\Big|_1^4 = \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3} .$$

方法 2° 作三角替换去根号后再分部积分．令 $\sqrt{x} = \sec^2 t$ $\left(0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}\right)$，即 $x = \sec^4 t$，$\sqrt{\sqrt{x}-1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \tan t$，即 $t = \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}$ ．当 $x = 1$ 时 $t = 0$，当 $x = 16$ 时 $t = \frac{\pi}{3}$，当 $1 \leqslant x \leqslant 16$ 时 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}$，代入所求积分得

$$\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t d\sec^4 t = t\sec^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^4 t dt$$

$$= \frac{16}{3}\pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\tan^2 t)d\tan t = \frac{16}{3}\pi - \left(\tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3} .$$

（Ⅴ）注意被积函数以 π 为周期，为偶函数．于是有

$$I \overset{\triangle}{=} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan x)}{b^2 + a^2\tan^2 x}$$

www.TopSage.com

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{ab\left[1+\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2\right]} = \frac{2}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{\pi}{ab}.$$

大家网 TopSage.com

评注 ① 定积分经变量替换一定要同时更换积分限，为了防止积分限变更时出现错误，可以将新旧积分限列成表格的形式. 例如，

第(Ⅰ)小题的方法1°可以表为：

x	0	$-\ln 2$
t	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

；方法2°可以表为：

x	0	$-\ln 2$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

.

② 如果对题(Ⅴ)在区间$[0,\pi]$上按如下方式用牛顿-莱布尼兹公式是错误的，即

$$I \triangleq \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{ab\left[1+\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2\right]} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

因为$\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)$在$x=\frac{\pi}{2}$无定义，它只是分别在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$上是$\frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$的原函数，因而不能在$[0,\pi]$上对积分$I$应用牛顿-莱布尼兹公式. 但可按如下方法计算：

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} + \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} = \frac{1}{ab}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{ab}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{ab},$$

这就是分段积分后用了推广的牛顿-莱布尼兹公式即【定理3.2】的推论.

③ 按不定积分法，我们求得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{1}{ab}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{1+\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$$

这个答案就算可以了. $f(x) = \frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$在$[0,\pi]$连续，一定存在原函数，而$\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)$并不是$f(x)$在$[0,\pi]$上的一个原函数，因为它在$x=\frac{\pi}{2}$无定义，只是分别在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$与$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$是$f(x)$的一个原函数. 我们可按【例3.42】中的"粘合"法得到$f(x)$在$[0,\pi]$上的一个原函数，即

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{ab}\left[\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) - \frac{\pi}{2}\right], & x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{ab}\left[\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + \frac{\pi}{2}\right], & x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]. \end{cases}$$

www.TopSage.com

题型八　求形如$\int_a^b\left[f(x)\int_a^x g(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$的积分

【例 3.45】　求下列积分：

（Ⅰ）设$f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$，求$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$；

（Ⅱ）设函数$f(x)$在$[0,1]$连续且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，求$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)\,f(y)\mathrm{d}y$.

【分析】　该例中的两个小题均是求形如$\int_a^b\left[f(x)\int_a^x g(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$的积分，它可看作区域$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant x\}$上一个二重积分的累次积分，有时通过交换积分次序而求得它的值．作为定积分，若$f(x)$的原函数易求得$F'(x)=f(x)$，则可由分部积分得

$$\int_a^b\left[f(x)\int_a^x g(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_a^x g(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}F(x)=\left[F(x)\int_a^x g(y)\mathrm{d}y\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

若右端易求，则可求得左端的值．

【解】　（Ⅰ）$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}f(x)$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int_0^1 x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}=\frac{1}{6}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-1\right).$$

（Ⅱ）令$\Phi(x)=\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$，则$\Phi'(x)=-f(x)$，于是

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)\,f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]f(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\Phi(x)\mathrm{d}\Phi(x)=-\frac{1}{2}\Phi^2(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}A^2.$$

评注　在这两个小题中均可把所求积分看成是一个二重积分的累次积分，通过交换积分次序后求得它们的值．

如题（Ⅰ）：原式$=-\int_0^1\left(x^2\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=-\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$

$\xrightarrow[\text{图 3.25}]{\text{交换积分次序}}-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{3}y^3\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

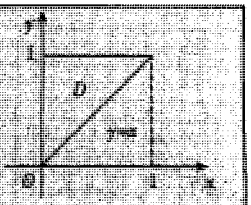


图 3.25

题（Ⅱ）的这种解法可参见第九章中题型训练之七，14 题．

题型九　由函数方程求积分

【例 3.46】　设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且$f(x)=x,x\in[0,\pi)$，求$\int_\pi^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

【分析】　由于题目只给出了$f(x)$在区间$[0,\pi)$上的具体表达式，为计算在$[\pi,3\pi]$上的积分值，就应该通过换元法使其积分区间换到$[0,\pi]$上．另外，也可以通过$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$及$f(x)$在$[0,$

www.TopSage.com

π) 上的表达式,求出 $f(x)$ 在 $[\pi,3\pi)$ 上的表达式,然后再求积分值.这里所采用的是第一种方法,读者可采用第二种方法计算.

【解】 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{3\pi} f(x-\pi)\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{t=x-\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} t\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_{\pi}^{2\pi} f(t-\pi)\mathrm{d}t \xlongequal{u=t-\pi} \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_0^{\pi} f(u)\mathrm{d}u = \pi^2 - 2 .$$

题型十 反常积分(广义积分)的计算

【例 3.47】 计算下列反常积分:

(Ⅰ) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$;　　(Ⅱ) $\int_0^a x^3\sqrt{\frac{x}{a-x}}\mathrm{d}x$ $(a>0)$;

(Ⅲ) $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$;　　(Ⅳ) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$.

【解】 (Ⅰ)这是一个反常积分,可以通过求原函数的方法计算.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x-3}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2(x-1)}+1} = \mathrm{e}^{-2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x-1})}{\mathrm{e}^{2(x-1)}+1}$$

$$= \mathrm{e}^{-2}\arctan \mathrm{e}^{x-1}\Big|_1^{+\infty} = \mathrm{e}^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}.$$

(Ⅱ)这是一个瑕积分,其瑕点为 a,由于被积函数中含有根式,应通过变量替换将根式去掉.可作三角函数替换,令 $x = a\sin^2 t$,当 $x\in[0,a]$ 时 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,于是

$$\int_0^a x^3\sqrt{\frac{x}{a-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^6 t\sqrt{\frac{a\sin^2 t}{a(1-\sin^2 t)}}a\cdot 2\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$= 2a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\mathrm{d}x = 2a^4 I_8 = 2a^4\cdot\frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{7!!}{8!!}a^4\pi .$$

(Ⅲ) $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) = -\frac{x}{1+\mathrm{e}^{x}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{x}}$

$$= -\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty} = \ln 2 .$$

(Ⅳ)对这个无穷积分可以通过将被积函数变形求出原函数的方法计算.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}} = -\int_1^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \left[-\frac{1}{x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\Big|_1^{+\infty} = 1-\ln 2 .$$

评注 在解第(Ⅲ)小题时,经常出现的错误是直接使用分部积分法,而忽视反常积分运算法则成立的条件"收敛",写成:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} .$$

采用这样的做法,右端前一项趋于 ∞,后一个反常积分也不收敛,实际上是 $\infty-\infty$ 型不定式.为避免出现这类错误,可以再回到无穷限反常积分的定义,即

www.TopSage.com

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x}{1+e^{-x}}\Big|_0^b-\int_0^b\frac{dx}{1+e^{-x}}\right)$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b}{1+e^{-b}}-\ln(1+e^{x})\Big|_0^b\right]=\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b}{1+e^{-b}}-\ln(1+e^{b})\right]$$

$$=\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b}{1+e^{-b}}-b-\ln(1+e^{-b})\right]=\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\frac{-e^{-b}b}{1+e^{-b}}=\ln 2.$$

在解第(Ⅳ)小题时也有类似的问题.若将被积函数分解,即

$$\frac{1}{x^2(1+x)}=\frac{1+x-x}{x^2(1+x)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1+x-x}{x(1+x)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1},$$

则不可写成 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}-\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x}$.

因为右端有两个积分均是发散的.为了避免这个错误也必须回到无穷限反常积分的定义,即

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-\ln x+\ln(1+x)\right]\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\left(-\frac{1}{x}+\ln\frac{1+x}{x}\right)\Big|_1^{+\infty}=1-\ln 2,$$

题型十一　证明积分等式

【解题思路】 证明积分等式常常利用变量替换法与分部积分法及积分技巧等来证明.对于变量替换法,其所作代换主要根据所要证的等式两边的被积函数或两端的积分上下限来确定.

【例 3.48】 假定所涉及的反常积分(广义积分)收敛,证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx. \tag{3.21}$$

【证明】 令 $t=x-\frac{1}{x}$,则当 $x\to+\infty$ 时,$t\to+\infty$,$x\to 0+$ 时,$t\to-\infty$;$x\to 0-$ 时,$t\to+\infty$;$x\to-\infty$ 时,$t\to-\infty$,故应以 0 为分界点将(3.21)式左端分成两部分,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{0}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+\int_0^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx.$$

而且将 x 与 t 的关系反解出来,即得 $x=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4}}{2}$.同时,当 $x>0$ 时,$x=\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$,$dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt$;当 $x<0$ 时,$x=\frac{t-\sqrt{t^2+4}}{2}$,$dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt$.因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx,$$

即(3.21)式成立.

【例 3.49】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数,求证:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx.$$

【分析】 很自然的想法是用分部积分法,但要注意"小技巧":

www.TopSage.com

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d(x-b), \text{或} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d(x-a),$$

这样改写后分部积分的首项简单. 这一点考生应熟练掌握.

【证明】 连续利用分部积分有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,d(x-b) = f(a)(b-a) - \int_a^b f'(x)(x-b)\,d(x-a)\\ &= f(a)(b-a) + \int_a^b (x-a)\,d[f'(x)(x-b)]\\ &= f(a)(b-a) + \int_a^b (x-a)\,df(x) + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx\\ &= f(a)(b-a) + f(b)(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx,\end{aligned}$$

移项后得 $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx.$$

题型十二 证明积分不等式

【解题思路】 证明积分不等式常常用:① 定积分的性质;② 分部积分法;③ 引进辅助函数(相应的变限积分);④ 把一元函数积分转化为二元函数的二重积分等方法来证明. 有的也可用泰勒公式或牛顿-莱布尼兹公式.

【例3.50】 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,证明:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx. \tag{3.22}$$

【证明】 此不等式通常的证明方法是引入参数,即考虑 $[f(x)+tg(x)]^2$. 由于

$$\int_a^b [f(x)+tg(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + t^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0,$$

因此,其判别式 $\Delta = \left[2\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant 0$,即(3.22)式成立.

【注】 本题也可以采用重积分的方法来证明,略.

【例3.51】 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且同为单调不减(或同单调不增)函数,证明:

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3.23}$$

【证明】 根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同为增(或同为减)函数的假定,则无论 x 与 y 的大与小,定有

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geqslant 0.$$

两边对 x 与 y 同时求积分,则有

$$\int_a^b \left(\int_a^b [f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y)]\,dx\right)dy \geqslant 0,$$

即

$$2\int_a^b \left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]dy \geqslant \int_a^b \left[\int_a^b f(x)g(y)\,dx\right]dy + \int_a^b \left[\int_a^b f(y)g(x)\,dx\right]dy,$$

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx,$$

因此(3.23)式成立.

评注 ①【例3.50】与【例3.51】均是积分不等式的证明,其证明过程都是从有确定符号的被积函数开始的. 这里被积函数常见是 $[f(x)+tg(x)]^2 \geqslant 0$,$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geqslant 0$ 有了这样的开端,下面的过程应该就是自然的.

② 有时一元函数的积分问题转化为二元函数的二重积分问题却带来方便.【例 3.50】与【例 3.51】也可用这种方法来证明.

TopSage.com

【例 3.52】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有二阶连续导数,$M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$,证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24}M .$$

【分析】 $J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) = \int_a^b\left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}(x-a) + \int_{\frac{a+b}{2}}^b\left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}(x-b),$$

用分部积分法导出 J 与 $f''(x)$ 的有关积分的关系.或由泰勒公式导出 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f(x)$, $f'(x)$ 及其二阶导数的关系,然后再积分.

【证法一】 分部积分两次得

$$J = \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}(x-a) + \int_{\frac{a+b}{2}}^b\left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}(x-b)$$

$$= -\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)(x-a)\mathrm{d}x - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(x)(x-b)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)\mathrm{d}(x-a)^2 - \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(x)\mathrm{d}(x-b)^2$$

$$= -\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2 + \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f''(x)(x-a)^2\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2 + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f''(x)(x-b)^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f''(x)(x-a)^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f''(x)(x-b)^2\mathrm{d}x,$$

于是 $$|J| \leqslant \frac{M}{2}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-b)^2\mathrm{d}x\right] = \frac{M}{24}(b-a)^3.$$

【证法二】 在 $x_0 = c \xlongequal{记} \frac{a+b}{2}$ 处 $f(x)$ 展成泰勒公式

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2,$$

其中 ξ 在 x 与 c 之间.将上式积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'(c)\int_a^b(x-c)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-c)^2\mathrm{d}x.$$

注意 $$\int_a^b(x-c)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-c)^2\Big|_a^b = 0,$$

$$\left|\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-c)^2\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}M\int_a^b(x-c)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}M(x-c)^3\Big|_a^b = \frac{M}{24}(b-a)^3,$$

因此 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M}{24}(b-a)^3.$$

评注 本题属于用分部积分法证明积分不等式.实质上是使用分部积分法证明一个等式,然后再给出积分估计.

【例 3.53】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数,求证:

www.TopSage.com

$$\max_{[a,b]}|f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x .$$

【分析与证明】 可设 $\max\limits_{[a,b]}|f(x)| = |f(x_0)|$,即证

$$(b-a)|f(x_0)| \leqslant \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + (b-a)\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

即证 $$\left|\int_a^b f(x_0)\,\mathrm{d}x\right| - \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant (b-a)\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x .$$

注意 $$\left|\int_a^b f(x_0)\,\mathrm{d}x\right| - \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b [f(x_0) - f(x)]\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\int_a^b \left[\int_x^{x_0} f'(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = (b-a)\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x .$$

故得证.

评注 这里的关键步骤是用牛顿-莱布尼茨公式:$f(x_0) - f(x) = \int_x^{x_0} f'(t)\,\mathrm{d}t$.

题型十三 关于变限积分的讨论

【例 3.54】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,且 $F(x) = \int_0^x (x-2t) f(t)\,\mathrm{d}t$. 证明:

(Ⅰ)若 $f(x)$ 为偶函数,则 $F(x)$ 也是偶函数;(Ⅱ)若 $f(x)$ 单调不增,则 $F(x)$ 单调不减.

【证明】 (Ⅰ)令 $t = -u$,则

$$F(-x) = \int_0^{-x} (-x-2t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (x-2u) f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x (x-2u) f(u)\,\mathrm{d}u = F(x).$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

(Ⅱ)由于被积函数连续,所以函数 $F(x)$ 可导,且

$$F'(x) = \left[x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x 2t f(t)\,\mathrm{d}t\right]' = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + (x-2x) f(x)$$

$$= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x f(x) = \int_0^x [f(t) - f(x)]\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

因此 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调不减.

【例 3.55】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,求证:$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(u)\,\mathrm{d}u$ 在 $[a,b]$ 上连续,其中 $x_0 \in [a,b]$.

【证明】 $\forall x, x+\Delta x \in [a,b]$,考察

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_{x_0}^x f(u)\,\mathrm{d}u = \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界. 设 $|f(x)| \leqslant M (x \in [a,b])$,则

$$|\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(u)|\,\mathrm{d}u\right| \leqslant M|\Delta x| .$$

因此,$\forall x, x+\Delta x \in [a,b]$,有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)] = 0$,即 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

【例 3.56】 设 $F(x) = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$,试求:

(Ⅰ)$F(x)$ 的极值;(Ⅱ)曲线 $y = F(x)$ 的拐点的横坐标;(Ⅲ)$\int_{-2}^3 x^2 F'(x)\,\mathrm{d}x$.

【解】 (Ⅰ)由 $F'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^4}\begin{cases} <0, & x<0, \\ =0, & x=0, \\ >0, & x>0 \end{cases}$,即知 $F(x)$ 在点 0 取极小值 0,且无其他极值.

www.TopSage.com

(Ⅱ)$F''(x)=2(1-4x^4)e^{-x^4}$,注意到仅当$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时$F''(x)=0$,且在$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$两侧$F''(x)$变号,即知$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$为曲线$y=F(x)$的拐点的横坐标.

(Ⅲ)注意到$x^2F'(x)$为奇函数,因此

$$\int_{-2}^{3}x^2F'(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2F'(x)dx+\int_{2}^{3}x^2F'(x)dx=2\int_{2}^{3}x^3e^{-x^4}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{3}e^{-x^4}dx^4=-\frac{1}{2}e^{-x^4}\Big|_{2}^{3}=\frac{1}{2}(e^{-16}-e^{-81}).$$

题型十四　一元函数积分学的几何应用

▶1. 求平面曲线的弧长与曲率

【例3.57】 求曲线$r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$的全长.

【解】 $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$以$6\pi$为周期,$\theta\in[0,3\pi]\Leftrightarrow\frac{\theta}{3}\in[0,\pi]$,$r\geqslant0$;$\theta\in(3\pi,6\pi)\Leftrightarrow\frac{\theta}{3}\in(\pi,2\pi)$,$r<0$. 只需考虑$\theta\in[0,3\pi]$.

$$r'=3a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}=a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3},\quad r^2+r'^2=a^2\sin^4\frac{\theta}{3},\text{则}$$
$$L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=3a\int_0^{\pi}\sin^2tdt=\frac{3a}{2}\pi.$$

【例3.58】 求曲线$r=a(1+\cos\theta)$的曲率.

【解】 曲线的参数方程为

$$x=r\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta,$$
$$x'=-a\sin\theta(1+2\cos\theta)=-a(\sin\theta+\sin2\theta),y'=a(\cos\theta+\cos2\theta),$$
$$x'^2+y'^2=a^2 2(1+\cos\theta)=2ar,x''=-a(\cos\theta+2\cos2\theta),y''=-a(\sin\theta+2\sin2\theta),$$
$$x'y''-x''y'=a^2[(\sin\theta+\sin2\theta)(\sin\theta+2\sin2\theta)+(\cos\theta+\cos2\theta)(\cos\theta+2\cos2\theta)]$$
$$=3a^2(1+\cos\theta)=3ar.$$

因此,曲率 $K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3ar}{(2ar)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2ar}}$.

▶2. 求平面图形的面积

【例3.59】 (Ⅰ)下列可表示由双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$围成平面区域的面积的是

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta$. (B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta$. (C) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos2\theta}d\theta$. (D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos2\theta)^2d\theta$.

(Ⅱ)由曲线$x=a(t-\sin t)$,$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant2\pi)$(摆线)及$x$轴围成平面图形的面积$S=$_____.

【分析】 (Ⅰ)双纽线的极坐标方程是:$r^4=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$即$r^2=\cos2\theta$. 当$\theta\in[-\pi,\pi]$时,仅当$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}$,$|\theta|\geqslant\frac{3}{4}\pi$时才有$r\geqslant0$(图3.26).

由于曲线关于极轴与y轴均对称,如图3.26,只需考虑$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$部分. 由对称性及广义扇形面积计算公式得

www.TopSage.com

$$S = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \mathrm{d}\theta .$$

故应选(A).

(Ⅱ)当 $t \in [0,2\pi]$ 时,曲线与 x 轴的交点是 $x = 0, 2\pi a$(相应于 $t = 0, 2\pi$),曲线在 x 轴上方,见图 3.27. 于是图形的面积

$$S = \int_0^{2\pi a} y(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x = a(t - \sin t)} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)[a(t - \sin t)]' \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = 3\pi a^2.$$

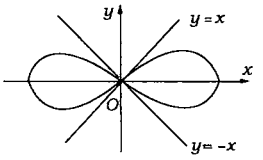


图 3.26

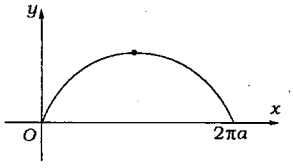


图 3.27

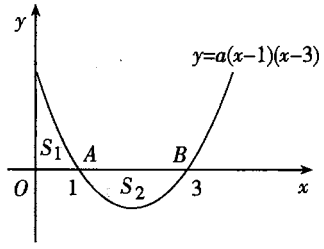


图 3.28

【例 3.60】 已知一条抛物线通过 x 轴上两点 $A(1,0), B(3,0)$,求证:两坐标轴与该抛物线所围成的面积等于 x 轴与该抛物线所围成的面积.

【分析与证明】 1)写出抛物线方程 $y = a(x-1)(x-3)$($a > 0$ 或 $a < 0$ 为常数),如图 3.28 所示.

2)求两坐标轴与抛物线所围面积 S_1,即

$$S_1 = \int_0^1 |a(x-1)(x-3)|\mathrm{d}x = |a|\int_0^1 (1-x)(3-x)\mathrm{d}x$$

$$= |a|\int_0^1 (3 - 4x + x^2)\mathrm{d}x = |a|\left(3 - \frac{4}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}|a|.$$

3)求 x 轴与该抛物线所围面积 S_2,即

$$S_2 = \int_1^3 |a(x-1)(x-3)|\mathrm{d}x = |a|\int_1^3 (x-1)(3-x)\mathrm{d}x$$

$$= |a|\int_1^3 \frac{1}{2}(3-x)\mathrm{d}(x-1)^2 = \frac{1}{2}|a|\int_1^3 (x-1)^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{|a|}{2} \cdot \frac{1}{3}(x-1)^3 \Big|_1^3 = \frac{4}{3}|a|.$$

4)因此,$S_1 = S_2$.

▶3. 求旋转体的体积

【例 3.61】 求下列旋转体的体积 V:

(Ⅰ)由曲线 $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ 与 $y \geqslant x$ 确定的平面图形绕直线 $x = 2$ 旋转而成的旋转体;

(Ⅱ)由曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转而成的旋转体.

【解】 (Ⅰ)对该平面图形,我们可以作垂直分割也可作水平分割.

方法 1° 作水平分割. 该平面图形如图 3.29. 上半圆方程写成 $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$. 任取 y 轴上 $[0,1]$ 区间内的小区间 $[y, y + \mathrm{d}y]$,相应的微元绕 $x = 2$ 旋转而成的立体体积为

$$\mathrm{d}V = \{\pi[2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})]^2 - \pi(2 - y)^2\}\mathrm{d}y,$$

于是

$$V = \pi\int_0^1 [2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})]^2\mathrm{d}y - \pi\int_0^1 (2 - y)^2\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^1 (2 - y^2 + 2\sqrt{1 - y^2})\mathrm{d}y - \pi\int_1^2 t^2\mathrm{d}t$$

www.TopSage.com

$$\frac{\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{4}\text{单位圆面积}} \quad \frac{5}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{7}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{2}{3}\pi .$$

方法 2° 作垂直分割. 任取 x 轴上 $[0,1]$ 区间内的小区间 $[x,x+dx]$,相应的小竖条绕 $x=2$ 旋转而成的立体的体积为 $dV = 2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$,于是

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\,dx \\ &= 2\pi\left[\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-(1-x)^2}\,dx + \int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2}\,dx - \int_0^1 (2-x)x\,dx\right] \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{3}\left(1-(1-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3}\right] = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2}{3}\pi , \end{aligned}$$

其中 $\int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ 是 $\frac{1}{4}$ 单位圆面积.

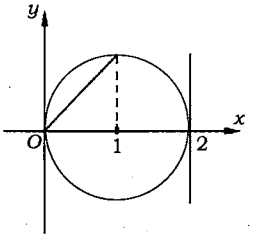


图 3.29

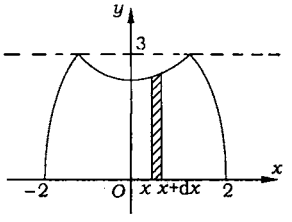


图 3.30

(Ⅱ) 曲线 $y = 3 - |x^2-1|$ 与 x 轴的交点是 $(-2,0),(2,0)$. 曲线 $y = f(x) = 3 - |x^2-1|$ 与 x 轴围成的平面图形,如图 3.30 所示.

显然作垂直分割方便. 任取 $[x,x+dx] \subset [-2,2]$,相应的小竖条绕 $y=3$ 旋转而成的立体体积为

$$dV = \pi[3^2 - (3-f(x))^2]dx = \pi(9 - |x^2-1|^2)dx,$$

于是

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-2}^2 [9-(x^2-1)^2]dx = 2\pi\int_0^2 [9-(x^4-2x^2+1)]dx \\ &= 2\pi\left[18 - \left(\frac{1}{5}\times 2^5 - \frac{2}{3}\times 2^3 + 2\right)\right] = \frac{448}{15}\pi . \end{aligned}$$

评注 (1) 定积分元素法时,有时可用不同的分割,如题(Ⅰ)作水平线垂直分割均可,显然较复杂不多. 有时取对分割方便,如题(Ⅱ)取垂直分割方便.

(2) 被积函数要视题目的特点,如题(Ⅱ)中,体积公式只与 $(y-3)^2$ 有关,因此不必事先把曲线表达式 $y = 3 - |x^2-1|$ 中的绝对值打开,即不必将它分段表示.

▶4. 求平行截面面积已知的立体体积

【例 3.62】 求以半径为 R 的圆为底,平行且等于底圆直径的线段为顶,高为 h 的正劈锥体的体积.

【分析】 首先要建立坐标系(如图 3.31),然后求平行截面面积,最后将立体体积表为截面面积的定积分.

【解】 取底圆所在平面为 Oxy 平面,圆心 O 为原点,并使 x 轴与劈锥的顶平行,底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$. 过 x 轴上的点 $x(-R \leqslant x \leqslant R)$ 作垂直于 x 轴的平面,截正劈锥体得等腰三角形,底边长即 $2\sqrt{R^2-x^2}$,高为 h,该截面的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\,h,$$

于是

$$V = \int_{-R}^R S(x)\,dx = h\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi R^2 h .$$

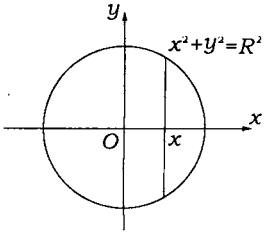


图 3.31

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

(由定积分的几何意义直接写出$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$ = 以半径为 R 的半圆的面积 = $\frac{1}{2}\pi R^2$.)

【例 3.63】 设两点 $A(1,0,0)$ 与 $B(0,1,1)$ 的连线 $\overline{AB}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转面为 S,求曲面 S 与 $z=0, z=1$ 围成的立体的体积.

【分析】 这是截面积已知的立体.与 z 轴垂直的平面截此旋转体所得截面即此平面与 $\overline{AB}$ 的交点绕 z 轴旋转所得的圆,其面积记为 $S(z)$,则 $V=\int_0^1 S(z)\,dz$.关键求 $\overline{AB}$ 方程,再求 $\overline{AB}$ 上点与 z 轴的距离.

【解】 $\overline{AB}$ 直线方程:$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$,即 $\begin{cases}x=1-t,\\ y=t,\\ z=t.\end{cases}$

$\overline{AB}$ 上任意点 (x,y,z) 与 z 轴的距离的平方为:$x^2+y^2=(1-t)^2+t^2=z^2+(1-z)^2$,则

$S(z)=\pi[z^2+(1-z)^2]$,从而 $V=\int_0^1 S(z)\,dz=\pi\int_0^1[z^2+(1-z)^2]\,dz=\frac{2}{3}\pi$.

►5. 求旋转面的面积

【例 3.64】 设 y 轴右方有平面曲线 $\Gamma: x=g(y)(\alpha\leqslant y\leqslant\beta)$,它有一阶连续的导数,则 Γ 绕 y 轴旋转一周得旋转曲面的面积 $F=$ _____.

【分析】 与 x 轴上方的平面曲线 $\Gamma: y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 x 轴旋转所得旋转面的面积公式 $F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ 是相应的,即 $F=2\pi\int_\alpha^\beta g(y)\sqrt{1+g'^2(y)}\,dy$.

【例 3.65】 求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 绕直线 $y=x$ 旋转一周所得曲面的面积.

【解】 如图 3.32,曲线关于 $y=\pm x$ 对称,只需考察 $t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$ 一段曲线.现在没有现成的公式可用.用微元法导出旋转面的面积公式.任取曲线的小微元,端点坐标为 $(x(t),y(t))=(a\cos^3 t,a\sin^3 t)$,它到直线 $y=x$ 的距离为 $l(t)=\frac{a\sin^3 t-a\cos^3 t}{\sqrt{2}}$.

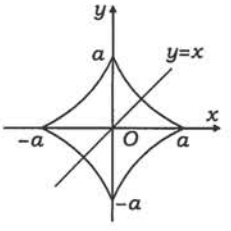


图 3.32

曲线微元的弧长 $ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=3a\,|\sin t\cos t|\,dt$,它绕 $y=x$ 旋转所得曲面微元的面积为 $dF=2\pi l(t)\,ds=2\pi\frac{a\sin^3 t-a\cos^3 t}{\sqrt{2}}\cdot 3a\,|\sin t\cos t|\,dt$,因此整个旋转面的面积为

$$\begin{aligned}F&=2\cdot\frac{6\pi a^2}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin^3 t-\cos^3 t)\,|\sin t\cos t|\,dt\\&=6\sqrt{2}\pi a^2\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t-\cos^3 t)\sin t\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin^3 t-\cos^3 t)\sin t\cos t\,dt\right]\\&=\frac{6\sqrt{2}\pi a^2}{5}\left[(\sin^5 t+\cos^5 t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-(\sin^5 t+\cos^5 t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\right]\\&=\frac{6\sqrt{2}\pi a^2}{5}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{3}{5}\pi a^2(4\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

题型十五　一元函数积分学的物理应用

►1. 利用定积分求液体静压力

【例 3.66】 边长为 a 和 b 的矩形薄板与液面成 α 角斜沉于液体内,长边平行于液面位于深 h 处,设 $a>b$,液体的比重为 γ,求薄板受的液体压力.

www.TopSage.com

【解】 建立坐标系如图3.33所示，x轴铅直向下．一长边的深度为h，另一长边的深度为$h+b\sin\alpha$，在$[h,h+b\sin\alpha]$中任取$[x,x+\mathrm{d}x]$，相应的薄板上一小横条，长a，宽$\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$，于是所受的压力为

$$\mathrm{d}P=\gamma x a\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}.$$

整块板受的压力为 $P=\int_h^{h+b\sin\alpha}\frac{a\gamma}{\sin\alpha}x\mathrm{d}x=\frac{a\gamma}{\sin\alpha}\frac{1}{2}x^2\Big|_h^{h+b\sin\alpha}=ab\gamma\left(h+\frac{1}{2}b\sin\alpha\right)$.

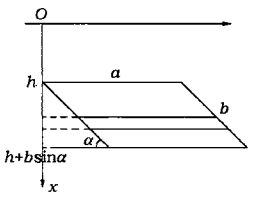


图 3.33

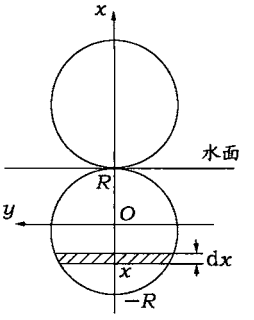


图 3.34

▶2. 利用定积分求功

【例3.67】 设有一半径为R长度为l的圆柱体，平放在深度为$2R$的水池中(圆柱体的侧面与水面相切)．设圆柱体的比重为$\rho(\rho>1)$，现将圆柱体从水中移出水面，问需做多少功?

【分析】 建立坐标系如图3.34所示．用微元法，考察微元上的作用力．注意，在水里时受重力与浮力的作用，在水面上时只受重力的作用．

【解】 任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[-R,R]$相应的柱体薄片，其体积为

$$2yl\mathrm{d}x=2l\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x.$$

移至水面时薄片移动的距离为$R-x$，所受的力(重力与浮力之差)为$(\rho-1)2l\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$，因而移至水面时做的功为

$$(\rho-1)2l(R-x)\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x.$$

整个移出水面时，此薄片离水面距离为$R+x$，将薄片从水面移到此距离时所做的功为$\rho(R+x)2l\cdot\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$，于是对薄片做的功

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W&=2l[(\rho-1)(R-x)+\rho(R+x)]\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=2l[(2\rho-1)R+x]\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此，所求的功 $W=\int_{-R}^{R}2l\sqrt{R^2-x^2}[(2\rho-1)R+x]\mathrm{d}x=2l(2\rho-1)R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x+0$

$$=2l(2\rho-1)R\cdot\frac{\pi}{2}R^2=l(2\rho-1)\pi R^3.$$

▶3. 利用定积分求质心(形心)

【例3.68】 求星形线$\begin{cases}x=a\cos^3t,\\y=a\sin^3t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$的质心，其中$a>0$为常数．

【解】 先求 $\mathrm{d}s.\ \mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=3a\,|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t$.

再求总长度 $l=\int_0^l\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t=\frac{3}{2}a.$

积分 $\int_0^l x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos^3t\cdot3a\sin t\cos t\mathrm{d}t=-3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}\cos t=\frac{3}{5}a^2,$

www.TopSage.com

$$\int_0^l y\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t\cos t\mathrm{d}t = \frac{3}{5}a^2.$$

于是 $\bar{x} = \dfrac{\frac{3}{5}a^2}{\frac{3}{2}a} = \dfrac{2}{5}a = \bar{y}$. 故星形线的质心为$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\dfrac{2}{5}a,\dfrac{2}{5}a\right)$.

【例 3.69】 求由曲线 $x^2 = ay$ 与 $y^2 = ax(a > 0)$ 所围平面图形的质心(形心)(如图 3.35).

【解】 两曲线的交点是$(0,0),(a,a)$. 设该平面图形的质心(形心)为$(\bar{x},\bar{y})$,则由质心(形心)公式有

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x(y_2 - y_1)\mathrm{d}x}{\int_0^a (y_2 - y_1)\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a x\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x}{\int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4a}x^4\right)\Big|_0^a}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a}x^3\right)\Big|_0^a} = \frac{\frac{3}{20}a^3}{\frac{1}{3}a^2} = \frac{9}{20}a.$$

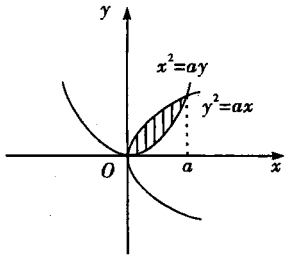


图 3.35

同样计算或由对称性可知 $\bar{y} = \dfrac{9}{20}a$.

题型十六 综合题

【例 3.70】 设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$ 上连续,且$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = 0, \int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$. 证明:在$(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 至少有两个零点.

【证明】 反证法. 如果 $f(x)$ 在$(0,\pi)$ 内无零点(或有一个零点,但 $f(x)$ 不变号,证法相同),即 $f(x) > 0$(或 < 0),由于在$(0,\pi)$ 内,亦有 $\sin x > 0$,因此,必有$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x > 0$(或 < 0). 这与假设相矛盾.

如果 $f(x)$ 在$(0,\pi)$ 内有一个零点,而且改变一次符号,设其零点为 $a \in (0,\pi)$,于是在$(0,a)$ 与(a,π) 内 $f(x)\sin(x-a)$ 同号,因此$\int_0^\pi f(x)\sin(x-a)\mathrm{d}x \neq 0$. 但是,另一方面

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-a)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)(\sin x\cos a - \cos x\sin a)\mathrm{d}x$$

$$= \cos a\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x - \sin a\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0.$$

这个矛盾说明 $f(x)$ 也不能在$(0,\pi)$ 内只有一个零点,因此它至少有两个零点.

【例 3.71】 设 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 连续,以 T 为周期,令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,求证:

(Ⅰ)$F(x)$ 一定能表成:$F(x) = kx + \varphi(x)$,其中 k 为某常数,$\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数;

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅲ)若又有 $f(x) \geqslant 0(x \in (-\infty, +\infty))$,$n$ 为自然数,则当 $nT \leqslant x < (n+1)T$ 时,有

$$n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t < (n+1)\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

【分析与证明】 (Ⅰ)即确定常数 k,使得 $\varphi(x) = F(x) - kx$ 以 T 为周期. 由于

$$\varphi(x+T) = F(x+T) - k(x+T) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - kx + \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t - kT$$

www.TopSage.com

$$= \varphi(x) + \int_0^T f(t)\,dt - kT,$$

因此，取 $k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$，$\varphi(x) = F(x) - kx$，则 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数．此时

$$F(x) = \left[\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right]x + \varphi(x).$$

（Ⅱ）不能用洛必达法则．因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在．但 $\int_0^x f(t)\,dt$ 可表成

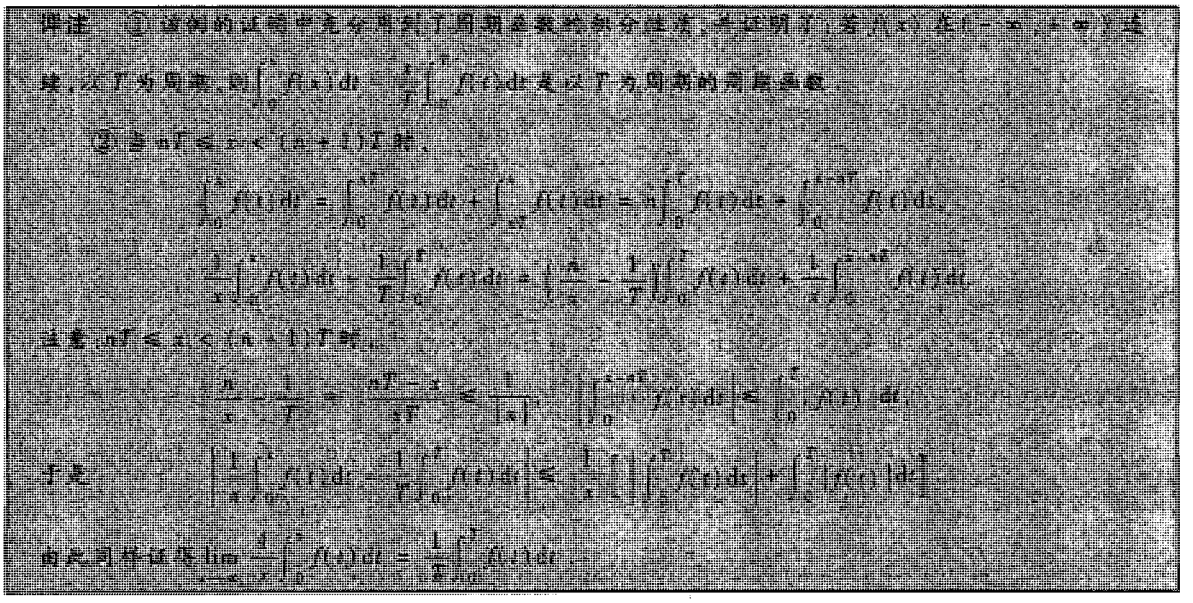
$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,dt + \varphi(x).$$

$\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且以 T 为周期，于是，$\varphi(x)$ 在 $[0,T]$ 有界，在 $(-\infty, +\infty)$ 也有界．因此

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt + \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\varphi(x)\right] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

（Ⅲ）因 $f(x) \geqslant 0$，所以当 $nT \leqslant x < (n+1)T$ 时，

$$n\int_0^T f(t)\,dt = \int_0^{nT} f(t)\,dt \leqslant \int_0^x f(t)\,dt < \int_0^{(n+1)T} f(t)\,dt = (n+1)\int_0^T f(t)\,dt.$$



型 训 练

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，$I = t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\,dx$，其中 $t > 0, s > 0$，则 I 的值

（A） 依赖于 s 和 t．　　（B） 依赖于 s, t, x．

（C） 依赖于 t, x 不依赖于 s．　　（D） 依赖于 s，不依赖于 t．

2. 下列函数中在 $[-1,2]$ 不存在定积分的是

（A） $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$　　（B） $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

www.TopSage.com

(C) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>\frac{1}{2},\\ x, & |x|\leqslant\frac{1}{2},\\ -x^2+1, & x<-\frac{1}{2}.\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. 下列函数中在$[-2,3]$不存在原函数的是

(A) $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}, & x\neq 0,\\ -\frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$ (B) $f(x)=\max\{|x|,1\}$.

(C) $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{\tan x-\sin x}{x^3}, & x<0.\end{cases}$ (D) $f(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t, g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), & x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$

二、填空题

1. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=$_____. 2. $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$_____.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 x}}\mathrm{d}x=$_____. 4. $\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x=$_____.

5. $\int\frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x(n\neq 0)=$_____. 6. $\int_0^{2\pi}\sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x$(自然数$n$或$m$为奇数)$=$_____.

7. 曲线$x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的长度$L=$_____.

8. 曲线$y^2=2x$在任意点处的曲率为_____.

三、计算题

1. 已知$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数,求$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. 2. 求$\int\frac{x^4+1}{1+x^6}\mathrm{d}x$. 3. 求$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}$.

4. 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. 5. 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$. 6. 计算$I=\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\mathrm{d}x$.

7. 求定积分:(Ⅰ)$J=\int_{-2}^{2}\min\{2,x^2\}\mathrm{d}x$; (Ⅱ)$J=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t, x\geqslant -1$.

8. 设n为正整数,利用已知公式$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\frac{(n-1)!!}{n!!}I^*$,其中

$I^*=\begin{cases}1, & n\text{为奇数},\\ \frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数},\end{cases}$求下列积分:(Ⅰ)$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\mathrm{d}x$; (Ⅱ)$J_n=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$.

9. 求无穷积分$J=\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$.

10. 设$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\leqslant 0,\\ \ln(2x+1), & x>0,\end{cases}$求$f(x)$的原函数$F(x)$.

四、应用题

1. 求星形线$L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$所围区域的面积$A$.

www.TopSage.com

2. 求下列旋转体的体积 V：

（Ⅰ）由曲线 $y = x^2, x = y^2$ 所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体；

（Ⅱ）由曲线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi), y = 0$ 所围图形绕 y 轴旋转的旋转体.

3. 求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta (a > 0)$ 绕极轴旋转所成的旋转面的面积.

4. 求功：

（Ⅰ）设半径为 1 的球正好有一半沉入水中，球的比重为 1，现将球从水中取出，问要做多少功？

（Ⅱ）半径为 R 的半球形水池，其中充满了水，要把池内的水全部取尽需做多少功？

5. 求引力：

（Ⅰ）在 x 轴上有一线密度为常数 μ，长度为 l 的细杆，在杆的延长线上离杆右端为 a 处有一质量为 m 的质点 P，求证：质点与杆间的引力为 $F = \dfrac{kmM}{a(a + l)}$ （M 为杆的质量）.

（Ⅱ）设有以 O 为心，r 为半径，质量为 M 的均匀圆环，$\overline{PO}$ 垂直圆面，$\overline{PO} = b$，质点 P 的质量为 m，试导出圆环对 P 点的引力公式 $F = k\dfrac{mMb}{(r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6. 过曲线 $y = x^2 (x \geqslant 0)$ 上某点 A 作一切线，使之与曲线及 x 轴围成图形面积为 $\dfrac{1}{12}$，求：（Ⅰ）切点 A 的坐标；（Ⅱ）过切点 A 的切线方程；（Ⅲ）由上述图形绕 x 轴旋转的旋转体的体积.

7. 设常数 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$，曲线 $\Gamma: y = \sqrt{(x - a)(b - x)}(x \in [\alpha, \beta])$ 的弧长为 l.

（Ⅰ）求证：$l = \dfrac{b - a}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x - a)(b - x)}}$；（Ⅱ）求定积分 $J = \displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x - a)(b - x)}}$.

五、证明题

1. 设 $a > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续，求证：

（Ⅰ）$\displaystyle\int_1^a \frac{f(x^2)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{a^2} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$；（Ⅱ）又设 $f\left(\dfrac{a^2}{x}\right) = f(x)(x > 0)$，则 $\displaystyle\int_a^{a^2} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_1^a \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$f(x) \geqslant 0$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，求证：在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

3. 证明 $I_n \xlongequal{\text{记}} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right)$，其中 n 为自然数.

4. 证明定积分 $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x > 0$.

5. 证明：（Ⅰ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \mathrm{d}x$；（Ⅱ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x$；（Ⅲ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

6. 证明 $\left|\displaystyle\int_n^{n+p} \sin(x^2)\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$，其中 $p > 0$.

7. 证明 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x = 0$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续，且对任意 $x, y \in [0, 1]$ 均有 $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$，$M$ 为正的常数，求证：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

www.TopSage.com

第四章　微分中值定理及其应用

内容概要与重难点提示

本章包含了微分学中最重要的理论部分(微分学中的重要定理——微分中值定理)和它的若干重要应用.

函数的许多重要性质如单调性,极值点,凹凸性等均由函数增量与自变量增量间的关系来表述,微分中值定理(拉格朗日中值定理与柯西中值定理)正是建立了函数增量、自变量增量与导数间的联系,因此根据它,可以用导数来讨论函数的单调性、极值点、凹凸性与拐点.在理解有关定理的基础上,要掌握用导数判断函数单调性、凹凸性和求极值、拐点以及函数图形的渐近线的方法.

微分学的另一个重要应用是求函数的最大值和最小值.要掌握求最值的方法并会解简单的应用题.求最值的关键是求驻点.

由柯西中值定理导出的洛必达法则是求某些未定式极限的有力工具,这已在第一章中复习过.

微分中值定理及由它导出的一些重要定理还有其他应用.如讨论函数在给定区间内零点的个数,证明函数恒等式或不等式以及证明函数或导函数在某区间存在满足某种特征的点等等.通过学习本章的基本内容和典型题型的解题方法和技巧,力图学会一些论证的方法.如变量替换法和辅助函数法.这是实现由未知向已知转化中常用的方法.辅助函数的构造技巧性较强,要求读者学习怎样从题目所给条件进行分析推导,逐步导出所需的辅助函数或从所要证明的结论中倒推出所要构造的辅助函数.还要充分重视直观与分析相结合,借助几何图形来帮助我们思考和分析问题.

拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情形,罗尔定理又是拉格朗日中值定理的特殊情形,而它们的证明却是从特殊到一般.

考核知识要点讲解

一、微分中值定理及其作用

(一) 极值的定义

【定义 4.1】 若 $\exists \delta > 0$,使得当 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时有

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad (f(x) \leqslant f(x_0)),$$

则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的**极小(大)值点**,$f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 的**极小(大)值**.极大、极小值点统称为**极值点**,极大值与极小值统称为**极值**.

(二) 微分中值定理及其几何意义

▶1. 费马定理及其几何意义

【定理 4.1】 若 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导且取极值,则 $f'(x_0) = 0$.

【注】 该定理实际上就是可导函数取得极值的必要条件.

若 $f'(x_0) = 0$,则称点 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的**驻点**.若 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取极值又可导,则点 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的驻点,反之不一定.

几何意义 若 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取极值且相应的曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线不垂直于 x 轴,则该切线必平行于 x 轴,如图 4.1 .

▶2. 罗尔定理及其几何意义

【定理 4.2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,又 $f(a)=f(b)$,则 $\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$f'(\xi)=0.$$

几何意义 若连续曲线 $y=f(x)$ 在 $A(a,f(a))$,$B(b,f(b))$ 两点间的每一点都有不垂直于 x 轴的切线,又 A,B 点纵坐标相等,则曲线在 A,B 间至少存在一点 $P(\xi,f(\xi))$ 处的切线平行于 x 轴. 如图 4.2 .

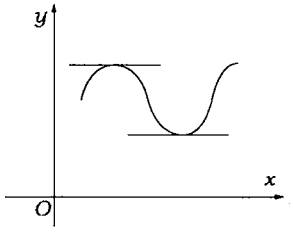


图 4.1

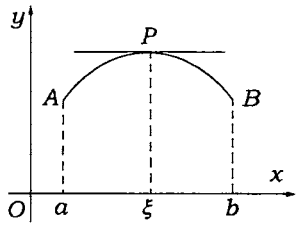


图 4.2

▶3. 拉格朗日中值定理及其几何意义

【定理 4.3】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则 $\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{4.1}$$

若 $f(x)$ 在 $x,x+\Delta x$ 为端点的区间 $[x,x+\Delta x]$(当 $\Delta x>0$ 时)或区间 $[x+\Delta x,x]$(当 $\Delta x<0$ 时)上满足拉格朗日中值定理的条件,则公式(4.1)可写成

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1). \tag{4.2}$$

如果记 $f(x)$ 为 y,则(4.2)式又可写成

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1). \tag{4.3}$$

因此,这个定理也叫做**有限增量定理**,(4.3)式称为**有限增量公式**. 拉格朗日中值定理又称为**微分中值定理**.

几何意义 若连续曲线 $y=f(x)$ 在 $A(a,f(a))$,$B(b,f(b))$ 两点间的每一点处都有不垂直于 x 轴的切线,则曲线在 A,B 间至少存在一点 $P(\xi,f(\xi))$,使得该曲线在 P 点的切线与割线 $\overline{AB}$ 平行 . 如图 4.3 .

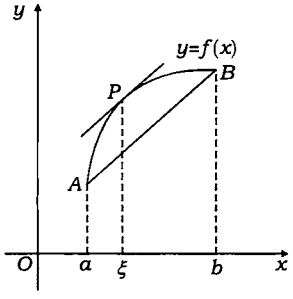


图 4.3

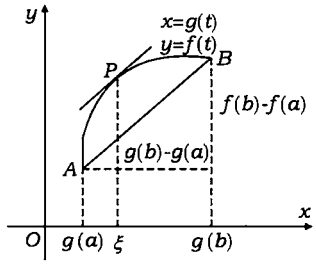


图 4.4

▶4. 柯西中值定理及其几何意义

【定理 4.4】 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导且 $g'(x)\neq 0$,则 $\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

www.TopSage.com

几何意义 若连续曲线$\overset{\frown}{AB}$由参数方程$\begin{cases}x=g(t),\\ y=f(t)\end{cases}$ $(t\in[a,b])$给出，除端点外处处有不垂直于x轴的切线，则$\overset{\frown}{AB}$上存在一点P，P处的切线平行于割线$\overline{AB}$. 如图 4.4.

【注】 微分中值定理建立了函数增量、自变量增量与导数之间的联系. 函数的许多性质可用自变量增量与函数增量的关系来描述，因此可用微分中值定理来研究函数变化的性质.

二、利用导数研究函数的变化

(一) 函数为常数的条件与函数恒等式的证明

▶1. 函数为常数的充要条件

【定理 4.5】 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$为常数$\Leftrightarrow f'(x)=0(\forall x\in(a,b))$. 若$f(x)$在$(a,b)$内可导，则$f(x)$在$(a,b)$为常数$\Leftrightarrow f'(x)=0(\forall x\in(a,b))$.

▶2. 两个函数差为常数的条件

【推论】 设$f(x),g(x)$在(a,b)内可导，则

$$f(x)=g(x)+c(x\in(a,b),c\text{为常数})\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)\quad(\forall x\in(a,b));$$

设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，则

$$f(x)=g(x)+c(x\in[a,b],c\text{为常数})\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)\quad(\forall x\in(a,b)).$$

▶3. 两个函数恒等的条件

【推论】 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则

$$f(x)=g(x)(x\in[a,b])\Leftrightarrow\begin{cases}(1)f'(x)=g'(x),x\in(a,b);\\ (2)\exists x_0\in[a,b],f(x_0)=g(x_0).\end{cases}$$

【例 4.1】 证明函数恒等式$\arctan x=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$，$x\in(-1,1)$.

【证明】 令$f(x)=\arctan x$，$g(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$，要证$f(x)=g(x)$当$x\in(-1,1)$时成立，只需证明：

1° $f(x),g(x)$在$(-1,1)$可导且当$x\in(-1,1)$时$f'(x)=g'(x)$；

2° $\exists x_0\in(-1,1)$使得$f(x_0)=g(x_0)$.

由初等函数的性质知，$f(x)$与$g(x)$都在$(-1,1)$内可导，容易计算得到

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

即当$x\in(-1,1)$时$f'(x)=g'(x)$. 又$f(0)=g(0)=0$，因此当$x\in(-1,1)$时$f(x)=g(x)$，即原等式成立.

评注 也可以转化为证明$f(x)\xrightarrow{\text{积}}\arctan x\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$在$(-1,1)$恒为零.

(二) 函数单调性充要判别法

【定理 4.6】 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则

$f(x)$在$[a,b]$单调不减(单调不增)$\Leftrightarrow f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0),\forall x\in(a,b)$.

www.TopSage.com

$f(x)$ 在$[a,b]$单调增加(减少) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(1)\ f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0),\forall x\in(a,b);\\(2)\ \text{在}(a,b)\text{的任意子区间上}\ f'(x)\not\equiv 0.\end{cases}$

几何意义 $f(x)$在$[a,b]$单调增加(减少),即曲线$y=f(x)$的切线的倾角均为锐角(钝角),可在若干点上的切线是水平的.如图4.5.

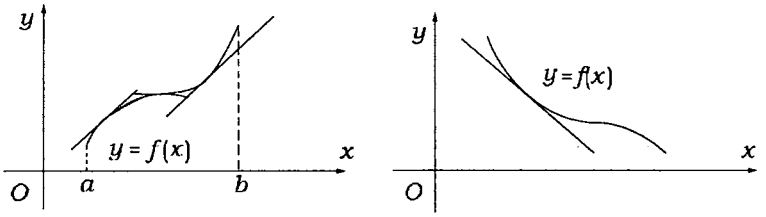


图4.5

(三)极值点充分判别法

▶1. 极值第一充分判别定理及其几何意义

【定理4.7】 设$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$连续,在$(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$可导.若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时$f'(x)>0(<0)$,$x\in(x_0,x_0+\delta)$时$f'(x)<0(>0)$,则$f(x)$在$x=x_0$取极大值(极小值).

几何意义 从左到右在$x=x_0$的两侧附近,若曲线由上升(下降)变到下降(上升),则$x=x_0$是极大值(极小值)点.点$x=x_0$可以是$f(x)$的不可导点.

▶2. 极值第二充分判别定理及其几何意义

【定理4.8】 设$f(x)$在点x_0二阶可导且$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,则:(1)当$f''(x_0)<0$时$f(x_0)$为极大值;(2)当$f''(x_0)>0$时$f(x_0)$为极小值.当$f''(x_0)=0$时需具体讨论.

【注】 如果$f''(x_0)=0$,则【定理4.8】就不能应用.事实上,当$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)=0$时,$f(x)$在x_0处可能有极大值,也可能有极小值,也可能没有极值.

几何意义 当$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)<0(>0)$时,在点$x=x_0$两侧附近,从该点的左侧到右侧,$f'(x)$由正变负(由负变正)(归结为第一充分判别法的情形).

(四)凹凸性的定义与充要判别法

▶1. 凹凸的定义

【定义4.2】 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,若对$\forall x,x_0\in(a,b)$,$x\neq x_0$恒有

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)>(<)f(x),\tag{4.4}$$

则称$f(x)$在$[a,b]$上是**凸(凹)**的.

几何意义 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$是曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程,因此(4.4)式的几何意义是(如图4.6):若曲线$y=f(x)$ $(a<x<b)$在任意点处的切线除该点外总在曲线的上方(下方),则该曲线是凸(凹)的,反之亦然.

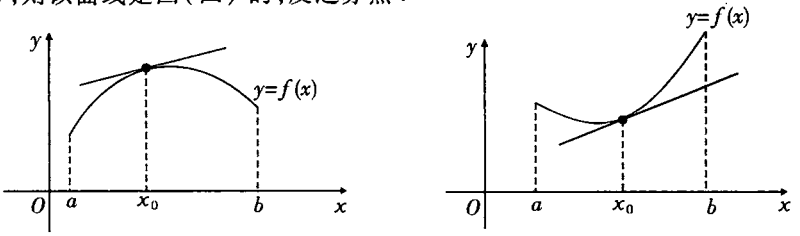


图4.6

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

【注】 有些高等数学教材如下给出凹凸函数的定义：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，若对 $\forall$ 两点 $x_1,x_2 \in [a,b]$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > (<)\ \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)], \tag{4·4}'$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 为凸(凹)函数.

在【例 4.31】中证明了：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，则(4·4)成立 $\Rightarrow$(4·4)′成立.

▶2. 凹凸性充要判别定理及其几何意义

【定理 4.9】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是凸(凹)的充要条件是 $f'(x)$ 在 (a,b) 是单调减(增)函数.

几何意义 若 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 的切线斜率是单调减少(增加)的，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 为凸(凹)的(如图 4.7)，反之亦然.

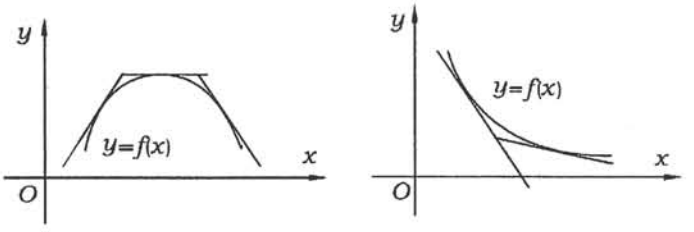


图 4.7

【定理 4.10】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 为凸(凹)的充要条件是：当 $x \in (a,b)$ 时 $f''(x) \leqslant 0 (\geqslant 0)$，且在 (a,b) 的任意子区间内 $f''(x) \not\equiv 0$.

【注】 【定理 4.10】表明当 $f(x)$ 二阶可导时，可用二阶导数的符号来判断凹凸性.

【例 4.2】 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，证明：$\forall x,x_0 \in (a,b)$，且 $x \neq x_0$ 时

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) > f(x) \tag{*}$$

$\Leftrightarrow f'(x)$ 在 (a,b) 为单调减少的.

【分析与证明】 先设(*)成立，$\forall x_1,x_2 \in (a,b)$ 且 $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$f(x_2) < f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1),\quad f(x_1) < f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2).$$

两式相加 $\Rightarrow [f'(x_1)-f'(x_2)](x_2-x_1) > 0$

$\Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$，即 $f'(x)$ 在 (a,b) 是单调减的.

现设 $f'(x)$ 在 (a,b) 是单调减少的. 对于 $\forall x,x_0 \in (a,b)$，且 $x \neq x_0$，由微分中值定理得

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)] = [f'(\xi)-f'(x_0)](x-x_0) < 0,$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间，即(*)成立. 证毕.

(五) 拐点的定义与充分判别法

▶1. 拐点的定义

【定义 4.3】 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内连续，函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的左右侧凹凸性正好相反，则称 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**拐点**，有时也称 x_0 为 $f(x)$ 的拐点.

▶2. 拐点的必要条件

设点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在.

▶3. 拐点的充分判别定理

【定理 4.11】 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 连续，在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ 二阶可导，且 $f''(x)(x-x_0)$ 不变号(即 $f''(x)$ 在点 $x=x_0$ 的两侧反号)，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

www.TopSage.com

【定理4.12】 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 二阶可导，$f''(x_0)=0$，又 $f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【例4.3】 求函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的单调性区间，极值点及凹凸性区间与拐点.

【解】 (Ⅰ) 定义域 $x\neq\pm1$，间断点 $x=\pm1$，零点 $x=0$，且是奇函数.

(Ⅱ) 求 y'，y'' 和它们的零点.

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)},$$

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

$$y''=\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x-1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

由 $y'=0$ 得驻点 $x=0,\pm\sqrt{3}$，由 $y''=0$ 得 $x=0$，由这些点及间断点 $x=\pm1$，把函数的定义域按自然顺序分成 $(-\infty,-\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-1),(-1,0),(0,1),(1,\sqrt{3}),(\sqrt{3},+\infty)$.

由此可列出函数如下分段变化表，并标明每个区间上函数的单调性，凹凸性及相应的极值点与拐点.

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	−		−	0	+
y''	−	−	−		+	0	−		+	+	+
y	单调上升，凸的	极大值 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	单调下降，凸的		单调下降，凹的	拐点 0	单调下降，凸的		单调下降，凹的	极小值 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$	单调上升，凹的

因此，单调增区间是 $(-\infty,-\sqrt{3}),(\sqrt{3},+\infty)$，单调减区间是 $(-\sqrt{3},-1),(-1,1),(1,\sqrt{3})$；极大值点是 $x=-\sqrt{3}$，对应的极大值是 $-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$，极小值点是 $x=\sqrt{3}$，对应的极小值是 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$；凸区间是 $(-\infty,-1),(0,1)$，凹区间是 $(-1,0),(1,+\infty)$；拐点是 $(0,0)$.

评注 (1) 求可导函数的单调性区间就是求导函数的正负号区间，相邻的两个单调性相反区间的分界点就是驻点.

(2) 求二阶可导函数的凹凸性区间就是求二阶导数的正负号区间，相邻的两个凹凸性区间的分界点就是拐点.

(六) 利用导数作函数图形

由函数 $y=f(x)$ 的一、二阶导数讨论其单调性与极值点，凹凸性与拐点，再求出渐近线及几个关键点就可把函数 $y=f(x)$ 的图形较准确地画出来，具体步骤是：

第一步，求 $y=f(x)$ 的定义域，考察有无奇偶性，周期性与间断点；

第二步，求 y'，y'' 并求出 $y'=0$，$y''=0$ 和 y'，y'' 不存在的点，用这些点把定义域分成若干区间，列成表，表中标明 y'，y'' 在各区间的符号，随之也就确定了单调性、凹凸性、极值点与拐点；

第三步，求出渐近线. 求 $y=f(x)$ 的渐近线的方法：

1° 垂直渐近线：$x=a$ 是垂直渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$.

2° 水平渐近线：$x\to+\infty(-\infty)$ 时 $y=b$ 是水平渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ $(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b)$.

www.TopSage.com

3° 斜渐近线：$x \to +\infty$（$-\infty$）时 $y = kx + b(k \neq 0)$ 是斜渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \neq 0$，

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \neq 0,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = b\right)$.

【例 4.4】 求曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线方程.

【解】 只有间断点 $x = 0$，因 $\lim\limits_{x\to0} y = \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x} + \ln(1 + e^x)\right] = \infty$，故有垂直渐近线 $x = 0$．又

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x}\right] = 0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (y - x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - \ln e^x\right] = 0 + \lim_{x\to+\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0,$$

因此，$x \to +\infty$ 时有斜渐近线 $y = x$．

最后，$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x} + \ln(1 + e^x)\right] = 0 + \ln 1 = 0$，于是 $x \to -\infty$ 时有水平渐近线 $y = 0$．

评注 (1) 为求出 $y = f(x)$ 的垂直渐近线，需要考察 $y = f(x)$ 的间断点，仅当 $x = a$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点或第二类间断点时，$x = a$ 才是 $y = f(x)$ 的垂直渐近线．

(2) 为求 $y = f(x)$ 的水平或斜渐近线，需要分别考察下列极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),\quad \lim_{x\to-\infty} f(x),\quad \text{及}\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 之一存在，就不必再考察另一极限，$x \to -\infty$ 时也是如此，$x \to +\infty$ 与 $x \to -\infty$ 可以有不同的渐近线．

【例 4.5】 运用导数的知识作函数 $y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ 的图形．

【解】 （Ⅰ）与（Ⅱ）见【例 4.3】．

（Ⅲ）求渐近线．只有两个间断点 $x = \pm 1$，$\lim\limits_{x\to1\pm0} y = \lim\limits_{x\to1\pm0}\left(x + \dfrac{x}{x^2 - 1}\right) = \pm\infty$，则 $x = 1$ 为垂直渐近线．又 $\lim\limits_{x\to-1\pm0} y = \lim\limits_{x\to-1\pm0}\left(x + \dfrac{x}{x^2 - 1}\right) = \pm\infty$，则 $x = -1$ 也是垂直渐近线．又

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} (y - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) = 0,$$

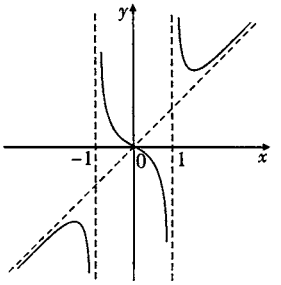


图 4.8

所以 $y = x$ 是斜渐近线，无水平渐近线．

综上所述，作函数图形如图 4.8 所示．

三、一元函数的最大值与最小值问题

■情形 Ⅰ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 取到最大值 M，最小值 m．若 $f(x)$ 在 (a,b) 可导或只有个别的不可导点，则我们可用以下方法（步骤）求出 M 和 m 及相应的最大值点与最小值点：

www.TopSage.com

(1) 求出 $f'(x)=0$ 的解，即求 $f(x)$ 的驻点；　(2) 算出 $f(x)$ 在驻点的函数值；
(3) 若有不可导点，算出 $f(x)$ 在这些点的函数值；　(4) 求出 $f(a)$，$f(b)$；
最后比较所有这些函数值，最大者为最大值，最小者为最小值．

【例 4.6】 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P，使该点处的切线，椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小．

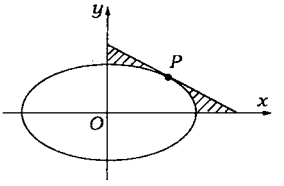


图 4.9

【解法一】 过椭圆上任意点 (x_0,y_0) 的切线的斜率 $y'(x_0)$ 满足 $\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0y'(x_0)}{b^2}=0$，则 $y'(x_0)=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$ $(y_0\neq 0)$．

切线方程为 $y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$．

分别令 $y=0$ 与 $x=0$，得 x,y 轴上的截距：$x=\frac{a^2}{x_0}$，$y=\frac{b^2}{y_0}$．

于是该切线与椭圆及两坐标轴所围图形的面积（图 4.9）为

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{x_0y_0}-\frac{1}{4}\pi ab.$$

问题是求：$S(x)=\frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{xy}-\frac{1}{4}\pi ab$ $(0<x<a)$ 的最小值点，其中 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$，将其代入 $S(x)$ 中，问题可进一步化为求 $f(x)=x^2(a^2-x^2)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 的最大值点．

$f'(x)=2x(a^2-2x^2)$，由 $f'(x)=0$ $(x\in(0,a))$ 得 $a^2-2x^2=0$，$x=x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}a$．注意 $f(0)=f(a)=0$，$f(x_0)>0$，$x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 是 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 的最大值点．因此 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$ 为所求的点．

【解法二】 椭圆参数方程为 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$．过椭圆上第一象限任意点的切线参数方程为 $\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-b\sin t}{b\cos t}$．分别令 $y=0$ 与 $x=0$，得 x,y 轴的截距为 $x=\frac{a}{\cos t}$，$y=\frac{b}{\sin t}$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$．

问题是求：$S(t)=\frac{ab}{2\sin t\cos t}-\frac{1}{4}\pi ab$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小值点，即 $f(t)=\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值点，显然 $t=\frac{\pi}{4}$ 为所求．因此 $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$ 时面积最小．

情形 Ⅱ 设 $f(x)$ 在区间 I（可以是开的或闭的，也可以是有限的或无限的）可导，又 $\exists x_0\in I$，且当 $x<x_0$ 时 $f'(x)<0$，$f'(x_0)=0$，而当 $x>x_0$ 时 $f'(x)>0$（当 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0$，$f'(x_0)=0$，而当 $x>x_0$ 时 $f'(x)<0$），则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 的最小值（最大值）．

特别地，设 $f(x)$ 在开区间 I 内二阶可导且 $f''(x)>0$ (<0)，若 $\exists x_0\in I$ 使 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取最小值（最大值）．

【例 4.7】 在半径为 a 的半球外作一外切圆锥体，要使圆锥体体积最小，问高度及底半径应是多少？

【解】 设外切圆锥体的底半径为 r，高为 h．见图 4.10，记 $\angle ABO=\varphi$，于是 $\tan\varphi=\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}$，圆锥体体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot r\tan\varphi=\frac{1}{3}\pi a\frac{r^3}{\sqrt{r^2-a^2}}.\quad(a<r<+\infty)$$

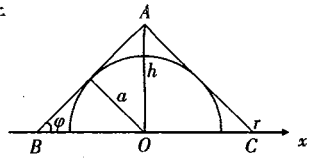


图 4.10

www.TopSage.com

求 $V(r)$ 的最小值点等价于求 $f(r)=\dfrac{r^6}{r^2-a^2}$ 的最小值点. 由于

$$f'(r)=\frac{6r^5(r^2-a^2)-2r^7}{(r^2-a^2)^2}=\frac{2r^5(2r^2-3a^2)}{(r^2-a^2)^2}\begin{cases}<0, & a<r<\sqrt{\dfrac{3}{2}}a,\\ =0, & r=\sqrt{\dfrac{3}{2}}a,\\ >0, & r>\sqrt{\dfrac{3}{2}}a,\end{cases}$$

因此,当 $r=\sqrt{\dfrac{3}{2}}a$, $h=r\cdot\dfrac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}=\sqrt{3}a$ 时圆锥体体积最小.

■ 情形 Ⅲ　设 $f(x)$ 在 (a,b) 可导,又 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty(-\infty)$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 存在最小(大)值. 求这个最值归结为求 $f(x)$ 在 (a,b) 的驻点.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一　证明函数恒等式

【例 4.8】　设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单调增加并有连续的导数,且 $f(0)=0$, $f(a)=b$,求证:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=ab,$$

其中 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

【分析】　即证对 a 有函数恒等式 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{f(a)}g(x)\mathrm{d}x=af(a)$ 成立.

【证明】　令 $F(a)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{f(a)}g(x)\mathrm{d}x-af(a)$,对 a 求导得

$$F'(a)=f(a)+g[f(a)]f'(a)-af'(a)-f(a),$$

由题设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数知 $g[f(a)]=a$,故 $F'(a)=0$,从而 $F(a)$ 为常数. 又 $F(0)=0$,故 $F(a)=0$,即原等式成立.

【例 4.9】　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,在 $(0,+\infty)$ 内可导且满足 $f(0)=0$, $f(x)\geqslant 0$, $f(x)\geqslant f'(x)$ $(\forall x>0)$,求证: $f(x)\equiv 0$.

【分析】　因 $f(x)\geqslant 0$,若能证 $f(x)\leqslant 0$,则 $f(x)\equiv 0$. 因 $f(0)=0$,若能证 $f(x)$ 单调不增或对某正函数 $R(x)$, $R(x)f(x)$ 是单调不增的,这只需证 $f'(x)\leqslant 0$ 或 $[R(x)f(x)]'\leqslant 0$. 由所给条件及积分因子法的启发,应采取后一种方法.

【证明】　由 $f'(x)-f(x)\leqslant 0$,　得　$\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]=[\mathrm{e}^{-x}f(x)]'\leqslant 0$.

又　$f(x)\mathrm{e}^{-x}\big|_{x=0}=0$,　则　$f(x)\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\mathrm{e}^{-x}\big|_{x=0}=0$. 进而　$f(x)\leqslant 0$ $(x\in[0,+\infty))$,

因此　$f(x)\equiv 0$ $(\forall x\in[0,+\infty))$.

评注　若 $f'(x)$ 可积,可得到相应的积分不等式 $f(x)\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,然后给出积分估计即可.

由 $f(0)=0$, $f(x)\geqslant 0$, $f'(x)\leqslant f(x)$,两边积分得(从 0 到 x 积分)

www.TopSage.com

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

任意给定 $b>0$，记 $M=\max\limits_{[0,b]} f(x)$，得 $0 \leqslant f(x) \leqslant Mx,\ x \in [0,b]$.

代入(*)式，得 $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x Mt\mathrm{d}t = \frac{1}{2}Mx^2,\ x \in [0,b]$.

再代入(*)式，得 $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x \frac{1}{2}Mt^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3!}Mx^3,\ x \in [0,b]$.

依此类推(可归纳证明) $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{M}{n!}x^n$ （$\forall$ 自然数 n）.

令 $n \to \infty$，得 $0 \leqslant f(x) \leqslant 0$，则 $f(x) \equiv 0$ （$\forall x \in [0,b]$）.

由 b 的任意性 $\Rightarrow f(x) \equiv 0$ （$\forall x \in [0,+\infty)$）.

【例 4.10】 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且对 $\forall a \leqslant x \leqslant b$ 满足

$$f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0.$$

求证：$f(x) \equiv 0$ （$x \in [a,b]$）.

【证明】 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 不恒为零，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 取正的最大值或负的最小值.

不妨设 $f(x_0)=\max\limits_{[a,b]} f(x)>0$，则 $x_0 \in (a,b)$ 且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow f''(x_0)+g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)<0$ 与已知条件矛盾. 同理，若 $f(x_1)=\min\limits_{[a,b]} f(x)<0$，同样得矛盾. 因此 $f(x) \equiv 0$ （$\forall x \in [a,b]$）.

题型二　利用导数讨论函数的变化

▶1. 函数单调性与凹凸性的证明

【例 4.11】 证明函数 $f(x)=(1+2^x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调下降.

【证明】 $f(x)=(1+2^x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+2^x)}$，则

$$f'(x)=(1+2^x)^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{x2^x\ln 2}{1+2^x}-\ln(1+2^x)}{x^2}=(1+2^x)^{\frac{1}{x}-1}\frac{2^x\ln 2^x-(1+2^x)\ln(1+2^x)}{x^2}.$$

下证 $2^x\ln 2^x-(1+2^x)\ln(1+2^x)<0$（$\forall x>0$）. 令 $t=2^x$，则 $x>0$ 时 $t>1$，

$$2^x\ln 2^x-(1+2^x)\ln(1+2^x)=t\ln t-(1+t)\ln(1+t) \xlongequal{\text{记}} g(t).$$

方法 1° 由于 $g'(t)=\ln t-\ln(1+t)<0$（$\forall t>0$）$\Rightarrow g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调下降，又

$$\lim_{t\to 0+} g(t)=0$$

$\Rightarrow g(t)<0 \quad (t>0)$.

方法 2° 由于 $(x\ln x)'=\ln x+1>0 (x>1) \Rightarrow x\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 单调上升 $\Rightarrow \forall t>1$

$$t\ln t-(1+t)\ln(1+t)<0$$

$\Rightarrow \forall x>0,\ 2^x\ln 2^x-(1+x^x)\ln(1+2^x)<0.$

因此 $f'(x)<0 (x>0)$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调下降.

评注 设 $f(x)$ 在 (a,b) 单调下降. 若 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) \geqslant 0$，则 $f(x)>0$ （$\forall x \in (a,b)$）；若 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \leqslant 0$，则 $f(x)<0$ （$\forall x \in (a,b)$）.

www.TopSage.com

【例 4.12】 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 二次可导且 $f(0)=0, f''(x)<0$. 求证：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 单调下降.

【分析】 要证 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 单调下降，只需证明导数 $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$. 为此令 $F(x)=xf'(x)-f(x)$，则只需证 $F(x)<0\ (\forall x\in(0,a])$.

【证法一】 对 $F(x)$ 求导得 $F'(x)=xf''(x)<0\ (\forall x\in(0,a])$.

又 $F(0)=0$，则 $F(x)<0\ (\forall x\in(0,a])$，即 $xf'(x)-f(x)<0\ (0<x\leqslant a)$.

【证法二】 $f''(x)<0$ 意味着 $f(x)$ 是凸函数，从而曲线在任一点切线的下方，即 $\forall t\in[0,a]$ 有 $f(t)<f(x)+f'(x)(t-x)\ (\forall x\in[0,a], x\neq t)$. 特别地，令 $t=0$ 时，$f(0)=0<f(x)-f'(x)x$，即 $xf'(x)-f(x)<0\ (x\in(0,a])$.

【证法三】 由微分中值定理，$\forall x\in(0,a]$，$\exists\xi\in(0,x)$ 使得

$$xf'(x)-f(x)=xf'(x)-[f(x)-f(0)]=xf'(x)-xf'(\xi)$$
$$=x[f'(x)-f'(\xi)]<0\ (\text{因为 } f'(x) \text{ 单调减少}).$$

【证法四】 由泰勒公式，$\forall x\in(0,a]$，$\exists\xi\in(0,x)$，有

$$0=f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(-x)^2.$$

由 $f''(\xi)<0\Rightarrow f(x)-xf'(x)>0$，即 $xf'(x)-f(x)<0\ (\forall x\in(0,a])$.

【例 4.13】 设 $f(x)$ 在 (a,b) 四次可导，$\exists x_0\in(a,b)$ 使得 $f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，又设 $f^{(4)}(x)>0\ (x\in(a,b))$，求证 $f(x)$ 在 (a,b) 为凹函数.

【证明】 由 $f^{(4)}(x)>0\ (x\in(a,b))$，知 $f'''(x)$ 在 (a,b) 单调上升. 又因 $f'''(x_0)=0$，故 $f'''(x)\begin{cases}>0, x_0<x<b,\\<0, a<x<x_0,\end{cases}$ 从而 $f''(x)$ 在 $[x_0,b)$ 单调上升，在 $(a,x_0]$ 单调下降. 又 $f''(x_0)=0$，故 $f''(x)>0\ (x\in(a,b), x\neq x_0)$，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 为凹函数.

【注】 请读者注意体会反复运用同一定理来分析问题的思路方法.

▶2. 讨论函数的极值与拐点

【例 4.14】 设 $f(x)$ 分别满足如下两个条件中的任何一个：

(Ⅰ) $f(x)$ 在 $x=0$ 处三阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=1$；

(Ⅱ) $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域二阶可导，$f'(0)=0$，且 $(\sqrt[3]{1+x}-1)f''(x)-xf'(x)=e^x-1$，

则下列说法正确的是

(A) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

【分析】 (Ⅰ) 由条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=1$ 及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续即知 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$.

用洛必达法则得 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限 $J\xlongequal{\text{记}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{2x}$.

因 $\lim\limits_{x\to0}f''(x)=f''(0)$，若 $f''(0)\neq0$，则 $J=\infty$，与 $J=1$ 矛盾，故必有 $f''(0)=0$. 再由 $f'''(0)$ 的定义得

$$J=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)-f''(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'''(0)=1,$$

$\Rightarrow f'''(0)=2$.

因此，$(0,f(0))$ 是拐点. 选(C).

www.TopSage.com

评注 ① 若求 J 的最后一步用洛必达法则得

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{2}=\frac{1}{2}f'''(0)=1,$$

但在题设条件下,这种解法是错误的,因题中未假定 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内三阶可导及 $f'''(x)$ 在 $x=0$ 连续. 若设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内三阶可导且 $f'''(x)$ 在 $x=0$ 连续,则上述解法正确. 在四选一的选择题中,可通过加强条件来选得正确选项.

② 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=1>0$,可由极限不等式性质 $\Rightarrow\exists\delta>0$,使得当 $x\in(-\delta,\delta)$ 且 $x\neq 0$ 时 $\dfrac{f'(x)}{x^2}>0$,即 $f'(x)>0$,又 $f'(0)=0\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 单调上升,可见 $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. 但此时还不能判断 $(0,f(0))$ 是否是拐点.

③ 此类四选一的选择题,用特殊选取法往往最方便. 例如,取 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$,则 $f'(x)=x^2$ 满足题中所有条件,$(0,f(0))$ 是拐点,$f(0)$ 不是极值. 对这个函数 $f(x)$ 选项(C)正确,而其他选项错误. 因此选(C).

(Ⅱ)已知 $f'(0)=0$,现考察 $f''(0)$. 由方程得

$$f''(x)=\frac{e^x-1+xf'(x)}{\sqrt[3]{1+x}-1},$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}f''(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+xf'(x)}{\frac{1}{3}x}\quad\left(\sqrt[3]{1+x}-1\sim\frac{1}{3}x(x\to 0)\right)$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+3\lim_{x\to 0}f'(x)=3+0=3,$$

又 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Rightarrow f''(0)=3>0$. 因此 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 应选(B).

【例 4.15】 设 $y=y(x)$ 是由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定的,求 $y=y(x)$ 的驻点,并判定其驻点是否是极值点?

【分析与求解】 (Ⅰ)先用隐函数求导法求出 $y'(x)$. 将方程两边对 x 求导得

$$6y^2y'-4yy'+2xy'+2y-2x=0,$$

整理得 $$y'=\frac{x-y}{3y^2-2y+x}.\qquad①$$

(Ⅱ)由 $y'(x)=0$ 及原方程确定驻点. 由 $y'(x)=0$ 得 $y=x$ 代入原方程得

$$2x^3-2x^2+2x\cdot x-x^2=1,\quad 即\quad x^3-x^2+x^3-1=0,\quad (x-1)(2x^2+x+1)=0.$$

仅有根 $x=1$. 当 $y=x=1$ 时,$3y^2-2y+x\neq 0$. 因此求得驻点 $x=1$.

(Ⅲ)判定驻点是否是极值点. 将①式化为 $(3y^2-2y+x)y'=x-y$. ②

将②式两边对 x 在 $x=1$ 求导,注意 $y'(1)=0$,$y(1)=1$,得

$$2y''(1)=1,\quad y''(1)=\frac{1}{2}>0.$$

故 $x=1$ 是隐函数 $y(x)$ 的极小值点.

评注 求 $y''(1)$ 时,若对②式求导,得 $(3y^2-2y+x)'_x y'+(3y^2-2y+x)y''=1-y'$,其中第一项因 $y'(1)=0$,所以不必求 $(3y^2-2y+x)'_x$.

若对①式求导,也不必对任意 x 求导,只需对 x 在 $x=1$ 求导. 因为此时 $x-y=0$,$y'(1)=0$,

所以 $$y''(1)=\left.\frac{3y^2-2y+x}{(3y^2-2y+x)^2}\right|_{x=1,y=1}=\frac{1}{2}.$$

www.TopSage.com

▶3. 求函数的单调性、凹凸性区间，极值点，拐点及渐近线

【例 4.16】 求函数 $y=\sqrt[3]{x^3-3x}(x\in(0,+\infty))$ 的单调性区间与极值点，凹凸性区间与拐点及渐近线.

【解】 函数 $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上处处连续，先求 y'，y'' 和它们的零点及不存在的点.

$$y'=(x^3-3x)^{-\frac{2}{3}}(x^2-1)(x\neq\sqrt{3}),$$

$$y''=-\frac{2}{3}(x^3-3x)^{-\frac{5}{3}}\cdot 3(x^2-1)^2+2x(x^3-3x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=-2(x^3-3x)^{-\frac{5}{3}}[(x^2-1)^2-x(x^3-3x)]=-2x^{-\frac{5}{3}}(x^2-3)^{-\frac{5}{3}}(x^2+1)\ (x\neq\sqrt{3}),$$

由 $y'=0$ 得 $x=1$，$x=\sqrt{3}$ 时 y' 不存在，$y=\sqrt{3}$ 时 y'' 不存在，无 $y''=0$ 的点.

现列下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	不 $\exists$	$+$
y	↘	极小值	↗	连续	↗

x	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	$+$	不 $\exists$	$-$
y	∪ (凹)	连续	∩ (凸)

因此得 $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ 单调减少区间是 $(0,1)$，单调增加区间是 $(1,+\infty)$，$x=1$ 是极小值点，凹区间是 $(0,\sqrt{3})$，凸区间是 $(\sqrt{3},+\infty)$，$(\sqrt{3},0)$ 是拐点.

最后求渐近线. 因 $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0+}y=0$，所以无垂直渐近线. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left(-\frac{3}{x^2}\cdot\frac{1}{3}\right)=0,$$

因此只有斜渐近线 $y=x$.

评注 在考察极值点或拐点时要注意函数的不可导点. 不可导点可能是函数的极值点或拐点. 【定理 4.7】(极值第一充分判别法) 中可以不必假定 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 可导. 【定理 4.11】中也可不必假定 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 可导.

题型三 一元函数的最值问题

▶1. 函数型的最值问题

【例 4.17】 设 $a>0$，求 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}$ 的最大值.

【解】 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且可写成如下分段函数

www.TopSage.com

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x-a}, & x\geqslant a\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & x<0,\\ -\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & 0<x<a,\\ -\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1+x-a)^2}, & x>a.\end{cases}$$

由此得 $x\in(-\infty,0)$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 单调增加；$x\in(a,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调减少. 从而 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的最大值就是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值.

在 $(0,a)$ 上解 $f'(x)=0$，即 $(1+a-x)^2-(1+x)^2=0$，得 $x=\dfrac{a}{2}$. 又

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{2+a}<\frac{2+a}{1+a}=f(0)=f(a),$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,a]$，也就是在 $(-\infty,+\infty)$ 的最大值是 $\dfrac{2+a}{1+a}$.

评注 ① 这里函数 $f(x)$ 在 $x=0,a$ 是不可导的（左、右导数不相等），但这不影响讨论.

② 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调增加，在 $(a,+\infty)$ 单调减少，又 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 的最小值 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{4}{2+a}>\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无最小值.

【例 4.18】 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最值.

【分析】 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，由于它是偶函数，故只需考虑 $x\in[0,+\infty)$. 求 $f'(x)$ 和驻点并考察驻点两侧的单调性. 由于需要考察 $f(0)$ 是否为最值，还需讨论极限值 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

【解】 由于 $f(x)$ 是偶函数，我们只需考察 $x\in[0,+\infty)$. 由变限积分求导公式得

$$f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}.$$

解 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 与 $x=\sqrt{2}$，于是

x	0	$(0,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},+\infty)$
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	0	↗		↘

从而，$f(x)$ 的最大值是 $f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-\int_0^2(2-t)de^{-t}=(t-2)e^{-t}\Big|_0^2-\int_0^2e^{-t}dt$

$$=2+e^{-t}\Big|_0^2=1+e^{-2}.$$

由上述单调性分析，为求最小值，只需比较 $f(0)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的大小. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=[(t-2)e^{-t}+e^{-t}]\Big|_0^{+\infty}=1>f(0)=0,$$

因此 $f(0)=0$ 是最小值.

评注 这是一般结论：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，又有 $x_0\in(a,+\infty)$.

① 若 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 单调上升，在 $[x_0,+\infty)$ 单调下降，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的最大值. 若又存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$，则 $l\geqslant f(a)$ 时，$f(a)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的最小值；$l<f(a)$ 时，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无最小值.

www.TopSage.com

②若 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 单调下降，在 $[x_0,+\infty)$ 单调上升，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的最小值．若又存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$，则 $l\leqslant f(a)$ 时，$f(a)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的最大值，$l>f(a)$ 时，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无最大值．

▶2. 应用型的最值问题

【例 4.19】 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内嵌入有最大面积的四边平行于椭圆轴的矩形，求该最大面积．

【解】 设椭圆内接矩形在第一象限中的顶点为 $M(x,y)$，则矩形的面积为

$$S(x)=4xy=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant a).$$

下面求 $S(x)$ 在 $[0,a]$ 上的最大值．先求 $S'(x)$：

$$S'(x)=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=\frac{4b}{a}\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

令 $S'(x)=0$ 解得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$，因 $S(0)=S(a)=0$，$S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=2ab$，所以 $S(x)$ 在 $[0,a]$ 的最大值即内接矩形最大面积为 $2ab$．

题型四　与最值问题有关的综合题

【例 4.20】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内 $f(x)>0$ 且 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$，又由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,y=0$ 围成平面图形的面积为 2，求函数 $y=f(x)$，问 a 为何值，此图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积最小？

【分析与求解】 （Ⅰ）首先由 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$，$f(x)>0$ $(x\in(0,1))$ 求出 $f(x)$．这是求解一阶线性方程 $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{3}{2}ax$．两边乘积分因子 $\mu=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$（取其中一个），得 $\left[\frac{1}{x}f(x)\right]'=\frac{3}{2}a$，于是 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+Cx,x\in[0,1]$，其中 C 为任意常数使得 $f(x)>0$ $(x\in(0,1))$．

（Ⅱ）确定 C 与 a 的关系使得由 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 围成平面图形的面积为 2．

由已知条件得 $2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)dx=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C$，则 $C=4-a$．因此，$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$，其中 a 为任意常数使得 $f(x)>0$ $(x\in(0,1))$．

$\forall a$，有 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{3}{2}a+4-a=4+\frac{a}{2}$．又 $f'(x)=3ax+4-a$，由此易知 $-8\leqslant a\leqslant 4$ 时 $f(x)>0$ $(x\in(0,1))$．

（Ⅲ）求旋转体的体积．

$$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right]^2dx$$

$$=\pi\int_0^1\left[\left(\frac{9}{4}x^4+x^2-3x^3\right)a^2+(12x^3-8x^2)a+16x^2\right]dx=\pi\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right).$$

（Ⅳ）求 $V(a)$ 的最小值点．由于

$$V'(a)=\left(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3}\right)\pi\begin{cases}<0, & a<-5,\\ =0, & a=-5,\\ >0, & a>-5,\end{cases}$$

www.TopSage.com

则当 $a=-5$ 时 $f(x)>0$ $(x\in(0,1))$，旋转体体积取最小值.

【例 4.21】 设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 可导，$f'(x)>0$ $(\forall x\in(0,b))$，$t\in[0,b]$，问 t 取何值时，图 4.11 中阴影部分的面积最大?最小?

【分析】 先写出面积函数 $S(t)$，它由两块面积相加，然后求 $S(t)$ 的最大、最小值点.

【解】 由于 $S(t)=\int_0^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x+\int_t^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x$

$$=tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x+\int_t^b f(x)\mathrm{d}x+(t-b)f(t)$$

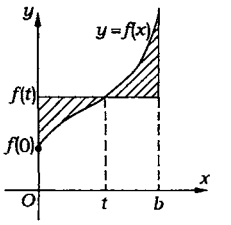


图 4.11

在 $[0,b]$ 可导，且

$$S'(t)=tf'(t)+f(t)-f(t)-f(t)+f(t)+(t-b)f'(t)$$

$$=(2t-b)f'(t)\begin{cases}<0, & 0<t<\dfrac{b}{2},\\ =0, & t=\dfrac{b}{2},\\ >0, & \dfrac{b}{2}<t<b,\end{cases}$$

则 $S(t)$ 在 $\left[0,\frac{b}{2}\right]$“↘”，在 $\left[\frac{b}{2},b\right]$“↗”，因此 $t=\frac{b}{2}$ 时，$S(t)$ 取最小值.

$S(t)$ 在 $[0,b]$ 连续，也一定有最大值，且只能在 $t=0$ 或 $t=b$ 处取得.

$$S(0)=\int_0^b f(x)\mathrm{d}x-bf(0),\quad S(b)=bf(b)-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$S(b)-S(0)=2\left[\frac{f(0)+f(b)}{2}b-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\right]\begin{cases}>0,\\ =0,\\ <0\end{cases}\quad\text{不能肯定.}$$

题型五　用微分学的方法证明不等式

▶ 方法 1°　直接利用拉格朗日中值定理或柯西中值定理证明不等式

【证明思路】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，又 $g'(x)\neq0$ $(\forall x\in(a,b))$，则

$$\exists c\in(a,b),\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c);\quad \exists\xi\in(a,b),\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

若右端可得估计式，就可得到关于 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的有关不等式.

【例 4.22】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $|f'(x)|<1$，又 $f(0)=f(1)$，求证：$\forall x_1,x_2\in[0,1]$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

【分析与证明】 联系 $f(x_1)-f(x_2)$ 与 $f'(x)$ 的是拉格朗日中值定理. 不妨设 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant1$. 分两种情形：

1) 若 $x_2-x_1<\frac{1}{2}$，直接用拉格朗日中值定理得

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_2-x_1)|=|f'(\xi)|\,|x_2-x_1|<\frac{1}{2}.$$

2) 若 $x_2-x_1\geqslant\frac{1}{2}$，利用条件 $f(0)=f(1)$ 分别在 $[0,x_1]$ 与 $[x_2,1]$ 上用拉格朗日中值定理知存在 $\xi\in(0,x_1)$，$\eta\in(x_2,1)$，使得

www.TopSage.com

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= |[f(x_1)-f(0)]-[f(x_2)-f(1)]| \\ &\leqslant |f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)| \\ &= |f'(\xi)x_1|+|f'(\eta)(1-x_2)| \\ &< x_1+(1-x_2)=1-(x_2-x_1)\leqslant \frac{1}{2}(x_1=0\text{ 时 }x_2\neq 1),\end{aligned}$$

当 $x_1=0, x_2=1$ 时上式显然成立. 因此对于 $\forall x_1, x_2\in[0,1]$ 总有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}.$$

【例 4.23】 设 $x>0$,求证: $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

【分析】 即证 $\dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}>1$. 若令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$, $g(x)=\arctan x$,注意 $f(0)=0$, $g(0)=0$,可对 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$ 用柯西中值定理.

【证明】 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$, $g(x)=\arctan x$,则 $\forall x>0$,有

$$\frac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{1+\ln(1+\xi)}{\frac{1}{1+\xi^2}}$$

$$=[1+\ln(1+\xi)](1+\xi^2)>1 \quad (\text{其中 }\xi\in(0,x)).$$

▶ 方法 2° 利用函数的单调性证明不等式

证明函数不等式 $g(x)>h(x)(x\in I)$ 总可转化为证明 $f(x)>0(x\in I)$,如 $f(x)\xlongequal{记}g(x)-h(x)$.

【证明思路一】 (一个单调性区间的情形) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调上升(下降),又 $f(a)\geqslant 0(f(b)\geqslant 0)$,则 $f(x)>0, \forall x\in(a,b]$ ($\forall x\in[a,b)$). 利用这一基本事实我们可证一些不等式.

【例 4.24】 求证: $x>1$ 时 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$.

【证明】 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$,则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 可导,且

$$f'(x)=\ln(1+x)-\ln x>0.$$

又 $f(1)=2\ln 2>0$,则 $f(x)>0$ ($\forall x>1$),即 $(1+x)\ln(1+x)>x\ln x$ ($\forall x>1$). 因此

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x} \quad (\forall x>1).$$

评注 也可考察 $\varphi(x)=x\ln x$,易证 $x>1$ 时, $\varphi(x)$ 单调增加,从而证得

$$\varphi(x+1)>\varphi(x) \quad (\forall x>1).$$

【证明思路二】 (两个单调性区间的情形) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可导,若存在 $x_0\in(a,b)$ 满足:

$$f'(x)\begin{cases}>0, & a<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ <0, & x_0<x<b\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{ 在 }[a,x_0]\text{ 单调上升,在 }[x_0,b]\text{ 单调下降,}$$

于是得不等式 $f(x)<f(x_0)(x\in[a,b], x\neq x_0)$ 及 $\begin{cases}f(a)<f(x)\leqslant f(x_0) & (a<x\leqslant x_0),\\ f(b)<f(x)\leqslant f(x_0) & (x_0\leqslant x<b).\end{cases}$ 若又有 $f(a)\geqslant 0, f(b)\geqslant 0$,则可得 $f(x)>0(x\in(a,b))$,如图 4.12 .

www.TopSage.com

同理，若满足 $f'(x)\begin{cases}<0, & a<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x_0<x<b\end{cases}$ 则得不等式 $f(x)>f(x_0)$ $(x\in[a,b],x\neq x_0)$，如图 4.13 .

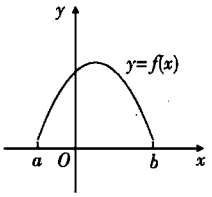


图 4.12

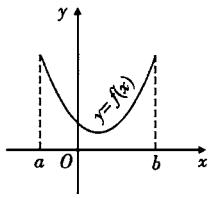


图 4.13

【例 4.25】 当 $x\geqslant 0$，证明 $\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$，其中 n 为自然数.

【证法一】 令 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x$. 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，除 $x=k\pi(k=1,2,3,\cdots)$ 的点外，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 单调上升，在 $x\geqslant 1$ 单调减小，因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上取最大值 $f(1)$. 又当 $t\geqslant 0$ 时 $\sin t\leqslant t$，于是当 $x\geqslant 0$ 时有

$$f(x)\leqslant f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

【证法二】 利用定积分的性质来证明. 由于

$$f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t+\int_1^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t,$$

因为当 $t\geqslant 1$ 时 $t-t^2\leqslant 0$，所以 $\int_1^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t<0$. 于是

$$f(x)\leqslant\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

【证明思路三】 利用单调性来证明不等式时，常要判断 $f'(x)$ 的符号，如果 $f'(x)$ 的符号不好判断，可继续求 $f''(x)$，甚至求 $f'''(x)$，以便作进一步判断.

按这种想法，我们可利用求一阶及高阶导数证明不等式，如【例 4.26】及【例 4.27】.

【例 4.26】 求证：$1+x^2<2^x$ $(0<x<1)$.

【证明】 令 $f(x)=2^x-(x^2+1)(x\in[0,1])$，则

$$f'(x)=2^x\ln 2-2x,\quad f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2,\quad f'''(x)=2^x\ln^3 2>0.$$

因此 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 单调增加. 又 $f''(1)=2(\ln^2 2-1)<0$，则 $f''(x)<0$ $(x\in[0,1])$，故 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 单调下降. 又 $f'(0)=\ln 2>0$，$f'(1)<0$，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 存在唯一零点记为 x_0，所以

$$f'(x)>0\ (x\in[0,x_0)),\quad f'(x_0)=0,\quad f'(x)<0\ (x\in(x_0,1]).$$

故 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 单调上升，在 $[x_0,1]$ 单调下降. 又 $f(0)=0$，$f(1)=0$，则 $f(x)>0(x\in(0,1))$，即

$$2^x>1+x^2\quad(\forall x\in(0,1)).$$

【例 4.27】 求证：$x\in(0,1)$ 时，

(Ⅰ) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；　　(Ⅱ) $\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

www.TopSage.com

【证明】 (Ⅰ)令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$,则

$$f'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x),$$

$$f''(x)=2-2\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2}{1+x}=\frac{2}{1+x}[x-\ln(1+x)](x>0).$$

因为当 $x>0$ 时 $\frac{2}{1+x}>0$,所以 $f''(x)$ 与 $x-\ln(1+x)$ 同号. 由于 $G(x)=x-\ln(1+x)$ 满足 $G(0)=0$, $G'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0(\forall x>0)$,可见当 $x>0$ 时 $G(x)>0$,于是 $f''(x)>0$. 由此可得 $f'(x)$ 在 $x>0$ 时单调上升,又 $f'(0)=0$,则 $f'(x)>0$ $(\forall x>0)$. 所以 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调上升. 又 $f(0)=0$,则 $x>0$ 时, $f(x)>0$,即 $x^2>(1+x)\ln^2(1+x)$.

(Ⅱ)令 $g(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$,则由题(Ⅰ)知当 $x>0$ 时有

$$g'(x)=-\frac{1}{\ln^2(1+x)}\frac{1}{(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+(1+x)\ln^2(1+x)}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}<0,$$

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调下降. 又 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 连续, $g(x)$ 在 $x=0$ 无定义,但

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\xlongequal{\text{等价无穷小因子替换}}\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2},$$

若补充定义 $g(0)=\frac{1}{2}$,则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 又 $g'(x)<0, 0<x<1$,因此 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 单调下降. 所以,当 $0<x<1$ 时, $g(1)<g(x)<g(0)$. 于是 $\frac{1}{\ln2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

评注 ①设 $f(x)$ 在 (a,b) 可导且 $f'(x)>0$(或 <0), $x\in(a,b)$,又

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=A,\quad \lim_{x\to b-0}f(x)=B,$$

则 $A<f(x)<B$(或 $A>f(x)>B$), $\forall x\in(a,b)$.

因为若补充定义 $f(a)=A, f(b)=B$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调上升(或单调下降).

②考生应提高反复运用某一知识的能力,如 $f'(x)<0$,大家都知道 $f(x)$ 单调下降,但对 $\varphi(x)$ 连续两次用这一定理也许就想不到.

已知 $\varphi(0)=0$,要证 $\varphi(x)<0$,只需证 $\varphi(x)$ 单调下降,即只要证 $\varphi'(x)<0$. 若 $\varphi'(0)=0$,要证 $\varphi'(x)<0$,只需证 $\varphi'(x)$ 单调下降,即只需证 $\varphi''(x)<0$. 如果证 $\varphi''(x)<0$ 还有困难,则可再计算出 $\varphi''(0)$ 与 $\varphi'''(x)$. 若 $\varphi''(0)=0$,且 $\varphi'''(x)<0$ 则可判断. 在复习中应注重这种反复运用同一定理分析能力的培养.

【证明思路四】 $f(x)>0$ $(x\in(a,b))$ $\Leftrightarrow$ $\mu(x)f(x)>0$ $(x\in(a,b))$,其中 $\mu(x)>0$.

若 $\mu(x)f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $[\mu(x)f(x)]'>0$ $(x\in(a,b))$, $f(a)\geqslant0$,则 $f(x)>0$ $(x\in(a,b))$.

【例4.28】 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导,且 $f(0)=0$. 若 $f'(x)>-f(x)$, $\forall x\in(0,+\infty)$,求证: $f(x)>0, x\in(0,+\infty)$.

【分析与证明】 要证 $f(x)>0$ $\Leftrightarrow$ $e^xf(x)>0$ $(x>0)$.

由 $[e^xf(x)]'=e^x[f'(x)+f(x)]>0$ $(x>0)$ $\Rightarrow$ $e^xf(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调上升

$\Rightarrow$ $e^xf(x)>e^xf(x)\big|_{x=0}=0$ $(x>0)$ $\Rightarrow$ $f(x)>0$ $(x>0)$.

www.TopSage.com

TopSage.com

▶ 方法 3° 利用函数的最大值或最小值证明不等式

【证明思路】 若 $f(x)$ 在区间 I 上达最大值 M，则 $f(x) \leqslant M \quad (x \in I)$；若 $f(x)$ 在区间 I 上达最小值 m，则 $f(x) \geqslant m \quad (x \in I)$.

【例 4.29】 求证：$x \in [0,1]$ 时，

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1, \quad p > 1; \quad 1 \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant \frac{1}{2^{p-1}}, \quad 0 < p < 1.$$

【证明】 令 $f(x) = x^p + (1-x)^p$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且有

$$f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]. \quad \text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{2}.$$

易知 $$f(0) = f(1) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

$p > 1$ 时，$1 > \frac{1}{2^{p-1}} \Rightarrow f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 1，最小值为 $\frac{1}{2^{p-1}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{p-1}} \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad x \in [0,1].$$

$0 < p < 1$ 时，$1 < \frac{1}{2^{p-1}} \Rightarrow f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 $\frac{1}{2^{p-1}}$，最小值为 1

$$\Rightarrow 1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2^{p-1}}, \quad x \in [0,1].$$

评注 ① 本题中不必用单调性就可求得最大、最小值，从而证明不等式. 如果求出

$$f''(x) = p(p-1)[x^{p-2} + (1-x)^{p-2}] \begin{cases} > 0, & x \in (0,1), \quad p > 1, \\ < 0, & x \in (0,1), \quad 0 < p < 1, \end{cases}$$

也可利用单调性证明不等式.

② 前面所讲的方法 2° 实质上也是利用最大值或最小值证明不等式，只不过是利用单调性求得最大值或最小值.

▶ 方法 4° 引进辅助函数把证明常值不等式转化为证明函数不等式

【例 4.30】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1 (x \in (0,1))$，求证：

$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

【分析与证明一】 即证 $\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 - \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x > 0$. 考察 $F(x) = \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2 - \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，若能证明 $F(x) > 0 (x \in (0,1])$ 即可. 这可用单调性方法.

令 $F(x) = \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2 - \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，易知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且

$$F(0) = 0, \quad F'(x) = f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)\right].$$

由条件知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调上升，$f(x) > f(0) = 0 (x \in (0,1])$，从而 $F'(x)$ 与 $g(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)$ 同号. 再考察

$$g'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0 \ (x \in (0,1)),$$

$g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，于是 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 单调上升，$g(x) > g(0) = 0 (x \in (0,1])$，也就有 $F'(x) > 0 (x \in (0,1])$，即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 单调上升，$F(x) > F(0) = 0 (x \in (0,1])$. 因此

$$F(1) = \left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 - \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x > 0.$$

www.TopSage.com

即结论成立.

【分析与证明二】 由条件知,$f(x)>0(x\in(0,1])$,可转化为证不等式

$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\Big/\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x>1.$$

引进辅助函数 $F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2$, $G(x)=\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$,又可转化为证不等式

$$\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}>1.$$

这可用柯西中值定理.

易知 $F(x),G(x)$ 在$[0,1]$ 可导,$G'(x)=f^3(x)\neq 0(x\in(0,1])$,于是由柯西中值定理知,$\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$$\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{2f(\xi)\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t}{f^3(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}.$$

对$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与$f^2(x)$ 还可在$[0,\xi]$ 上用柯西中值定理,$\exists\eta\in(0,\xi)$ 使得

$$\frac{2\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}=\frac{2f(\eta)}{2f(\eta)f'(\eta)}=\frac{1}{f'(\eta)}>1.$$

因此
$$\frac{\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^2}{\int_0^1 f^3(t)\mathrm{d}t}=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}>1.$$

评注 这里为证明积分不等式,引进了辅助函数——相应的变限积分,把问题转化为用单调性方法证明函数不等式或用柯西中值定理证明函数增量之比满足的不等式.

▶ 方法5° 利用函数的凹凸性证明不等式

【证明思路】 设$f(x)$ 在(a,b) 二阶可导.由$f''(x)$ 可判断$f(x)$ 的凹凸性,具有凹凸性的函数就满足一些不等式,如(4.4) 及下面的(4.5) 与(4.6),因此利用凹凸性可证一些不等式.

【例4.31】 设$f(x)$ 在(a,b) 二阶可导,$\forall x_1,x_2\in(a,b),x_1\neq x_2,\forall t\in(0,1)$,则

(Ⅰ) 若$f''(x)>0(\forall x\in(a,b))$,有

$$f[tx_1+(1-t)x_2]<tf(x_1)+(1-t)f(x_2),\tag{4.5}$$

特别有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$;

(Ⅱ) 若$f''(x)<0(\forall x\in(a,b))$,有

$$f[tx_1+(1-t)x_2]>tf(x_1)+(1-t)f(x_2),\tag{4.6}$$

特别有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$.

【分析与证明一】 (Ⅰ) 与(Ⅱ) 的证法是类似的,下面只证(Ⅰ).因$f''(x)>0$ $(x\in(a,b))$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 在(a,b) 为凹的 $\Rightarrow$ (4.4) 相应的式子成立.注意$tx_1+(1-t)x_2\in(a,b)$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}f(x_1)&>f[tx_1+(1-t)x_2]+f'[tx_1+(1-t)x_2][x_1-(tx_1+(1-t)x_2)]\\&=f[tx_1+(1-t)x_2]+f'[tx_1+(1-t)x_2](1-t)(x_1-x_2),\\f(x_2)&>f[tx_1+(1-t)x_2]+f'[tx_1+(1-t)x_2][x_2-(tx_1+(1-t)x_2)]\\&=f[tx_1+(1-t)x_2]-f'[tx_1+(1-t)x_2]t(x_1-x_2),\end{aligned}$$

两式分别乘t 与$(1-t)$ 后相加得

$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)>f[tx_1+(1-t)x_2].$$

www.TopSage.com

【分析与证明二】　不妨设 $x_1 < x_2$，将 x_2 换成 x，引进函数

$$F(x) = tf(x_1) + (1-t)f(x) - f[tx_1 + (1-t)x].$$

若能证：$x_1 < x \leqslant x_2$ 时，$F(x) > 0$，则原结论（Ⅰ）成立．因

$$F(x_1) = f(x_1) - f(x_1) = 0,$$

$F(x) > 0$ 的一个充分条件是 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 单调上升，因此只需考察 $F'(x)$．

$$\begin{aligned} F'(x) &= (1-t)f'(x) - f'[tx_1 + (1-t)x](1-t) \\ &= (1-t)[f'(x) - f'(tx_1 + (1-t)x)], \end{aligned}$$

注意到当 $x_1 < x \leqslant x_2$ 时，$x_1 < tx_1 + (1-t)x = x + t(x_1 - x) < x \leqslant x_2$．由 $f''(x) > 0$ $(\forall x \in (a,b))$，得 $f'(x)$ 在 (a,b) 单调上升，所以　$f'(x) > f'[tx_1 + (1-t)x]$　$(x_1 < x \leqslant x_2)$．

即 $F'(x) > 0$　$(x_1 < x \leqslant x_2)$，亦即 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 单调上升．因此 $F(x_2) > F(x_1) = 0$，即

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) > f[tx_1 + (1-t)x_2].$$

评注　这里把证明数值不等式（4.5）变成证明函数不等式，微分学的理论就可以应用了．这里，实际上还是利用单调性来证明函数不等式．

【例 4.32】　设 $a > 0, b > 0, a \neq b$，证明下列不等式：

（Ⅰ）　$a^p + b^p > 2^{1-p}(a+b)^p$　$(p > 1)$；　（Ⅱ）　$a^p + b^p < 2^{1-p}(a+b)^p$　$(0 < p < 1)$．

【证明】　将 $a^p + b^p > 2^{1-p}(a+b)^p$ 改写成 $\frac{1}{2}(a^p + b^p) > \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$．考察函数 $f(x) = x^p, x > 0$，则

$$f'(x) = px^{p-1}, \quad f''(x) = p(p-1)x^{p-2}.$$

（Ⅰ）若 $p > 1$，则 $f''(x) > 0$ $(\forall x > 0)$，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为凹函数，由已知不等式（4.5），其中 $t = \frac{1}{2}$ 得：$\forall a > 0, b > 0, a \neq b$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(a) + f(b)], \text{即} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^p < \frac{1}{2}(a^p + b^p).$$

（Ⅱ）若 $0 < p < 1$，则 $f''(x) < 0$ $(\forall x > 0)$，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为凸函数，由不等式（4.6），其中 $t = \frac{1}{2}$ 得 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$，即　$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p > \frac{1}{2}(a^p + b^p)$．

▶ 方法 6°　利用泰勒公式证明不等式（见第五章）

题型六　讨论函数的零点

▶1. 利用连续函数零点存在性定理证明连续函数在给定区间至少存在一个零点

【证明思路】　应用连续函数零点存在性定理证明连续函数在给定区间至少存在一个零点，并结合函数的单调性确定零点的唯一性．

连续函数零点存在性定理的推广：

【推广 1】　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，又存在极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = B$，且 $A \cdot B < 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 至少有一个零点．

【注】　把无穷区间的情形转化为有穷区间的情形，这通过极限的不等式性质或变量替换即可得证．

【推广 2】　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，又 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty (+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 至少有一个零点．（参见题型训练三、17 题）

【注】　若把区间 $(-\infty, +\infty)$ 改为 $(a, +\infty)$，$(-\infty, b)$ 或 (a,b) 等，有类似的结论．

www.TopSage.com

【例 4.33】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 可导，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，$\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{x-a}=\alpha>0$，求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 至少有一个零点.

【分析】 只要由所给条件证明：$\exists x_1$ 与 x_2，使得 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$ 即可. 由 $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$ 确定 $x<a$，x 靠近 a 时 $f(x)$ 的符号，要根据极限的不等式性质来判断. 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$ 确定 $x<0$，$|x|$ 充分大时 $f(x)$ 的符号，要应用微分中值定理(联系函数和它的导数).

【证明】 由极限的不等式性质，$\exists\delta>0$，当 $x\in[a-\delta,a)$ 时 $\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，即 $f(x)<0$，也就有 $f(a-\delta)<0$. $\exists x_0<a-\delta$，当 $x\leqslant x_0$ 时 $f'(x)\leqslant\dfrac{\beta}{2}<0$. 于是由微分中值定理知，当 $x<x_0$，$\exists\xi\in(x,x_0)$，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\geqslant f(x_0)+\frac{\beta}{2}(x-x_0),$$

因此 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$\exists x_1<a-\delta$，使得 $f(x_1)>0$. 在 $[x_1,a-\delta]$ 上应用连续函数零点存在性定理，$f(x)$ 在 $(x_1,a-\delta)$ 上至少存在一个零点.

▶2. 证明导函数存在零点的方法

【证明思路】 利用微分学理论讨论导函数的零点存在性问题，最基本的依据是费马定理或由它导出的罗尔定理.

必须注意，最值点处的导数性质：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 必存在最大(小)值.

若 $f(x)$ 在 $x=c\in(a,b)$ 取最大(小)值，则 $f'(c)=0$.

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取 $[a,b]$ 上最大(小)值，则 $f'_+(a)\leqslant0(\geqslant0)$；若 $f(x)$ 在 $x=b$ 处取 $[a,b]$ 上最大(小)值，则 $f'_-(b)\geqslant0(\leqslant0)$.

■ 情形 Ⅰ　利用函数的最大值或最小值在区间内部达到证明导函数至少存在一个或两个零点

【证明思路】 在一定条件下证明函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大或最小值在区间 (a,b) 内取到，于是最值点必是极值点，从而 $f'(x)$ 在 (a,b) 至少存在一个零点. 若能证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值均在 (a,b) 内取到，就可证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 至少存在两个零点.

【例 4.34】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 有零点(未假定 $f'(x)$ 连续).

【证明】 不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值不能在 $x=a$ 及 $x=b$ 取到，即 $\exists c\in(a,b)$，使得 $f(c)=\max\limits_{[a,b]}f(x)$，$x=c$ 是 $f(x)$ 的极值点，$f'(c)=0$.

评注 ① 导函数的中值定理是：设 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1\neq x_2$，只要 $f'(x_1)\neq f'(x_2)$，则对任意介于 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 之间的值 c，必存在介于 x_1 与 x_2 之间的 ξ 使得 $f'(\xi)=c$.

总之导函数没有间断点，无论导函数是否连续，中值定理对于导函数都成立.

③ 作为一个重要推论，设 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，若 $f'(x)$ 在 (a,b) 无零点，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 恒正或恒负，利用这个事实和反证法可以证明许多导函数零点存在的命题.

【例 4.35】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$，$f(a)\geqslant f(b)$，求证：$f'(x)$ 在 (a,b) 至少有两个零点.

【证明】 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的连续性保证，在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 至少达到最大值和最小值各一次. 由 $f(a)\geqslant f(b)$ 得，若 $f(x)$ 的最大值在区间端点达到，则必在 $x=a$ 达到. 由 $f(x)$ 的可导性，必有 $f'_+(a)\leqslant0$，条件 $f'_+(a)>0$ 表明 $f(x)$ 的最大值不能在端点达到. 同理可证 $f(x)$ 的最小值也不能在端点 $x=a$

www.TopSage.com

或$x=b$达到. 因此, $f(x)$在$[a,b]$的最大值与最小值必在开区间(a,b)达到, 于是最大值点与最小值点均为极值点. 又$f(x)$在$[a,b]$可导, 在最大(小)值点处$f'(x)=0$, 所以$f'(x)$在(a,b)至少有两个零点.

【例 4.36】 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, 求证: $\exists c\in(-\infty,+\infty)$, 使得$f'(c)=0$.

【证法一】 由极限不等式性质转化为有限区间的情形(如图 4.14).

若$f(x)\equiv A$, 显然成立. 若$f(x)\neq A$, 必存在x_0, $f(x_0)\neq A$, 不妨设$f(x_0)<A$. 由极限不等式性质, $\exists b>x_0$, $f(b)>f(x_0)$; $\exists a<x_0$, $f(a)>f(x_0)$. $f(x)$在$[a,b]$有最小值, 它不能在$x=a$或$x=b$处达到, 必在(a,b)内某点c处达到, 于是$f'(c)=0$.

【证法二】 由变量替换转化为有限区间的情形.

令 $x=\tan t$, $g(t)=\begin{cases}A, & t=\pm\dfrac{\pi}{2},\\ f(\tan t), & t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\end{cases}$

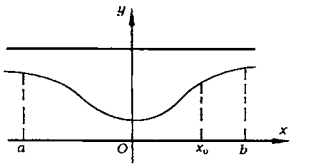


图 4.14

则 $\lim\limits_{t\to\pm\frac{\pi}{2}\mp0}g(t)=\lim\limits_{t\to\pm\frac{\pi}{2}\mp0}f(\tan t)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=A$.

于是$g(t)$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$连续, $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $g(t)$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$可导, 由罗尔定理, 得

$$\exists t^*\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ g'(t^*)=0,\text{即}\quad f'(\tan t^*)\frac{1}{\cos^2 t^*}=0.$$

令$c=\tan t^*$, 得$f'(c)=0$.

【证法三】 反证法. 若$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$无零点, 则$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$或恒正或恒负, 即$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调, 与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$矛盾. 故$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$必有零点.

■ 情形 Ⅱ　用罗尔定理证明导函数或高阶导函数零点的存在性与个数估计

【证明思路】 对可导函数在某区间找函数值相等的两点, 就可用一次罗尔定理证明导函数在该区间存在零点, 多次应用罗尔定理可证明高阶导函数存在零点或由高阶导数不存在零点给出原来函数零点个数的估计. 有时也结合反证法来讨论导函数存在零点.

【例 4.37】 设$f(x)$在$[0,1]$三阶可导, 且$f(0)=f(1)=0$. 设$F(x)=x^2f(x)$, 求证: 在$(0,1)$内存在c, 使得 $F'''(c)=0$.

【证明】 由于$F(0)=F(1)=0$, $F(x)$在$[0,1]$可导, 则$\exists\xi_1\in(0,1)$, $F'(\xi_1)=0$. 又

$$F'(x)=x^2f'(x)+2xf(x),$$

及由$F'(0)=0$, $F'(\xi_1)=0$, $F'(x)$在$[0,1]$可导, 则$\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$, 使得$F''(\xi_2)=0$. 又

$$F''(x)=x^2f''(x)+4xf'(x)+2f(x),$$

及由$F''(0)=F''(\xi_2)=0$, $F''(x)$在$[0,1]$可导, 则$\exists c\in(0,\xi_2)$, 使得$F'''(c)=0$.

推注 一般地, 设$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)内可导, 若$f(x)$至少有$n+1$个不同的点取相同的值, 则$\exists\xi\in(a,b)$, 使得$f^{(n)}(\xi)=0$.

【例 4.38】 设a,b,c为实数, 求证: 方程$e^x=ax^2+bx+c$的根不超过三个.

【证明】 用反证法. 设方程有四个不同的根, 分别为: $x_1<x_2<x_3<x_4\Rightarrow f(x)=e^x-ax^2-bx-c$有四个不同的零点$x_1<x_2<x_3<x_4$. 应用罗尔定理, 有

函数$f'(x)=e^x-2ax-b$至少有三个不同零点;

函数$f''(x)=e^x-2a$至少有两个不同零点;

函数$f'''(x)=e^x$至少有一个零点.

www.TopSage.com

然而函数 e^x 无零点，这便产生矛盾，即方程至多只有三个根.

评注 一般地，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 n 阶可导，$f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 无零点，则 $f(x)$ 在 (a,b) 至多有 n 个不同的根.

大家网 TopSage.com

▶3. 用罗尔定理或费马定理证明函数 $f(x)$ 至少存在一个零点的方法

【证明思路】 利用费马定理或罗尔定理证明函数 $f(x)$ 至少存在一个零点.

■ 情形 Ⅰ 对 $f(x)$ 的原函数用费马定理或罗尔定理证明 $f(x)$ 的零点存在性

利用费马定理或罗尔定理可以讨论导函数的零点存在性，怎样用它讨论函数 $f(x)$ 的零点的存在性呢？只要 $f(x)$ 是某函数 $F(x)$ 的导数或高阶导数，对 $F(x)$ 利用费马定理或罗尔定理讨论它的导函数的零点存在性就是讨论 $f(x)$ 的零点的存在性.

常见以下情形：证明 $f(x)$ 在 (a,b) 存在零点，转化为求 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$（$F'(x)=f(x)$），利用罗尔定理证明 $F'(x)$（即 $f(x)$）在 (a,b) 存在零点.

求原函数时常常用到以下公式：

(1) $f(x)g'(x)+f'(x)g(x)=[f(x)g(x)]'$；

(2) $\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$；

(3) $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)=[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'$；

(4) $f(x)g''(x)+2f'(x)g'(x)+f''(x)g(x)=[f(x)g'(x)+f'(x)g(x)]'$；

(5) $\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ a & b \end{vmatrix}=\left[\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ a & b \end{vmatrix}\right]'$；

(6) $xf(x)+\int_0^x f(t)\,dt=\left[x\int_0^x f(t)\,dt\right]'$；

(7) $\int_0^x f(t)\,dt=\left[\int_0^x (x-t)f(t)\,dt\right]'$；

(8) $f''(x)-l=\left[f(x)-\dfrac{1}{2}lx^2-k_1x-k_2\right]''$，其中 l,k_1,k_2 为常数.

【例 4.39】 设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$，其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为常数. 证明：

(Ⅰ) $f(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 必有两个相异的零点；(Ⅱ) $f^{(m)}(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 也必有两个相异的零点.

【分析】 即证：$f(x)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}a_k\sin kx-\dfrac{1}{k}b_k\cos kx\right)\right]'$ 在 $[0,2\pi)$ 存在两个相异零点. 只要证

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}a_k\sin kx-\frac{1}{k}b_k\cos kx\right)$$

在 $[0,2\pi)$ 有两个极值点. 注意：$F(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，$F(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 的最大与最小值点也是 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大与最小值点，因而必是极值点.

【证明】 (Ⅰ) 令 $F(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{a_k}{k}\sin kx-\dfrac{b_k}{k}\cos kx\right)$，显然，$F'(x)=f(x)$. 由于 $F(x)$ 以 2π 为周期且 $F(0)=F(2\pi)$，故 $F(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，从而必有最大值与最小值. 设 $F(x)$ 分别在 x_1,x_2 达到最大值与最小值，且 $x_1\neq x_2,x_1,x_2\in[0,2\pi)$，则 $F(x_1),F(x_2)$ 也是 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值，最小值，因此 x_1,x_2 必是极值点. 又 $F(x)$ 可导，由费马定理知 $F'(x_1)=f(x_1)=0,F'(x_2)=f(x_2)=0$.

(Ⅱ) $f^{(m)}(x)$ 同样为(Ⅰ)中类型的函数即可写成 $f^{(m)}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$，其中 α_k,β_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 为常数，利用(Ⅰ)的结论，$f^{(m)}(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 必有两个相异的零点.

www.TopSage.com

【例 4.40】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x = 0$，求证：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在两个零点.

【分析】 为证 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在两个零点，只需证 $f(x)$ 的原函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 区间上有三点的函数值相等. 由于 $F(0) = 0, F(1) = 0$，故只需再考察 $F(x)$ 的原函数 $G(x) = \int_0^x F(s)\mathrm{d}s$，证明 $G(x)$ 的导数在 $(0,1)$ 内存在零点.

【证明】 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, G(x) = \int_0^x F(s)\mathrm{d}s$，显然 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$G(0) = 0$，又

$$G(1) = \int_0^1 F(s)\mathrm{d}s \xlongequal{\text{分部积分}} sF(s)\Big|_0^1 - \int_0^1 s\mathrm{d}F(s)$$

$$= F(1) - \int_0^1 s f(s)\mathrm{d}s = 0 - 0 = 0,$$

对 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 上用罗尔定理知，$\exists c \in (0,1)$ 使得 $G'(c) = F(c) = 0$.

现由 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$F(0) = F(c) = F(1) = 0$，分别在 $[0,c]$，$[c,1]$ 对 $F(x)$ 用罗尔定理知，$\exists \xi_1 \in (0,c), \xi_2 \in (c,1)$，使得 $F'(\xi_1) = f(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = f(\xi_2) = 0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在两个零点.

评注 $f(x)$ 满足两个积分等式，也可用定积分的性质来证明这个结论.

若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 不变号，则 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）（$x \in (0,1)$）$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0$（或 < 0）与已知矛盾 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$ 至少一个零点，记为 c（$c \in (0,1)$）.

若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 只有一个零点 $c \Rightarrow f(x)$ 分别在 $(0,c)$，$(c,1)$ 均不变号，此时只能有两种情形：$x \in (0,c)$ 时 $f(x) > 0$（< 0）；$x \in (c,1)$ 时 $f(x) < 0$（> 0），不可能在两个区间上的正或负.于是

$$\int_0^1 (c-x) f(x)\mathrm{d}x = \int_0^c (c-x) f(x)\mathrm{d}x + \int_c^1 (c-x) f(x)\mathrm{d}x > 0 (< 0).$$

这与 $\int_0^1 (c-x) f(x)\mathrm{d}x = c\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾.

因此，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少 $\exists$ 两个零点.

■ 情形 Ⅱ 适当选择恒正函数 $\mu(x)$，对 $\mu(x)f(x)$ 的原函数用费马定理或罗尔定理，证明 $f(x)$ 的零点存在性

如果 $f(x)$ 的原函数求不出来，前面的方法就不好用. 这种情形下，有时把证明 $f(x)$ 在 (a,b) 存在零点转化为证明 $\mu(x)f(x)$ 在 (a,b) 存在零点，其中 $\mu(x)$ 在 (a,b) 恒正. 进一步转化为证明 $\mu(x)f(x)$ 的原函数 $F(x)$（$F'(x) = \mu(x)f(x)$）的导数 $F'(x)$ 在 (a,b) 存在零点（因为 $f(x)$ 的原函数求不出来，但 $\mu(x)f(x)$ 的原函数可能求得出来）.

例如，证明 $f'(x) + P(x)f(x) - Q(x)$ 在 (a,b) 存在零点，等价于证明 $\mu(x)[f'(x) + P(x)f(x) - Q(x)]$ 在 (a,b) 存在零点，其中 $\mu(x)$ 为 (a,b) 内任意恒正的函数. 受求解一阶线性方程积分因子法的启发，取 $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ 时，有

$$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}[f'(x) + P(x)f(x) - Q(x)] = \left[\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} f(x) - \int \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} Q(x)\mathrm{d}x\right]'.$$

这就转化证明辅助函数

www.TopSage.com

$$F(x)=e^{\int P(x)dx}f(x)-\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

的导函数在(a,b)存在零点.

【例 4.41】 设$f(x)$在$[x_1,x_2]$可导,$0<x_1<x_2$,证明:$\exists\xi\in(x_1,x_2)$使得

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

【分析】 令$l=\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}$,证明$\exists\xi\in(x_1,x_2)$使得$l=f(\xi)-\xi f'(\xi)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)+l$在$(x_1,x_2)$存在零点$\Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{x}f(x)+\frac{l}{x}$在$(x_1,x_2)$存在零点$\xleftrightarrow[\text{取一个原函数}]{e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}}$

$\frac{1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)+\frac{l}{x^2}$在$(x_1,x_2)$存在零点$\Leftrightarrow\left[\frac{1}{x}f(x)-\frac{l}{x}\right]'$在$(x_1,x_2)$存在零点.

【证明】 令$F(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{l}{x}$,其中$l=\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}$,则$f(x)$在$[x_1,x_2]$可导,又

$$F(x_1)=\frac{1}{x_1}[f(x_1)-l],\quad F(x_2)=\frac{1}{x_2}[f(x_2)-l],$$

$$F(x_1)-F(x_2)=\frac{1}{x_1x_2}[f(x_1)x_2-f(x_2)x_1-l(x_2-x_1)]=0.$$

因此,由罗尔定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)$,使得

$$F'(\xi)=\frac{1}{\xi}f'(\xi)-\frac{1}{\xi^2}f(\xi)+\frac{l}{\xi^2}=\frac{1}{\xi^2}[\xi f'(\xi)-f(\xi)+l]=0,$$

即 $$f(\xi)-\xi f'(\xi)=l.$$

■ **情形 Ⅲ　证明$f''(x)+P(x)f'(x)-Q(x)$在某区间(a,b)存在零点**

$f''(x)+P(x)f'(x)-Q(x)$的零点存在性

$\Leftrightarrow\left[e^{\int P(x)dx}f'(x)-\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right]'$的零点存在性.

【例 4.42】 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导,且$f(0)=f(1)=0$,试证:$\exists\xi\in(0,1)$使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{(\xi-1)^2}f'(\xi).$$

【分析】 即证$f''(x)-\frac{1}{(x-1)^2}f'(x)$在$(0,1)$存在零点$\xleftrightarrow[\text{取一个原函数}]{e^{-\int\frac{dx}{(x-1)^2}}=e^{\frac{1}{x-1}}}\left[e^{\frac{1}{x-1}}f'(x)\right]'$在$(0,1)$存在零点.

【证明】 令$F(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}f'(x), & x\in[0,1),\text{由于}\\ 0, & x=1,\end{cases}$

$$\lim_{x\to1-0}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to-\infty}e^t=0,\quad\lim_{x\to1-0}e^{\frac{1}{x-1}}f'(x)=0,$$

因此$F(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导.

由于$f(0)=f(1)=0$,由罗尔定理知,$\exists\eta\in(0,1)$,有$f'(\eta)=0$. 因此,$F(\eta)=F(1)=0$,对$F(x)$在$[\eta,1]$上利用罗尔定理得,$\exists\xi\in(\eta,1)$,使得$F'(\xi)=e^{\frac{1}{\xi-1}}f''(\xi)-\frac{1}{(\xi-1)^2}e^{\frac{1}{\xi-1}}f'(\xi)=0$,即

www.TopSage.com

$$f''(\xi) = \frac{1}{(\xi-1)^2} f'(\xi).$$

▶4. 用单调性分析方法确定函数在给定区间上有几个零点

【解题思路】 确定可导函数在给定区间 I 上的单调性区间，每个单调性区间的边界点或是极值点或是区间 I 上的边界点，考察极值点函数值的符号及给定区间 I 的边界点处的函数值或极限值的符号就可确定该函数在给定区间 I 上零点的确切个数.

■ 情形 Ⅰ　证明某几类凸(凹)函数在给定区间上恰有两个零点

【例 4.43】 设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导，$f''(x) < 0$ $(\forall x \in (a,b))$，$\exists x_0 \in (a,b)$ 使得 $f'(x_0) = 0$，$f(x_0) > 0$，又 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = -\infty$ (图 4.15)，求证：$f(x)$ 在 (a,b) 恰有两个零点.

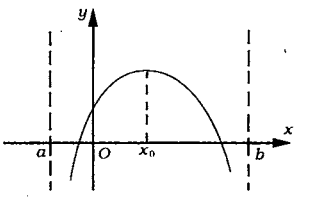


图 4.15

【证明】 由 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_1 \in (a,x_0), f(x_1) < 0, \exists x_2 \in (x_0,b), f(x_2) < 0$，则 $f(x)$ 在 (x_1,x_0) 与 (x_0,x_2) 内各存在一个零点.

因 $f''(x) < 0$，故 $f'(x)$ 在 (a,b) 单调减少，又 $f'(x_0) = 0$，则：(1) $f'(x) > 0$ $(\forall x \in (a,x_0))$，从而 $f(x)$ 在 (a,x_0) 单调增加；(2) $f'(x) < 0$ $(\forall x \in (x_0,b))$，$f(x)$ 在 (x_0,b) 单调减少. 因此，$f(x)$ 在 (a,x_0)，(x_0,b) 内分别存在唯一零点，即在 (a,b) 内恰有两个零点.

评注 ① 将条件 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = -\infty$ 改为存在极限 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A < 0$，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = B < 0$，可得相同结论.

② 对凹函数有类似情形.

【例 4.44】 求证：方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有两个不同的实根.

【分析】 即证 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在 $(0,+\infty)$ 只有两个零点. 先考察它的单调性：

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{xe}\begin{cases} > 0, & 0 < x < e, \\ = 0, & x = e, \\ < 0, & x > e, \end{cases} \qquad f(e) = \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx > 0.$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 与 $(e,+\infty)$ 分别单调上升与下降，只需证明：$\exists x_1 \in (0,e), f(x_1) < 0$；$\exists x_2 \in (e,+\infty), f(x_2) < 0$.

【证明】 令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$，由于 $f'(x)\begin{cases} > 0, & 0 < x < e, \\ < 0, & x > e, \end{cases}$ 又 $f(e) > 0$，

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e}\right) + \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx\right] = -\infty,$$

则 $\exists x_1 \in (0,e), f(x_1) < 0$；$\exists x_2 \in (e,+\infty), f(x_2) < 0$，所以 $f(x)$ 在 (x_1,e) 与 (e,x_2) 分别有零点. 又 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 与 $(e,+\infty)$ 分别单调，因此 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 与 $(e,+\infty)$ 内分别只有一个零点，即在 $(0,+\infty)$ 内只有两个零点.

评注 ① 该方法适用于证明：函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ $(k > 0$ 为常数$)$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有两个零点.

② 该题是属于凸函数的情形 $\left(f''(x) = -\frac{1}{x^2}\right)$，但由于 $f'(x)$ 的变化情形已非常清楚，故不必计算 $f''(x)$. 该题是【例 4.43】的特殊情形.

■ 情形 Ⅱ　零点个数随参数而变化的情形

【例 4.45】 就 a 的不同取值情况，确定方程 $\ln x = x^a$ $(a > 0)$ 实根的个数.

www.TopSage.com

【分析与求解】 令 $f(x)=\ln x-x^a$，即讨论 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有几个零点. 用单调性分析方法. 求 $f(x)$ 的单调性区间.

$$f'(x)=\frac{1}{x}-ax^{a-1}=\frac{a}{x}\left(\frac{1}{a}-x^a\right)\begin{cases}>0, & 0<x<x_0,\\ =0, & x=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\xlongequal{\text{记}}x_0,\\ <0, & x>x_0,\end{cases}\qquad (*)$$

则当 $0<x\leqslant x_0$ 时，$f(x)$ 单调上升；当 $x\geqslant x_0$ 时，$f(x)$ 单调下降；当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取最大值 $f(x_0)=\ln\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}-\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right]^a=-\frac{1}{a}(1+\ln a)$. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有几个零点，取决于 $y=f(x)$ 属于图 4.16 中的哪种情形.

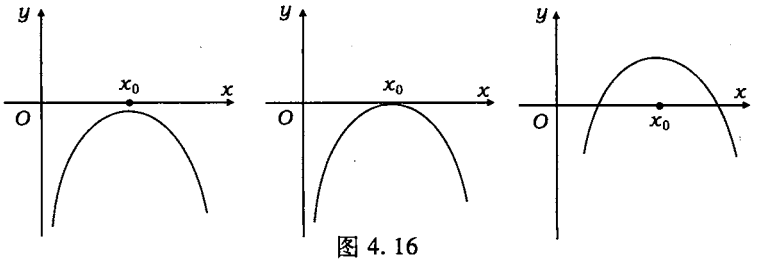


图 4.16

方程 $f(x)=0$ 的实根个数有下列三种情形：

(Ⅰ) 当 $f(x_0)=-\frac{1}{a}(1+\ln a)<0$ 即 $a>\frac{1}{e}$ 时，恒有 $f(x)<0$ $(\forall x\in(0,+\infty))$，故 $f(x)=0$ 没有根.

(Ⅱ) 当 $f(x_0)=-\frac{1}{a}(1+\ln a)=0$ 即 $a=\frac{1}{e}$ 时，由于 $x\in(0,+\infty)$，当 $x\neq x_0=e^e$ 时，$f(x)<0$，故 $f(x)=0$ 只有一个根，即 $x=x_0=e^e$.

(Ⅲ) 当 $f(x_0)=-\frac{1}{a}(1+\ln a)>0$ 即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^a\left(\frac{\ln x}{x^a}-1\right)\right]=-\infty,$$

故方程 $f(x)=0$ 在 $(0,x_0)$，$(x_0,+\infty)$ 各只有一个根. 因此，$f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 恰有两个根.

题型七 用微分中值定理证明函数或其导数存在某种特性点

当要证存在某些点使得它们的函数值或高阶导数值满足某等式(不等式)或具其他特性时，也常用到微分中值定理. 所求的点常常是公式中的中间值.

【例 4.46】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，又 $b>a>0$，求证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\eta f'(\eta)\frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

【分析与证明】 把所证的结论改写成 $f'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}}\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$. 由

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}\cdot\frac{\ln b-\ln a}{b-a},$$

www.TopSage.com

分别用拉格朗日中值定理与柯西中值定理 $\Rightarrow \exists \xi,\eta \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad \frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}}.$$ 代入上式即得结论.

大家网 TopSage.com

题型训练

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^4}=2$,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处

(A) 不可导. (B) 可导且 $f'(a)\neq 0$.

(C) 有极大值. (D) 有极小值.

2. 若 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^x$ 且 $f'(0)=0$,$f''(x)$ 在 $x=0$ 连续,则下列正确的是

(A) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0,f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 定义,$x_0\in(a,b)$,则下列命题中正确的是

(A) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增加且可导,则 $f'(x)>0(x\in(a,b))$.

(B) 若 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点,则 $f''(x_0)=0$.

(C) 若 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)=0$,$f'''(x_0)\neq 0$,则 x_0 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极值,则 $f'(x_0)=0$.

4. 设 $f(x)$ 可导,恒正,且 $0<a<x<b$ 时恒有 $f(x)<xf'(x)$,则

(A) $bf(a)>af(b)$. (B) $abf(x)>x^2f(b)$.

(C) $af(a)<xf(x)$. (D) $abf(x)<x^2f(a)$.

二、填空题

1. $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的极大值点是 $x=$_____,极小值点是 $x=$_____.

2. 曲线 $y=3x+\dfrac{\ln x}{2x}+1$ 的渐近线方程为_____.

3. 曲线 $y=\dfrac{9}{14}x^{\frac{1}{3}}(x^2-7)(-\infty<x<+\infty)$ 的拐点是_____.

4. 数列 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$ 的最大项为_____.

三、计算题与证明题

1. 求函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$ 的单调性区间,极值点,凹凸性区间与拐点. 2. 作函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图形.

3. 设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内可导,$g(x)\neq 0$ 且 $\begin{vmatrix}f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}=0$ $(\forall x\in(a,b))$.

证明:存在常数 c,使得 $f(x)=cg(x)$,$x\in(a,b)$.

4. 证明:$\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x\in(-\infty,+\infty))$.

5. 设 $P(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且为负值,$y=y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续,在 $(0,+\infty)$ 满足 $y'+P(x)y>0$

www.TopSage.com

且 $y(0) \geqslant 0$，求证：$y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调增加.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a) = f(b)$，且 $f(x)$ 不恒为常数，求证：在 (a,b) 内存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) > 0$.

7. 证明方程 $x = a\sin x + b(a > 0, b > 0$ 为常数$)$ 至少有一个正根不超过 $a + b$.

8. 求证：$e^x + e^{-x} + 2\cos x = 5$ 恰有两个根.　9. 证明：$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1 + x) < x(\forall x > 0)$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 可导，$\frac{d}{dx}[xf(x)] \leqslant -kf(x)(x > 1)$，在 $(1, +\infty)$ 的 $\forall$ 子区间上不恒等，又 $f(1) \leqslant M$，其中 k, M 为常数，求证：$f(x) < \frac{M}{x^{k+1}}(x > 1)$.

11. 设 $0 < x_1 < x_2$，$f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 可导，证明：在 (x_1, x_2) 内至少 $\exists$ 一个 c，使得

$$\frac{1}{e^{x_1} - e^{x_2}}\begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(c) - f'(c).$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导且 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2} f(x)\,dx$，求证：$\exists \xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

13. 设有参数方程 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

（Ⅰ）求证该参数方程确定 $y = y(x)$，并求定义域；（Ⅱ）讨论 $y = y(x)$ 的可导性与单调性；（Ⅲ）讨论 $y = y(x)$ 的凹凸性.

14. 设 $f(x) = nx(1 - x)^n$（n 为自然数），（Ⅰ）求 $\max\limits_{[0,1]} f(x)$；（Ⅱ）求证：$\max\limits_{[0,1]} f(x) < \frac{1}{e}$.

15. （Ⅰ）设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \delta)((x_0 - \delta, x_0])$ 连续，在 $(x_0, x_0 + \delta)((x_0 - \delta, x_0))$ 可导，又 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = A\right)$，求证：$f'_+(x_0) = A$ $(f'_-(x_0) = A)$.

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 连续，在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)/\{x_0\}$ 可导，又 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = A$，求证：$f'(x_0) = A$.

（Ⅲ）设 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，$x_0 \in (a,b)$ 是 $f'(x)$ 的间断点，求证：$x = x_0$ 是 $f'(x)$ 的第二类间断点.

16. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导，求证：

（Ⅰ）若 $x_0 \in (a, +\infty)$，$f'(x) \geqslant \alpha > 0(x > x_0)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$；

（Ⅱ）若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = A > 0$，则 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

17. 证明奇次方程 $a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$ 一定有实根，其中常数 $a_0 \neq 0$.

四、最值问题

1. 将长为 a 的一段铁丝截成两段，用一段围成正方形，另一段围成圆，为使两段面积之和最小，问两段铁丝各长多少？

2. 求从点 $A(10,0)$ 到抛物线 $y^2 = 4x$ 之最短距离.

3. 求圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的一条切线，使此切线与抛物线 $y = x^2 - 2$ 所围面积取最小值，并求此最小值.

4. 要造一个圆柱形无盖水池，使其容积为 $V_0 m^3$. 底的单位面积造价是周围的两倍，问底半径 r 与高 h 各是多少，才能使水池造价最低？

www.TopSage.com

第五章　一元函数的泰勒公式及其应用

内容概要与重难点提示

微分学理论的最一般情形是泰勒公式，它建立了函数增量、自变量增量与一阶及高阶导数的关系．因而可以用导数及高阶导数来研究函数．拉格朗日中值定理是泰勒公式的特殊情形．

要学会用泰勒公式首先要学会如何求泰勒公式，要熟练掌握基本函数：e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$，$(1+x)^\alpha$ 等的泰勒公式，由泰勒公式的唯一性会用这些泰勒公式求得某些函数的泰勒公式．

要学会用泰勒公式处理某些问题，如求某些未定式的极限，确定无穷小的阶，证明函数不等式及证明函数或它的高阶导数存在某种特征点．

考核知识要点讲解

一、带皮亚诺余项与拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

（一）带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式

【定理 5.1】 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处具有 n 阶导数，则

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x), \tag{5.1}$$

其中

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{5.2}$$

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0),\text{即}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0. \tag{5.3}$$

(5.1) 式是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 邻域（简称在 $x=x_0$）**带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式**（泰勒展开式），(5.3) 式是 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的 n 阶**皮亚诺余项**，(5.2) 式称为 $f(x)$ 在 x_0 的 n 阶泰勒多项式．

特别地，$n=1$ 时公式 (5.1) 就是导数的定义．

（二）带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

【定理 5.2】 设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 有 $n+1$ 阶导数，在 $[a,b]$ 有 n 阶连续导数，则 $\forall x\in[a,b]$，有

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x), \tag{5.4}$$

其中 $T_n(x)$ 由 (5.2) 式给出，而

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}, \tag{5.5}$$

ξ 在 x 与 x_0 之间，也可表为 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，$0<\theta<1$．

(5.4) 式是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式．(5.5) 式是拉格朗日余项．

当 $x_0=0$ 时的泰勒公式又称为麦克劳林公式．

www.TopSage.com

（三）五个基本初等函数的麦克劳林公式

$$(1)\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x),\quad R_n(x)=o(x^n)(x\to 0),$$

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x}x^{n+1},x\in(-\infty,+\infty).$$

$$(2)\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2n}(x),\quad R_{2n}(x)=o(x^{2n})\quad(x\to 0),$$

$$R_{2n}(x)=(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$(3)\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+1}(x),\quad R_{2n+1}(x)=o(x^{2n+1})\quad(x\to 0),$$

$$R_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$(4)(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_n(x),R_n(x)=o(x^n)(x\to 0),$$

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\quad x\in(-1,1).$$

$$(5)\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+R_n(x),\quad R_n(x)=o(x^n)(x\to 0),$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\quad x\in(-1,1].$$

【注】 以上各式中 $\theta\in(0,1)$.

二、泰勒公式的求法

（一）泰勒公式的唯一性

【定理 5.3】 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有 n 阶导数，且 $x\to x_0$ 时有

$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+\cdots+A_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\tag{5.6}$$

则 $A_0=f(x_0)$，$A_1=f'(x_0)$，$\cdots$，$A_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

这个定理称为**泰勒公式的唯一性定理**，它表明：不论用何种方法求得等式(5.6)，它必定是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的 n 阶泰勒公式．这使得我们可以不通过计算 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 和各阶导数值 $f^{(k)}(x_0)(k=1,2,\cdots,n)$ 来求得 $f(x)$ 的泰勒公式．

（二）求带皮亚诺余项泰勒公式的方法

▶1. 直接求法

通过求 $f(x_0)$，$f'(x_0)$，$\cdots$，$f^{(n)}(x_0)$ 而求得 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式．上述五个初等函数的泰勒公式均可由这个方法求得．

▶2. 间接求法

利用已知的泰勒公式，通过适当运算而得到待求的泰勒公式．具体有以下方法：

www.TopSage.com

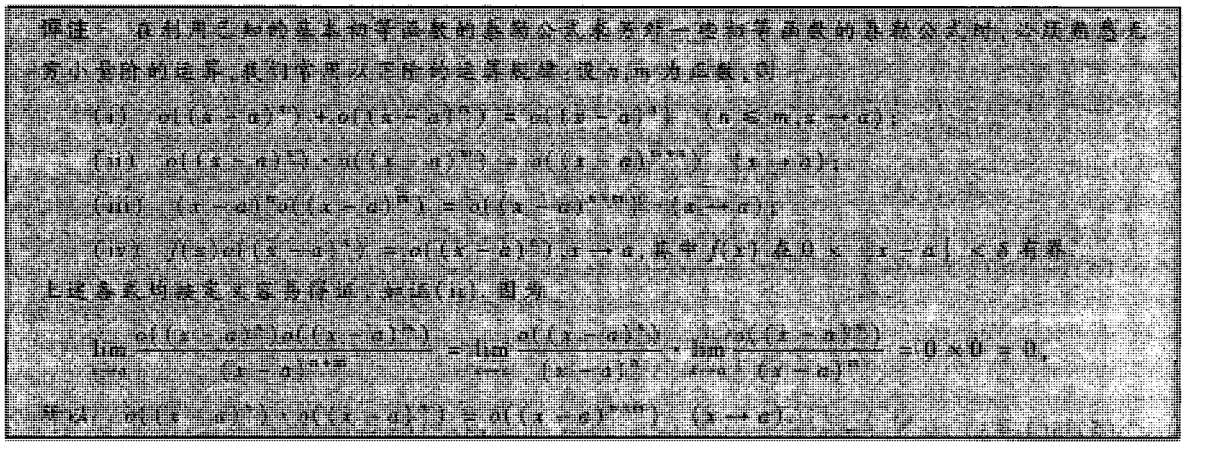
■ **四则运算**

【例 5.1】 求 $\sqrt{1+x}\cos x$ 的带皮亚诺余项的三阶麦克劳林公式.

【解】 $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$, $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$,则

$$\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+o(x^3).$$



■ **复合运算(变量替换)**

【例 5.2】 求 e^{-x^2} 带皮亚诺余项的麦克劳林公式.

【解】 令 $t=-x^2$,由 $e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+o(t^n)$ $(t\to 0)$,得

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+o(x^{2n}) \quad (x\to 0).$$

■ **逐项求导或求积分**

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处 n 阶可导,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 的 n 阶泰勒公式$(x\to x_0)$ 为

$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \tag{5.7}$$

则 由(5.7)式逐项求导可得 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 的 $n-1$ 阶泰勒公式:

$$f'(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+\cdots+nA_n(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1}); \tag{5.8}$$

由(5.7)逐项求积分可得 $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ 在 $x=x_0$ 的 $n+1$ 阶泰勒公式:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=A_0(x-x_0)+\frac{A_1}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{A_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1}). \tag{5.9}$$

【例 5.3】 求 $\arctan x$ 带皮亚诺余项的 5 阶麦克劳林公式.

【解】 $\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x(1-t^2+t^4)\,dt+o(x^5)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$.

(三) 求带拉格朗日余项泰勒公式的方法

带拉格朗日余项泰勒公式的求法参见本章题型一.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

三、泰勒公式的若干应用

(一) 带皮亚诺余项的泰勒公式的若干应用

▶1. 利用泰勒公式求未定式的极限

设 $h(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导,则有带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式 $(x\to a)$:

$$h(x)=h(a)+h'(a)(x-a)+\frac{h''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{h^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

现设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,并已求得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的泰勒公式:

$$f(x)=A(x-a)^n+o((x-a)^n),\quad g(x)=B(x-a)^m+o((x-a)^m),$$

其中 $A\neq 0, B\neq 0$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{A(x-a)^n+o((x-a)^n)}{B(x-a)^m+o((x-a)^m)}=\begin{cases}\dfrac{A}{B}, & m=n,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

当 $f(x), g(x)$ 的泰勒公式易求,而 $f(x), g(x)$ 的导数计算较复杂时,可考虑用泰勒公式求此极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. 在应用此方法时,必须熟记某些基本初等函数的泰勒公式.

【例 5.4】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

【解】 因 $\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}=\frac{x^2}{2}+1-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)+o(x^4)=\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$,

$$\cos x-e^{x^2}=\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)-(1+x^2)+o(x^2)=-\frac{3}{2}x^2+o(x^2).$$

又 $\sin x^2\sim x^2(x\to 0)$,所以 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{\left[-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right]x^2}=\dfrac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{12}$.

▶2. 利用泰勒公式确定无穷小的阶

(1) 若当 $x\to a$ 时 $f(x)=A_n(x-a)^n+o((x-a)^n)$,其中 $A_n\neq 0$,则当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

(2) 若在 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$ 中,$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$,则

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

即当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 是 $(x-a)$ 的 n 阶无穷小. 由此可知,无穷小的阶数是不为零的导数的最小阶数.

【例 5.5】 确定常数 a 和 b 的值,使 $f(x)=x-(a+be^{x^2})\sin x$ 当 $x\to 0$ 时是 x 的 5 阶无穷小量.

【解】 利用 $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^5)$, $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$,可得

$$f(x)=x-\left[a+b+bx^2+\frac{b}{2}x^4+o(x^5)\right]\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right]$$

www.TopSage.com

$$= (1-a-b)x + \left(\frac{a+b}{6} - b\right)x^3 - \left(\frac{a+b}{120} - \frac{b}{6} + \frac{b}{2}\right)x^5 + o(x^5).$$

不难看出当 $1-a-b=0$ 与 $\frac{a+b}{6} - b = 0$ 同时成立 $f(x)$ 才能满足题设条件. 由此可解得常数 $a = \frac{5}{6}, b = \frac{1}{6}$, 并且得到 $f(x) = -\frac{23}{360}x^5 + o(x^5)$.

▶3. 由泰勒公式的系数求 $f^{(n)}(x_0)$

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 若用间接求法求得泰勒公式(5.6), 即

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + \cdots + A_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad (x \to x_0),$$

则由此可求得 $f^{(n)}(x_0) = n!A_n$.

例如, 设 $f(x) = \sqrt{1+x}\cos x$, 由【例 5.1】可求得

$$f''(0) = 2!\left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{5}{4}, \quad f'''(0) = 3!\left(\frac{-3}{16}\right) = -\frac{9}{8}.$$

设 $f(x) = e^{-x^2}$, 由【例 5.2】可求得

$$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (2n)!\frac{(-1)^n}{n!} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

【例 5.6】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n(n \geqslant 2)$ 阶可导且 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^n}} = e^4$, 求 $f(0), f'(0), \cdots, f^{(n)}(0)$.

【解】 1) 先转化已知条件. 由

$$\lim_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^n}\ln[1+f(x)]} = e^4,$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\ln[1+f(x)] = 4 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln[1+f(x)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} 0, \\ f(0) \end{cases} \quad \Rightarrow f(0) = 0.$$

再用当 $x \to 0$ 时的等价无穷小替换 $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$, 可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 4$.

2) 由极限与无穷小的关系: $x \to 0$ 时

$$\frac{f(x)}{x^n} = 4 + o(1) \quad (o(1) \text{ 为无穷小}),$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 4x^n + o(x^n) \quad (x^n o(1) = o(x^n)).$$

由泰勒公式的唯一性 $\Rightarrow$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \cdots, f^{(n-1)}(0) = 0, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 4, \text{即} \quad f^{(n)}(0) = 4n!.$$

(二) 带拉格朗日余项的泰勒公式的若干应用

▶1. 利用泰勒公式证明不等式

■ 情形 I　通过估计泰勒公式余项的大小来证明不等式

【证明思路】 设 $f(x)$ 有带拉格朗日余项的泰勒公式, 如三阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)^3,$$

其中 $\theta \in (0,1)$. 若对余项能给出估计就可得到相应的不等式.

【例 5.7】 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 证明 $\frac{x^2}{3} < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$.

www.TopSage.com

【证明】 由带拉格朗日余项的泰勒公式

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\cos(\theta x), 0 < \theta < 1,$$

则 $$1 - \cos x = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2\cos\theta x\right).$$

注意 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2\cos\theta x > \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{96} > \frac{1}{3}$,则

$$\frac{x^2}{3} < 1 - \cos x < \frac{1}{2}x^2 \quad \left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

■ 情形 Ⅱ 由函数与二阶导数估计一阶导数证明不等式

【例 5.8】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, $|f(x)| \leqslant a$, $|f''(x)| \leqslant b$, a,b 为非负数, $\forall c \in (0,1)$,求证:

$$|f'(c)| \leqslant 2a + \frac{1}{2}b .$$

【分析】 一阶导数用函数与二阶导数估计,它们之间的关系是泰勒公式.

【证明】 考察带拉格朗日余项的一阶泰勒公式: $\forall x \in [0,1]$, $\forall c \in (0,1)$,有

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''[\xi(x)](x - c)^2,\text{其中 } \xi(x) \text{ 在 } x \text{ 与 } c \text{ 之间}.$$

令 $x = 0$,得 $f(0) = f(c) + f'(c)(-c) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2$;

令 $x = 1$,得 $f(1) = f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1 - c)^2$.

两式相减得 $f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1 - c)^2 - f''(\xi_1)c^2]$,从而

$$|f'(c)| \leqslant 2a + \frac{1}{2}b[(1 - c)^2 + c^2] \leqslant 2a + \frac{1}{2}b(1 - c + c) = 2a + \frac{1}{2}b .$$

其中利用了对 $\forall c \in (0,1)$ 有 $(1 - c)^2 \leqslant 1 - c$, $c^2 \leqslant c$,于是 $(1 - c)^2 + c^2 \leqslant 1$.

▶2. 利用泰勒公式证明函数或导数存在某种特征点

当要证存在某些点使得它们的函数值或高阶导数值满足某等式(不等式)或具其他特性时,也常用到泰勒公式.所求的点常常是公式中的中间值.

【例 5.9】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 三次可微,证明: $\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a) + \frac{1}{24}(b - a)^3 f'''(\xi).$$

【分析】 从要证的结论来看,可考虑在 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ 处展开的泰勒公式.

【证明】 将 $f(x)$ 在 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ 展成二阶泰勒公式并分别令 $x = b$ 与 $x = a$ 得

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3,$$

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3,$$

其中 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$. 上面两式相减得

$$f(b) - f(a) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a) + \frac{1}{48}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)](b - a)^3.$$

注意: $\frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]$ 介于 $f'''(\xi_1)$ 与 $f'''(\xi_2)$ 之间,由导函数取中间值定理,可得 $\exists \xi \in (a,b)$,

使得 $f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}$. 因此得证.

www.TopSage.com

题型一　求泰勒公式

▶1. 求带皮亚诺余项的泰勒公式

【例 5.10】 在 $x=0$ 处展开下列函数至括号内的指定阶数：

(Ⅰ) $f(x)=\tan x$ (x^3)；　　(Ⅱ) $f(x)=\sin(\sin x)$ (x^3).

【分析】 由已知的泰勒公式，通过适当运算即可求得.

【解】 (Ⅰ) **方法 1°** $f(0)=0, f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}, f'(0)=1, f''(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$,

$$f''(0)=0, f'''(x)=\frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}+\frac{2}{\cos^2 x}, f'''(0)=2,$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+o(x^3),$$

即 $$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3).$$

方法 2° 设 $\tan x=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+o(x^3)=A_1x+A_3x^3+o(x^3)$($\tan x$ 为奇函数，$A_0=0$，$A_2=0$)，又 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}$，则

$$\left[A_1x+A_3x^3+o(x^3)\right]\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right]=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

即 $$A_1x+\left(A_3-\frac{1}{2}A_1\right)x^3+o(x^3)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

比较系数可得 $A_1=1, A_3-\dfrac{1}{2}A_1=-\dfrac{1}{6}\Rightarrow A_1=1, A_3=\dfrac{1}{3}$.

因此，$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

(Ⅱ) 已知 $\sin u=u-\dfrac{1}{3!}u^3+o(u^3)(u\to 0)$，令 $u=\sin x$ $\Rightarrow$

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x).$$

再将 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，代入得

$$\sin(\sin x)=\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3).$$

评注 在上述求解中要注意无穷小量阶的运算，如

$$\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]^3=x^3+o(x^3),\quad o(x^3)+o(x^3)=o(x^3),\text{ 等等.}$$

▶2. 求带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

【例 5.11】 求下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式：

www.TopSage.com

（Ⅰ） $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$；　　（Ⅱ） $f(x)=e^x\sin x$.

【分析】 通过求 $f(0),f'(0),\cdots,f^{(n)}(0)$ 及 $f^{(n+1)}(x)$ 而得.

【解】 （Ⅰ）$f(x)=\dfrac{-1-x+2}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$，则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

易求 $f^{(m)}(x)=2(-1)^m m!\dfrac{1}{(1+x)^{m+1}}$，则 $f^{(m)}(0)=2(-1)^m m!$. 于是

$$f(x)=1-2x+2x^2-\cdots+2(-1)^n x^n+2(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}.$$

（Ⅱ）用归纳法求解 $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$f''(x)=\sqrt{2}e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right),$$

可归纳证明 $f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right),n=1,2,\cdots,$

因此

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\sqrt{2})^k\sin\frac{k\pi}{4}}{k!}x^k+\frac{(\sqrt{2})^{n+1}e^{\theta x}\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{4}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

评注 本题也可以用含有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式的关键是求 n 阶导数的表达式，这与用第二章介绍的方法类似.

题型二　用泰勒公式求极限或确定无穷小的阶

▶1. 用泰勒公式求极限

【例 5.12】 用泰勒公式求下列极限：

（Ⅰ） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$；　　（Ⅱ） $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

【解】 （Ⅰ）用 $e^t,\ln(1+t),\cos t,\sin t$ 的泰勒公式，将分子、分母中的函数在 $x=0$ 展开. 由于

$$x\cos x=x\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]=x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

因此，

$$x\cos x-\sin x=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=-\frac{1}{3}x^3+o(x^3).$$

再求分子的泰勒公式. 由

$$x^2e^{2x}=x^2[1+(2x)+o(x)]=x^2+2x^3+o(x^3),\quad \ln(1-x^2)=-x^2+o(x^3),$$

$$\Rightarrow\quad x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)=2x^3+o(x^3).$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{2+o(1)}{-\frac{1}{3}+o(1)}=-6.$$

（Ⅱ） $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right]$

www.TopSage.com

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} + n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

大家网 TopSage.com

评注 由 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\ (x\to 0)$，令 $x = \frac{1}{n}$，即得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad (n\to\infty).$$

▶2. 用泰勒公式确定无穷小的阶

【例 5.13】 用泰勒公式确定下列无穷小量当 $x\to 0$ 时关于 x 的无穷小阶数：

(Ⅰ) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$；　　(Ⅱ) $\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt$.

【解】 (Ⅰ) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}(-2x) - \frac{1}{8}(-2x)^2\right] - \left[1 + \frac{1}{3}(-3x) - \frac{1}{9}(-3x)^2\right] + o(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

因此当 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ 是 x 的二阶无穷小量.

评注 在泰勒公式 $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2)$ 中，分别令 $\alpha = \frac{1}{2}$ 与 $\alpha = \frac{1}{3}$ 可得

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2),\quad \sqrt[3]{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2).$$

(Ⅱ) 因 $e^t - 1 - t = \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$，从而 $(e^t - 1 - t)^2 = \left[\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right]^2 = \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)$，代入得

$$\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt = \frac{1}{20}x^5 + o(x^5),$$

因此 $x\to 0$ 时 $\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt$ 是 x 的五阶无穷小量.

评注 因为 $t^2 o(t^2) = o(t^4)$，$o(t^2)\cdot o(t^2) = o(t^4)$，故

$$\left[\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right]^2 = \frac{1}{4}t^4 + t^2 o(t^2) + [o(t^2)]^2 = \frac{1}{4}t^4 + o(t^4).$$

题型三　用泰勒公式证明不等式或高阶导数存在某种特征点

【例 5.14】 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 三次可导，且当 $\forall x\in(0,+\infty)$ 时

$$|f(x)|\le M_0,\quad |f'''(x)|\le M_3,$$

其中 M_0，M_3 为非负常数，求证 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界.

【证明】 分别讨论 $x>1$ 与 $0<x\le 1$ 两种情形.

1) 当 $x>1$ 时考察二阶泰勒公式

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{3!}f'''(\xi)\quad (x<\xi<x+1),$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{3!}f'''(\eta)\quad (x-1<\eta<x),$$

两式相加并移项即得

www.TopSage.com

$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}[f'''(\eta) - f'''(\xi)],$$

则当 $x > 1$ 时有 $|f''(x)| \leqslant 4M_0 + \frac{1}{3}M_3$. 由 $f''(x)$ 的连续性即知 $f''(1)$ 也满足不等式 $|f''(1)| \leqslant 4M_0 + \frac{1}{3}M_3$.

2) 当 $0 < x \leqslant 1$ 时对 $f''(x)$ 用拉格朗日中值定理,有

$$f''(x) = f''(x) - f''(1) + f''(1) = f'''(\xi)(x-1) + f''(1) \quad (\text{其中 } \xi \in (x,1)),$$

$$\Rightarrow \quad |f''(x)| \leqslant |f'''(\xi)||x-1| + |f''(1)| \leqslant M_3 + |f''(1)| \quad (x \in (0,1]).$$

综合即知 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

【例 5.15】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导,且 $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0, f(1) = 1$. 求证:存在 $\xi \in (0,1)$,使 $|f''(\xi)| \geqslant 4$.

【证明】 把函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 与 $x = 1$ 分别展开成带拉格朗日余项的一阶泰勒公式,得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2 \quad (0 < \xi_1 < x),$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-1)^2 \quad (x < \xi_2 < 1).$$

在公式中取 $x = \frac{1}{2}$ 并利用题设可得

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}f''(\xi_1) \quad \left(0 < \xi_1 < \frac{1}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{8}f''(\xi_2) \quad \left(\frac{1}{2} < \xi_2 < 1\right).$$

两式相减消去未知的函数值 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 即得 $f''(\xi_1) - f''(\xi_2) = 8 \quad \Rightarrow \quad |f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)| \geqslant 8$.

从而在 ξ_1 与 ξ_2 中至少有一个使得在该点的二阶导数的绝对值不小于 4,把该点取为 ξ,就有 $\xi \in (0,1)$ 使 $|f''(\xi)| \geqslant 4$.

题型四　有关泰勒公式的中值 θ 的性质

【解题思路】 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有 n 阶连续导数,则对任意 $h, |h| < \delta$,有

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x_0) + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x_0 + \theta h),$$

其中 $\theta \in (0,1), m < n$. 可以对 $f^{(n)}(x_0 + \theta h)$ 在 x_0 展成适当的泰勒公式进一步讨论 θ 的性质.

【例 5.16】 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有 n 阶连续导数,且 $f^{(k)}(x_0) = 0, k = 2,3,\cdots,n-1; f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 当 $0 < |h| < \delta$ 时,$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h), (0 < \theta < 1)$. 求证:$\lim\limits_{h \to 0}\theta = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

【分析与证明】 这里 $m = 1$,求的是当 $h \to 0$ 时中值 θ 的极限. 分别将 $f'(x_0 + \theta h)$ 与 $f(x_0 + h)$ 在 $x = x_0$ 展成带皮亚诺余项的 $n-1$ 阶与 n 阶泰勒公式得

$$f'(x_0 + \theta h) = f'(x_0) + f''(x_0)\theta h + \frac{1}{2}f^{(3)}(x_0)(\theta h)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)(\theta h)^{n-1} + o(h^{n-1})$$

www.TopSage.com

$$= f'(x_0) + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)(\theta h)^{n-1} + o(h^{n-1})(h \to 0),$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + o(h^n)$$

$$= f'(x_0)h + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + o(h^n)(h \to 0),$$

将它们代入原式后两边除以 h^n 得

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{o(h^n)}{h^n} = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)\theta^{n-1} + \frac{o(h^n)}{h^n},$$

令 $h \to 0$,得 $\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\theta^{n-1} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\theta^{n-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

题型训练

1. 求带皮亚诺余项的麦克劳林公式至所指阶数:

(Ⅰ) $f(x) = e^x\cos x \quad (x^3)$; (Ⅱ) $f(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1} \quad (x^3)$;

(Ⅲ) $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$,其中 $a > 0 \quad (x^2)$.

2. 求带皮亚诺余项的麦克劳林公式:(Ⅰ) $f(x) = \sin^3 x$; (Ⅱ) $f(x) = x\ln(1 - x^2)$.

3. 当 $x \to 0$ 时,下列无穷小是 x 的几阶无穷小?

(Ⅰ) $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x\sin x$; (Ⅱ) $\cos x + \frac{x^2}{2}\cos x - 1$.

4. 求下列极限:(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$; (Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$.

5. 设 $f(x) = x^2\sin x$,求 $f^{(n)}(0)$.

6. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导,又 $I = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{e^{f(x)} - 1} = 1$,求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处 n 阶可导,$n \geqslant 2$,$x \to a$ 时 $f(x)$ 是 $x - a$ 的 n 阶无穷小,求证:$f'(x)$ 是 $x - a$ 的 $n - 1$ 阶无穷小.

8. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处 4 阶可导,又 $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$,$f^{(4)}(a) \neq 0$,求证:当 $f^{(4)}(a) > 0$(< 0) 时 $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小(大)值点.

9. 设 $f(x), g(x)$ 在 $x = x_0$ 某邻域有二阶连续导数,曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有相同的凹凸性.求证:曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处相交、相切且有相同曲率的充要条件是:$f(x) - g(x) = o((x - x_0)^2)(x \to x_0)$.

10. 求 $f(x) = 3^x$ 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,证明:$\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

12. 设 $f(x)$ 为 $n + 1$ 阶可导函数,求证:$f(x)$ 为 n 次多项式的充要条件是 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$,$f^{(n)}(x) \neq 0$.

13. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 二阶可导且 $f(x), f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界,求证:$f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f(x) > 0$,$f''(x) < 0((x \in (a,b)))$,求证:$\max\limits_{[a,b]} f(x) < \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

www.TopSage.com

第六章　微分方程

内容概要与重难点提示

常微分方程的研究对象就是常微分方程解的性质与求法．本章主要有两个问题：一是求解方程，包括方程的通解和满足初始条件的特解；二是根据实际问题和所给条件建立含有自变量、未知函数及未知函数的导数的方程及相应的初始条件．

1. 关于解方程，线性方程解的性质与结构

首先，应掌握方程类型的判别，因为不同类型的方程有不同的解法，同一个方程，可能属于多种不同的类型，则应选择较易求解的方法．对于一阶方程，通常可按可分离变量的方程、齐次方程、一阶线性方程、伯努利方程、全微分方程的顺序进行，特别是一阶线性方程和伯努利方程还应注意到有时可以以 x 为因变量，y 为自变量得到．对于高阶方程，一般可按线性方程、欧拉方程、高阶可降阶的方程进行．

第二，是求解方程，不同类型的方程有不同的求解方法，应该熟练掌握，典型方程可用固定的变量代换化简并求解（如齐次方程、线性方程、伯努利方程、高阶可降阶方程、欧拉方程等），如用公式求解一阶线性方程，则应注意公式应用的条件 —— 方程应化成标准形式．对于线性方程，应搞清解的结构理论，解的性质及齐次线性常系数方程的特征方程及非齐次方程的特解的设定，这对于求解线性方程是重要的．

第三，对于不属于典型方程的方程，作变量代换是一个有效途径，作什么样的变量代换要结合具体方程的特点来考虑，一般以克服求解方程的困难为目标，选择变量代换可采用试探方式，合适的、使方程得到化简并顺利求解的则采用，否则应重新选择，平时应多练习，这样可以帮助你选择合适的变量代换．

2. 关于列方程

有关微分方程的应用题，首先是建立方程．这要根据题意，分析条件，搞清问题所涉及到的基本物理或几何量的意义，并结合其他相关知识，通过逻辑推理等综合手段，使问题得到解决．

列方程，建立数学模型，是考查考生综合应用能力的重要方面，是考试的重点内容之一，同时也是考生的难点，考生要通过练习，结合自己的实际，总结建立微分方程的步骤及注意事项（例如正负号的处理）．

有些微分方程可能是数学问题中提供的，例如有的微分方程是由积分方程提出的，有的来自线积分与路径无关的充要条件，或微分式子是某个原函数的全微分．此时应转化成微分方程来求解，同时还应注意到所给条件中可能还提供了函数的某个函数值、导数值（即初始条件）等信息．

考核知识要点讲解

一、基本概念

▶1. **常微分方程**　含有自变量、未知函数以及未知函数的某些导数的方程式称为微分方程，而当未知函数是一元函数时就称为常微分方程．

▶2. **线性微分方程与非线性微分方程**　以未知函数和它的各阶导数作为总体是一次的就称为线性微分方程，否则就称为非线性微分方程．

▶3. **微分方程的阶**　微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数．

▶4. **微分方程的解**　代入微分方程使之成为恒等式的函数（通常还要求解具有和阶数一样的连续导数，如二阶方程的解应具有连续的二阶导数）．

www.TopSage.com

►5. **微分方程的通解和特解**　通解含有数目与微分方程的阶数相同的独立常数，通解也可以称为一般解；不含任意常数或任意常数确定后的解称为特解.

►6. **微分方程的初始条件**　能确定通解中的任意常数的条件称为定解条件，初始条件是定解条件中最常见的类型. 初始条件的形式与方程的阶数有关，一般说，以 x 为自变量，以 $y(x)$ 为未知函数的 n 阶微分方程的初始条件为：

$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_{n-1}$，　其中 $y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$ 是任意给定的常数.

二、一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为　$F(x,y,y')=0$　或　$y'=f(x,y)$，

其中最基本的类型是**变量可分离的方程**、**一阶线性方程**和**全微分方程**. **齐次方程**通过变量代换可化为变量可分离的方程，**伯努利方程**通过变量代换可化为一阶线性方程. 除了齐次方程与伯努利方程之外，还有一些一阶方程能够通过简单的变量代换化为上述基本类型. 现将几种基本类型的解法列表如下：

类　　型	通　解　的　求　法
(1) 变量可分离的方程 $y'=f(x)g(y)$	**分离变量法** 两边同除 $g(y)(\neq 0)$，把变量分离，并求积分 $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$
(2) 一阶线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 相应的齐次方程 $y'+p(x)y=0$	1° **积分因子法** 方程两边同乘积分因子 $\mu=e^{\int p(x)dx}$ 改写成　$\left[e^{\int p(x)dx}y\right]'=q(x)e^{\int p(x)dx}$ 积分得　$ye^{\int p(x)dx}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$
	2° **公式法** 非齐次方程的通解为 $y=e^{-\int p(x)dx}\left[C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$ 相应的齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$
	3° **常数变易法** 先用分离变量法求相应的齐次方程的通解 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$ 将 C 改为 $C(x)$，然后令 $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$，代入原非齐次方程得 $C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$，积分求出 $C(x)$
(3) 全微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (存在 $u(x,y)$ 使得 $du=Pdx+Qdy$) 若在考虑的单连通区域上满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 则此方程为全微分方程.	**求原函数法** 若求得 $u(x,y)$ 使得 $du=Pdx+Qdy$(称 $u(x,y)$ 为 $Pdx+Qdy$ 的原函数)，则通解为 $u(x,y)=C$. 求原函数的方法有以下三种： 1° **特殊路径积分法**：$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$ 2° **不定积分法**： 由 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$ 对 x 积分得 $u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)$ 对 y 求导得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right]+C'(y)$， 它应等于 $Q(x,y)$，由此求出 $C'(y)$ 再积分求出 $C(y)$ 3° **凑微分法**：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\cdots=du$

www.TopSage.com

另外，通过简单变量代换化为三种基本类型的方程主要有（列表如下）：

方程类型	通解的求法	变量代换	可化为的基本方程
(1) 齐次方程 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y' = u + xu'$ 于是原方程可化为 $xu' = f(u) - u$ 其通解为 $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C = \ln\lvert x\rvert + C$	$u = \frac{y}{x}$	变量可分离的方程
(2) $y' = f(ax + by + c)$ $(a \cdot b \neq 0)$	令 $u = ax + by + c$，则原方程可化为 $u' = a + bf(u)$　即为变量可分离的方程	$u = ax + by + c$	
(3) $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$	■ 情形 Ⅰ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 解线性方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$ 设其解为 (α, β)， 令 $u = x - \alpha, v = y - \beta$， 则原方程可化为 $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$ 属于齐次方程．	($\Delta \neq 0$ 时) $u = x - \alpha$ $v = y - \beta$	
	■ 情形 Ⅱ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ 即 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$， 则 $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$ 令 $z = a_1x + b_1y$，则原方程化为 $z' = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}\right)$ 属于变量可分离的方程．	($\Delta = 0$ 时) $z = a_1x + b_1y$	
(4) 伯努利方程 $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0, 1)$	令 $z = y^{1-\alpha}$，则原方程可化为 $\frac{dz}{dx} + (1 - \alpha)p(x)z = (1 - \alpha)q(x)$ 属于一阶线性方程．	$z = y^{1-\alpha}$	一阶线性方程
(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{h(y)}{p(y)x + q(y)}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{h(y)}{p(y)x + q(y)x^{\alpha}}$ $(\alpha \neq 0, 1)$	$\frac{dx}{dy} = \frac{p(y)}{h(y)}x + \frac{q(y)}{h(y)}$（以 y 为自变量，x 为因变量的一阶线性方程） $\frac{dx}{dy} = \frac{p(y)}{h(y)}x + \frac{q(y)}{h(y)}x^{\alpha}$（以 y 为自变量，x 为因变量的伯努利方程）	自变量与因变量互换	一阶线性方程 伯努利方程（再作变量代换化为一阶线性方程）

【注】 ① 在微分方程中不定积分 $\int f(x)dx$，$\int \frac{du}{f(u) - u}$，$\int p(x)dx$ 等只表示一个固定的原函数，积分常数总是另外标出．这是与不定积分不同的习惯，即：在解微分方程时，套上积分号后立即将任意常数 C 加上，而解不定积分时总是要到积分做完后才添上常数 C．

www.TopSage.com

② 在变量可分离的方程与齐次方程(注意它与线性齐次方程是不同的)中,使 $g(y)=0$ 与 $f(u)-u=0$ 的点为原方程的特解,在求全体解过程中不可丢掉.

③ 一阶线性齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的通解可通过分离变量的方法得到,而非齐次方程的通解则可通过积分因子法或常数变易法得到.

【例 6.1】 求微分方程 $x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

【解法一】 这是一个变量可分离的方程,分离变量后原方程化为

$$\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=-\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}.$$

两边同时积分,可求得其通解为 $\ln|y^2-1|=-\ln|x^2-1|+C'$,即

$$(x^2-1)(y^2-1)=C,\text{其中 } C \text{ 为任意常数}.$$

评注 一般来说,当 $y=\pm1$ 时,不能用 y^2-1 来除,当 $x=\pm1$ 时也不能用 x^2-1 来除,其实 $y=\pm1$(x 为自变量时),$x=\pm1$(以 y 为自变量时)对是方程的特解,这是在求解中应当注意的.不过在通解公式中若允许常数 $C=0$,这些特解就已经包含在通解之中.

【解法二】 如果将此方程看成 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的形式,由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以也可以把它看成全微分方程.以(0,0)为起点,(x,y) 为终点,计算该曲线积分,则

$$u(x,y)=-\int_0^x x\mathrm{d}x+\int_0^y y(x^2-1)\mathrm{d}y=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(x^2-1)y^2.$$

通解为 $-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(x^2-1)y^2=C$,其中 C 为任意常数.

这个通解与【解法一】所得到的结果实际上是一样的.

评注 求解全微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$,归结为求 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数,求原函数除了使用曲线积分法(特殊路径积分法)之外,还可以使用不定积分法和变积分法.求原函数的方法详见第十章之四(二)有关内容.

三、可降阶的高阶方程

类　　型	通　解　的　求　法
$y^{(n)}=f(x)$	经 n 次积分,得: $y=\int\cdots\int f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x\cdots\mathrm{d}x+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_n$
不显含 y 的二阶方程 $y''=f(x,y')$	令 $p=y'$,原方程化为 p 的一阶方程: $p'=f(x,p)$
不显含 x 的二阶方程 $y''=f(y,y')$	令 $p=y'$,原方程可化为以 p 为未知函数,y 为自变量的一阶方程: $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)\quad\left(y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)$

【例 6.2】 求解下列方程:

(Ⅰ)求方程 $xy''=y'\ln y'$ 的通解;

(Ⅱ)求 $yy''=2(y'^2-y')$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=2$ 的特解.

www.TopSage.com

【解】 (Ⅰ)此方程不显含 y. 令 $p = y'$,则原方程化为 $xp' = p\ln p$.

当 $p \neq 1$ 时,可改写为 $\frac{dp}{p\ln p} = \frac{dx}{x}$,其通解为

$$\ln|\ln p| = \ln|x| + C', \text{即 } \ln p = C_1 x, \text{即 } y' = e^{C_1 x}.$$

这样,原方程的通解即为 $y = \frac{1}{C_1}e^{C_1 x} + C_2$,其中 $C_1 \neq 0$,C_2 为任意常数.

当 $p = 1$ 时,也可以得到一族解 $y = x + C_3$.

(Ⅱ)此方程不显含 x. 令 $p = y'$,且以 y 为自变量,$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}p$,原方程可化为 $yp\frac{dp}{dy} = 2(p^2 - p)$.

当 $p \neq 0$ 时,可改写为 $y\frac{dp}{dy} = 2(p-1)$ 或 $\frac{dp}{p-1} = \frac{2dy}{y}$,解为 $p - 1 = C_1 y^2$.

再利用 $p = y'$,以及初始条件,可推出常数 $C_1 = 1$. 从而上述方程为变量可分离的方程

$$y' = 1 + y^2 \Rightarrow \text{ 其通解为 } y = \tan(x + C_2).$$

再一次利用初始条件 $y(0) = 1$,即得 $C_2 = \frac{\pi}{4}$. 所以满足初始条件的特解为 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

注 就原方程而言,(Ⅱ)中的 $yp\frac{dp}{dy} = 2(p^2 - p)$ 还有两个特解,即 $p = 0$ 与 $p = 1$,然而它们都不满足初始条件 $y'(0) = p(0) = 2$. 这一点考生应引起注意.

四、含变限积分的方程

对某些含变限积分的方程,可通过对方程求导的方法,转化为求解相应的微分方程的通解或微分方程初值问题的特解.

【例 6.3】 设 $f(t)$ 连续并满足

$$f(t) = \cos 2t + \int_0^t f(s)\sin s\,ds, \tag{*}$$

求 $f(t)$.

【解】 因 $f(t)$ 连续 $\Rightarrow \int_0^t f(s)\sin s\,ds$ 可导 $\Rightarrow f(t)$ 可导. 于是

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(t) = -2\sin 2t + f(t)\sin t, & \text{(将(*)两边求导)} \\ f(0) = 1, & \text{(在(*)中令 } t = 0) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f'(t) - f(t)\sin t = -2\sin 2t, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

这是一阶线性微分方程的初值问题. 方程两边乘 $\mu = e^{-\int \sin t dt} = e^{\cos t}$,得

$$[e^{\cos t} f(t)]' = -4\sin t\cos t e^{\cos t}.$$

积分得 $$e^{\cos t} f(t) = 4\int \cos t\, d(e^{\cos t}) = 4(\cos t - 1)e^{\cos t} + C.$$

由 $f(0) = 1$ 得 $C = e$. 因此,$f(t) = e^{1-\cos t} + 4(\cos t - 1)$.

【例 6.4】 设 $f(x)$ 连续,且满足

$$\int_0^1 f(tx)\,dt = f(x) + x\sin x,$$

求 $f(x)$.

【分析与求解】 令 $tx = s$,原方程改写成

www.TopSage.com

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = f(x) + x\sin x\ (x \neq 0),$$

即
$$\int_0^x f(s)\,ds = xf(x) + x^2\sin x.\ (\forall x) \qquad ①$$

含变限积分方程 ①

将 ① 对 x 求导 ⇓　　⇑ 将 ② 两边对 x 从 0 到 x 积分

$$f(x) = xf'(x) + f(x) + (x^2\sin x)', \quad \text{即} \quad f'(x) = -\frac{(x^2\sin x)'}{x}. \qquad ②$$

($x = 0$ 时两端自然成立,不必另加条件.)

将 ② 直接积分得

$$f(x) = -\int \frac{d(x^2\sin x)}{x} = -x\sin x + \cos x + C.$$

评注 1° 求解含变限积分的方程的基本方法是:将方程两边求导,转化为求解常微分方程,并把变限的积分上限(或下限)的 x 取值为下限(或上限),或得到未知函数满足的附加条件即初始条件(如【例 6.3】)或等式自然成立,不必附加条件(如【例 6.4】). 在求解过程中,要注意变形过程的同解性.

2°【例 6.4】是一个积分方程,原方程中不含变限积分,而是积分的被积函数中含有参变量 x,通过变量替换转化为含变限积分的方程,然后求解.

五、线性微分方程解的性质与结构

这里只限于讨论一阶线性方程与二阶线性方程,其结论可推广到更高阶的线性方程. 一阶线性方程的一般形式为

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad (6.1)$$

二阶线性方程的一般形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (6.2)$$

其中 $p(x)$,$q(x)$,$f(x)$ 均为连续函数. 当右端项 $f(x) \equiv 0$ 时,分别称为**一阶线性齐次方程**与**二阶线性齐次方程**,否则称为**非齐次方程**.

▶1. 解的性质(叠加原理) 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是方程

$$y' + p(x)y = f_1(x) \quad \text{与} \quad y' + p(x)y = f_2(x),$$

或
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \quad \text{与} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的两个特解,则 $y_1(x) + y_2(x)$ 也是方程 $y' + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 或 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解.

(1) 若 $y_1(x)$,$y_2(x)$ 为齐次方程

$$y' + p(x)y = 0, \qquad (6.3)$$

或
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (6.4)$$

的两个特解,则其线性组合 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 仍为(6.3)或(6.4)的解.

(2) 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为非齐次方程(6.2)(或(6.1))的两个特解,则其差 $y_1(x) - y_2(x)$ 为相应齐次方程(6.4)(或(6.3))的特解.

www.TopSage.com

(3) 设 $y^*(x)$ 为非齐次方程(6.2)(或(6.1))的一个特解,$y(x)$ 为齐次方程(6.4)(或(6.3))的任意特解,则其和 $y^*(x)+y(x)$ 为(6.2)(或(6.1))的解.

►2. 通解的结构

(1) 设 $y_0(x)$ 是(6.3)的非零特解,则(6.3)的通解是 $y=Cy_0(x)$,又 $y^*(x)$ 是(6.1)的一个特解,则 $y=Cy_0(x)+y^*(x)$ 是(6.1)的通解,其中 C 为任意常数.

(2) 若 $y_1(x),y_2(x)$ 为(6.4)的两个线性无关的特解,则(6.4)的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

又 $y^*(x)$ 是(6.2)的一个特解,则(6.2)的通解为

$$y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

(3) 线性方程(6.1)或(6.2)的通解即所有解.

容易看出:这几个性质与代数中线性方程组解的性质非常相似.

【注】 若在 I 上 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 成比例,即 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 或 $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ 为常数,则称函数 $y_1(x),y_2(x)$ 在区间 I 上线性相关.等价于 $\exists$ 不全为零的常数 α_1 与 α_2,使得 $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)=0(\forall x\in I)$.

更一般地,若 $\exists$ 不全为零的常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,使 $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+\cdots+\alpha_my_m(x)=0\ (\forall x\in I)$,则称函数组 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 在区间 I 上线性相关,否则称该函数组线性无关.

【例 6.5】 设函数 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 线性无关,而且都是非齐次线性方程(6.2)的解,C_1,C_2 为任意常数,则该非齐次方程的通解是

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$.　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

【分析】 对于选项(D)来说,其表达式可改写为

$$y_3+C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3),$$

而且 y_3 是非齐次方程(6.2)的一个特解,y_1-y_3 与 y_2-y_3 是(6.4)的两个线性无关的解,由通解的结构可知它就是(6.2)的通解.故应选(D).

评注 若 $\alpha(y_1-y_3)+\beta(y_2-y_3)=0\Rightarrow\alpha y_1+\beta y_2-(\alpha+\beta)y_3=0$,由 y_1,y_2,y_3 线性无关 $\Rightarrow\alpha=0,\beta=0\Rightarrow y_1-y_3$ 与 y_2-y_3 线性无关.

【例 6.6】 设 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 为二阶变系数齐次线性方程(6.4)的两个特解,则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$(C_1,C_2 为任意常数)是该方程通解的充分条件为

(A) $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0$.　　(B) $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\neq0$.

(C) $y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)=0$.　　(D) $y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)\neq0$.

【分析】 根据题目的要求,$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 应该线性无关,也就是说 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq\lambda$(常数).反之,若这个比值为常数,即 $y_1(x)=\lambda y_2(x)$,那么 $y_1'(x)=\lambda y_2'(x)$,利用线性代数的知识,就有 $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0$.所以,(B)成立时,$y_1(x),y_2(x)$ 一定线性无关,应选(B).

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

六、二阶和某些高阶常系数齐次线性方程

(一) 二阶常系数齐次线性方程

二阶常系数齐次线性方程的形式为

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{6.5}$$

其中 p,q 为常数,其特征方程为 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

依据判别式的符号,其通解有三种形式:

(1) $\Delta = p^2 - 4q > 0$,特征方程有两个相异实根 λ_1,λ_2,通解的形式为

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

(2) $\Delta = p^2 - 4q = 0$,特征方程有重根,即 $\lambda_1 = \lambda_2$,通解为

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x};$$

(3) $\Delta = p^2 - 4q < 0$,特征方程具有共轭复根 $\alpha \pm i\beta$,通解为

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

(二) n 阶常系数齐次线性方程

此种方程的一般形式为 $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$, (*)

其中 $p_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 为常数,相应的特征方程为

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \cdots + p_n = 0.$$

特征根与通解的关系同二阶方程的情形相类似. 具体结论是:

(1) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个相异实根,则方程(*)的通解为

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

(2) 若 $\lambda = \lambda_0$ 为特征方程的 $k(k \leqslant n)$ 重实根,则(*)的通解中含有:

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda_0 x};$$

(3) 若 $\alpha \pm i\beta$ 为特征方程的 $k(2k \leqslant n)$ 重共轭复根,则(*)的通解中含有:

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x].$$

由于我们不能求出一般的三次以上代数方程的根,也就是说对于三次以上的特征方程一般不能得到其特征根,自然也就不能求出三阶以上常系数齐次线性微分方程的通解,能够求出的只是某些特殊情形.

七、二阶常系数非齐次线性方程与欧拉方程

(一) 二阶常系数非齐次线性方程

二阶常系数非齐次线性方程的一般形式为: $y'' + py' + qy = f(x)$, (6.6)

其中 p,q 为常数. 根据前面提到的结论,它的通解应该是非齐次方程(6.6)的一个特解与相应的齐次方程(6.5)的通解之和. 关于齐次方程通解的求法前面已经介绍,至于非齐次方程的特解,大纲只要求会求自由项 $f(x)$ 为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数,以及它们的和与积. 对于"和"所使用的就是"叠加原理",其他情况通常使用待定系数法. 具体做法列表如下:

www.TopSage.com

$f(x)$ 的形式	特解 $y^*(x)$ 的形式
$f(x)=P_n(x)$， $P_n(x)$ 为 n 次多项式	0 不是特征根：$y^*(x)=H_n(x)$， 0 是特征方程的单根：$y^*(x)=xH_n(x)$， 0 是特征方程的重根：$y^*(x)=x^2H_n(x)$.
$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$	α 不是特征根：$y^*(x)=H_n(x)e^{\alpha x}$， α 是特征方程的单根：$y^*(x)=xH_n(x)e^{\alpha x}$， α 是特征方程的重根：$y^*(x)=x^2H_n(x)e^{\alpha x}$.
$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x]$，其中 $P_n(x)$，$Q_m(x)$ 分别为 n 次，m 次多项式	$\alpha\pm i\beta$ 不是特征根：$y^*(x)=e^{\alpha x}[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]$， $\alpha\pm i\beta$ 是特征根：$y^*(x)=xe^{\alpha x}[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]$.
【注】 表中的 $H_n(x)$，$R_l(x)$ 与 $S_l(x)$ 分别为为待定的 n 次与 l 次多项式，其中 $l=\max\{n,m\}$.	

【例 6.7】 求下列方程的通解：

（Ⅰ） $y''-3y'=2-6x$；　　（Ⅱ） $y''+y=\cos x\cos 2x$.

【解】 （Ⅰ）先求相应齐次方程的通解，由于其特征方程为 $\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)=0$，所以通解为

$$\overline{y}(x)=C_1+C_2e^{3x}.$$

再求非齐次方程的特解，由于其自由项为一次多项式，而且 0 是特征方程的单根，所以特解应具形式 $y^*(x)=x(Ax+B)$，代入原方程，得

$$[y^*(x)]''-3[y^*(x)]'=2A-3(2Ax+B)=-6Ax+2A-3B=2-6x.$$

比较方程两端的系数，得$\begin{cases}2A-3B=2,\\6A=6,\end{cases}$解得 $A=1,B=0$，即特解为 $y^*(x)=x^2$. 从而，原方程的通解为

$$y(x)=x^2+C_1+C_2e^{3x},\text{其中 } C_1,C_2 \text{ 为任意常数}.$$

（Ⅱ）由于 $\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)$，根据线性微分方程的叠加原理，可以分别求出 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$ 与 $y''+y=\frac{1}{2}\cos 3x$ 的特解 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$，相加就是原方程的特解.

由于相应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\pm i$，所以其通解应为 $C_1\cos x+C_2\sin x$；同时 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$ 的特解应具形式：$y_1^*(x)=Ax\cos x+Bx\sin x$，代入原方程，可求得 $A=0,B=\frac{1}{4}$. 即 $y_1^*(x)=\frac{x}{4}\sin x$.

另外，由于 $3i$ 不是特征根，所以另一方程的特解应具形式 $y_2^*(x)=C\cos 3x+D\sin 3x$，代入原方程，可得 $C=-\frac{1}{16},D=0$. 这样，即得所解方程的通解为

$$y(x)=\frac{x}{4}\sin x-\frac{1}{16}\cos 3x+C_1\cos x+C_2\sin x,\text{其中 } C_1,C_2 \text{ 为任意常数}.$$

www.TopSage.com

（二）欧拉方程

形如 $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$，

的方程称为**欧拉**(Euler)**方程**. 令 $x = e^t$，即将自变量由 x 换成 t，则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \cdots$$

将这些关系代回，则原方程就化成了 n 阶常系数线性方程.

特别是，令 $x = \pm e^t$，则 $t = \ln|x|$，于是二阶欧拉方程

$$x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$$

化成二阶线性常系数方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\dfrac{dy}{dt} + qy = f(\pm e^t)$.

八、微分方程的简单应用

把实际问题化成微分方程问题，大体可按以下步骤进行：

第一步，根据实际要求确定要研究的量（物理量或几何量等）；

第二步，找出这些量所满足的规律（物理的或几何的等）；

第三步，运用这些规律列出方程. 有的物理规律本身直接由微分方程的形式来表达（如牛顿第二定律），这时可直接列出微分方程，有的还需用微元分析法列出微分方程；

第四步，给出初始条件.

列出微分方程常用以下方法：

▶1. 利用定积分的几何意义列方程

利用定积分的几何意义如面积、弧长、体积等或利用定积分的物理意义如平面图形的形心等列方程时，常常得到含变限积分的积分方程或积分微分方程，因此要先转化为微分方程然后再求解.

【例 6.8】 设曲线 L 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形的面积值等于 L 上 M_0，M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

【解】 曲边扇形的面积公式为 $S = \dfrac{1}{2}\int_0^\theta r^2(\theta)\,d\theta$，又弧微分 $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta$，于是由题设有

$$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2(\rho)\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^\theta \sqrt{r^2(\rho) + r'^2(\rho)}\,d\rho. \qquad (*)$$

两边对 θ 求导，即得 $r^2(\theta) = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}$，所以 r 所满足的微分方程为

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm\sqrt{r^4 - r^2} = \pm r\sqrt{r^2 - 1}, \text{即} \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = \pm d\theta.$$

（它与原方程等价，在（*）式中令 $\theta = 0$ 等式自然成立，不必另加条件.）

注意到 $\int \dfrac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = \int \dfrac{dr}{r^2\sqrt{1 - \dfrac{1}{r^2}}} = -\arcsin\dfrac{1}{r}$，$-\arcsin\dfrac{1}{r} = \pm\theta + C$ 为方程的通解，再由条件 $r(0) = 2$，可知 $C = -\pi/6$，所以曲线 L 的方程为 $r\sin\left(\dfrac{\pi}{6} \pm \theta\right) = 1$.

www.TopSage.com

▶2. 利用导数的几何意义列方程

导数的几何意义是曲线的切线的斜率. 曲线 $y = y(x)$ 在任意点 $(x, y(x))$ 处的切线方程是 $Y = y(x) + y'(x)(X - x)$, 其中 (X, Y) 为切线上点的坐标, 分别令 $Y = 0, X = 0$ 得切线在 x 轴与 y 轴上的截距 $X = x - \frac{y}{y'}, Y = y - xy'$. 若切线的截距满足一定的关系, 就得到相应的微分方程. 关于曲线的法线也有类似的问题.

【例 6.9】 设曲线 L 位于 Oxy 平面的第一象限内, 过 L 上任意一点 M 处的切线与 y 轴总相交, 把交点记作 A, 则总有长度 $|\overline{AM}| = |\overline{OA}|$, 若 L 过点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 求 L 的方程.

【解】 设 L 的方程为 $y = y(x)$, 过点 $M(x, y(x))$ 的切线与 y 轴的交点为 $A(0, y(x) - xy'(x))$, 又

$$|\overline{MA}|^2 = x^2 + [y(x) - (y(x) - xy'(x))]^2 = x^2 + x^2y'^2,$$

$$|\overline{OA}|^2 = (y - xy')^2,$$

按题意得 $x^2 + x^2y'^2 = (y - xy')^2$, 即 $2xyy' - y^2 = -x^2$.

又初始条件 $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

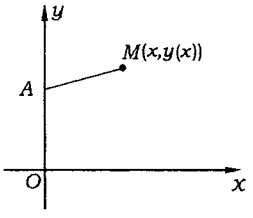


图 6.1

这是伯努利方程 $2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -x$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2) - \frac{1}{x}y^2 = -x$.

对 $z = y^2$ 而言这是一阶线性方程, 两边乘积分因子 $\mu = \mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} = \frac{1}{x}$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}y^2\right) = -1 \xrightarrow{\text{积分}} \frac{1}{x}y^2 = -x + C, \quad y^2 = -x^2 + Cx.$$

由初始条件 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + C\left(\frac{3}{2}\right)$, 得 $C = 3$. 因此 L 的方程为 $y^2 + x^2 = 3x$.

二阶导数的几何意义体现在曲率上, 利用曲率列方程可参见下例.

【例 6.10】 在上半平面求一条凹曲线(图 6.2), 使其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行.

【解】 若将此曲线记为 $y = f(x)$, 则依曲率计算公式, 并注意曲线凹凸性的假设, 即要求 $y'' \geqslant 0$, 故曲率 $K = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$.

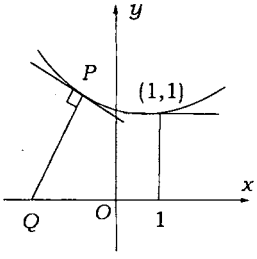


图 6.2

再由于过 $(x, f(x))$ 点的法线方程为 $X - x + f'(x)[Y - f(x)] = 0$. 它与 x 轴交点 Q 的横坐标 $X_0 = x + f'(x)f(x)$, 所以, 线段 $\overline{PQ}$ 的长度

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(X_0 - x)^2 + [f(x)]^2} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

这样, 由题设该曲线所满足的微分方程及初始条件即为

$$\frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} = \frac{1}{f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}},$$

$$y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

解二阶方程的初值问题 $\begin{cases} yy'' = 1 + (y')^2, \\ y(1) = 1, y'(1) = 0, \end{cases}$ 得(参见【例 6.18】)

$$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x-1} + \mathrm{e}^{1-x}).$$

▶3. 利用变化率满足的条件列方程

导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是 y 对 x 的变化率, 若已知变化率满足一定的规律, 则可得 $y = y(x)$ 满足的一阶方程.

www.TopSage.com

【例 6.11】 设热水瓶内热水温度为 T，室内温度为 T_0，t 为时间（以小时为单位）. 根据牛顿冷却定律知：热水温度下降的速率与 $T-T_0$ 成正比. 又设 $T_0=20℃$，当 $t=0$ 时，$T=100℃$，并知 24 小时后水瓶内温度为 50℃，问几小时后瓶内温度为 95℃？

【解】 温度变化的速率即 $\frac{dT}{dt}$，牛顿冷却定律给出了这个变化率满足的条件，写出来它就是温度 T 所满足的微分方程：$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0)$. 其中 k 为比例常数，且 $k>0$. 其通解为 $T=T_0+Ce^{-kt}$. 再由题设：$T_0=20, T(0)=100, T(24)=50$，所以 $\begin{cases}100=20+C,\\50=20+Ce^{-24k}\end{cases}\Rightarrow C=80, k=\frac{1}{24}(\ln 8-\ln 3)$.

这样，温度 $T=20+80e^{-\frac{1}{24}(\ln 8-\ln 3)t}$. 若 $T=95$，则 $t=\frac{24(\ln 16-\ln 15)}{\ln 8-\ln 3}\doteq 1.58$，即在 1.58 小时后热水的温度降为 95℃.

▶4. 利用牛顿第二定律列方程

设质点作直线运动，建立坐标系，t 时刻质点的坐标为 $y=y(t)$. 若质点的质量为 m，受力为 $f(t,y(t),y'(t))$，则由牛顿第二定律得 $m\frac{d^2y}{dt^2}=f(t,y(t),y'(t))$.

有两种特殊情形属于可降阶的情形：

1° 外力 f 只依赖于时间 t 与速度 $v=\frac{dy}{dt}$，方程变成

$$m\frac{dv}{dt}=f(t,v).$$

2° 外力 f 只与位移 y 及速度 $v=\frac{dy}{dt}$ 有关. 由于 $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$，方程可写成

$$mv\frac{dv}{dy}=f(y,v).$$

对于这类问题，关键是写出力的表达式，质点的受力情况清楚了，微分方程也就列出来了.

【例 6.12】 从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还要受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 V，海水的比重为 ρ，仪器所受阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系 $y=y(v)$.

【分析与求解】 取沉放点为坐标原点 O，Oy 轴的正向铅直向下，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-\rho V-kv.$$

由于 $v=\frac{dy}{dt}$，所以，此方程是一个既不显含自变量 t，又不显含未知函数 y 的二阶方程，按照常规的办法，可以令 v 为未知函数，得到 v 所满足的一阶线性方程，这样所求得的是 v 与时间 t 的关系. 然而题目所要求的是 y 与 v 的关系，注意 $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}v$，所以应将方程改写为

$$mv\frac{dv}{dy}=mg-\rho V-kv,\text{即}\quad\frac{dy}{dv}=\frac{mv}{H-kv},\text{其中 } H\xlongequal{\text{记}}mg-\rho V.$$

直接求积分，则有 $y=-\frac{m}{k}v-\frac{mH}{k^2}\ln(H-kv)+C$.

再由题设，其初始条件应为 $v\big|_{y=0}=0$，由此可定出 $C=-\frac{mH}{k^2}\ln H$，故所求的关系

$$y=-\frac{m}{k}v+\frac{mH}{k^2}\ln\frac{H-kv}{H}.$$

www.TopSage.com

考研网 TopSage.com

用微元法导出 $y = y(x)$ 所满足的微分方程就是考察变量 x 的微元区间 $[x, x + \Delta x]$ 上相应的函数改变量 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$，关键是写出它的一个等量关系，略去高阶无穷小量后得

$$\Delta y \approx F(x, y, \Delta x)\Delta x,$$

令 $\Delta x \to 0$ 就得到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} F(x, y, \Delta x) = f(x, y)$.

【例 6.13】 要设计一形状为旋转体水泥桥墩，桥墩高为 h，上底面直径为 $2a$，要求桥墩在任意水平截面上所受上部桥墩的平均压强为常数 p. 设水泥的比重为 ρ，试求桥墩的形状.

【分析与求解一】 首先建立坐标系，如图 6.3 所示，x 轴为桥墩中心轴，y 轴为水平轴. 设桥墩侧面的曲线方程为 $y = y(x)$.

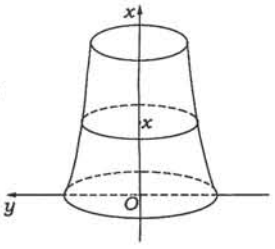


图 6.3

其次列出 $y(x)$ 满足的方程. 由于顶面的压强也为 p，则顶面承受的压力为 $F = p\pi a^2$.

考察中心轴上点 x 处的水平截面上所受总压力，它应等于压强 × 截面积 $= p\pi y^2(x)$，另一方面又等于

$$\text{顶面的压力} + \text{该截面上方桥墩的重量} = p\pi a^2 + \int_x^h \rho\pi y^2(s)\,ds.$$

于是得

$$p\pi y^2(x) = p\pi a^2 + \rho\pi\int_x^h y^2(s)\,ds. \qquad (*)$$

再将积分方程转化为微分方程的初值问题. 将上述方程两边对 x 求导得

$$2p\pi yy' = -\rho\pi y^2.$$

又在 $(*)$ 式中令 $x = h$ 得 $y(h) = a$，于是得到 $\begin{cases} y' = -\dfrac{\rho}{2p}y, \\ y(h) = a. \end{cases}$

最后求解初值问题. 这是一阶线性齐次方程的初值问题，易求得 $y = ae^{-\frac{\rho}{2p}(x-h)}$.

【分析与求解二】 建立坐标系如图 6.3. 分别过 x 轴上点 x 及 $x + \Delta x$ 作桥墩的水平截面，则

两个截面上的压力差 = 两个截面之间柱体的重量.

于是

$$p\pi y^2(x) - p\pi y^2(x + \Delta x) \approx \rho\pi y^2(x),$$

即

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}[y(x + \Delta x) + y(x)] \approx -\frac{\rho}{p}y^2(x).$$

当 $\Delta x \to 0$，得 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\rho}{2p}y$.

同样有初始条件 $y(h) = a$. 解此一阶线性齐次方程的初值问题，同样得 $y = ae^{-\frac{\rho}{2p}(x-h)}$.

常 考题型及其解题方法与技巧

题型一 变量可分离的方程与齐次方程的求解

【例 6.14】 求下列方程的通解：

(Ⅰ) $y' = [\sin(\ln x) + \cos(\ln x) + a]y$；　　(Ⅱ) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

www.TopSage.com

【解】 （Ⅰ）属变量可分离的方程，分离变量改写为

$$\frac{dy}{y} = (\sin\ln x + \cos\ln x + a)dx.$$

两端求积分，由于$\int\sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)dx$，

所以通解为$\ln|y| = x\sin(\ln x) + ax + C$，或$y = Ce^{x\sin(\ln x)+ax}$，其中$C$为任意常数.

（Ⅱ）属齐次方程. 令$y = xu$，并且当$x > 0$时，原方程可化为

$$xu' + u = \sqrt{1-u^2} + u，即 \quad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

两端求积分，则得$\arcsin u = \ln x + C$，即其通解为$\arcsin\frac{y}{x} = \ln x + C$，其中$C$为任意常数.

当$x < 0$时，上述方程变为$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{dx}{x}$，其通解应为$\arcsin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$，其中$C$为任意常数.

评注 在求解同一个方程的通解时，常常会求得不同形式的答案. 如题（Ⅰ）中$\ln|y| = x\sin(\ln x) + ax + C$或$y = Ce^{x\sin\ln x+ax}$，均正确. 因为它们都是含任意常数的解，但它们有区别：首先，能化成显式的通解应尽可能化成显式；其次，从求解这个角度来看，在通解中应尽可能多地包含方程的解. 在变量分离时可能失去解，在某种形式的通解中可能不含这些失去的解，在另一种形式的通解中就可能包含这些失去的解. 如题（Ⅰ）中，$y = 0$是一个特解，它不包含在通解$\ln|y| = x\sin(\ln x) + ax + C$中，但包含在通解$y = Ce^{x\sin\ln x+ax}$中，当常数$C = 0$时，正好就是$y = 0$.

题型二 通过简单代换化为变量可分离的方程的求解

【例 6.15】 求下列各方程的通解：

（Ⅰ） $y' = \frac{2x-y+1}{2x-y-1}$；　（Ⅱ） $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$；　（Ⅲ） $y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$.

【解】 （Ⅰ）该方程属于$\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$的情形. 令$u = 2x - y$，则原方程化为

$$u' = 2 - y' = 2 - \frac{u+1}{u-1} = \frac{u-3}{u-1}.$$

这也是一个变量可分离的方程，即$\frac{u-1}{u-3}du = dx$. 积分即得其通解为$(2x-y-3)^2 = Ce^{y-x}$，其中C为任意常数.

（Ⅱ）该方程属于$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$的情形. 解线性方程组$\begin{cases} y+2=0, \\ x+y-1=0, \end{cases}$

其解为$(3,-2)$. 令$u = x-3$，$v = y+2$，则原方程化为$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2$，$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}\right)^2$.

这是一个齐次方程，再令$z = \frac{v}{u}$，该方程又可化为$\frac{(1+z)^2}{z(1+z^2)}dz = -\frac{du}{u}$.

两端求积分，即得$\ln|z| + 2\arctan z = -\ln|u| + C_1$.

所以，其通解为$y = Ce^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}} - 2$，其中$C$为任意常数.

www.TopSage.com

(Ⅲ) 令 $u = y^2/x$,则 $u' = \frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{2y}{x}\left(\frac{y}{2x} + \frac{1}{2y}\tan u\right) - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x}\tan u$.

这也是一个变量可分离的方程 $\frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x}$,即 $\frac{d\sin u}{\sin u} = \frac{dx}{x}$.

两边求积分,可知其通解为 $\sin\frac{y^2}{x} = Cx$,其中 C 为任意常数.

评注 本(Ⅰ)~(Ⅲ)三个小题也都是直接给出了伯努利方程,然后它们都包含在通解之中.这几道例题均能通过简单代换化为变量可分离方程.(Ⅰ)与(Ⅱ)这两个小题的变量代换已在前面做过说明,题(Ⅲ)未作过说明,就是解中所给的代换将可分离方程中的 x 与 y 互换.

题型三 一阶线性方程与可化为一阶线性方程的求解

【例 6.16】 求下列微分方程的通解:

(Ⅰ) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$;　　(Ⅱ) $y' = \frac{1}{xy + y^3}$;

(Ⅲ) $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$;　　(Ⅳ) $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x-1)}$.

【解】 (Ⅰ) 这是一阶线性非齐次方程,两边同乘 $e^{\int\frac{1-2x}{x^2}dx} = e^{-\frac{1}{x}-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$,得

$$\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}y\right)' = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}.$$

积分得 $y = x^2e^{\frac{1}{x}}\left(C + \int\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx\right) = x^2e^{\frac{1}{x}}\left(C + e^{-\frac{1}{x}}\right) = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$,其中 C 为任意常数.

(Ⅱ) 注意到如果将 x 看作 y 的函数,则该方程可改写为 $\frac{dx}{dy} - yx = y^3$,这也是一个一阶线性非齐次方程,两边同乘 $\mu = e^{\int -ydy} = e^{-\frac{1}{2}y^2}$ 得 $\frac{d}{dy}\left(xe^{-\frac{1}{2}y^2}\right) = y^3e^{-\frac{1}{2}y^2}$. 积分得

$$x = e^{\frac{1}{2}y^2}\left(C + \int y^3e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\right) = e^{\frac{y^2}{2}}\left(C - y^2e^{-\frac{y^2}{2}} + \int e^{-\frac{y^2}{2}}dy^2\right) = Ce^{\frac{y^2}{2}} - y^2 - 2,$$

其中 C 为任意常数.

评注 像这种交换自变量与因变量的位置的解题技巧在解微分方程中是常用的.

(Ⅲ) 显然这是一个齐次方程,利用齐次方程的解法可以得到其通解.这里若将 x 看作 y 的函数,原方程可改写为 $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = \frac{y^2}{x^2}$. 这还是一个**伯努利方程**. 令 $u = x^3$,原方程又可改写为 $\frac{du}{dy} - \frac{3}{y}u = 3y^2$. 而 $e^{-\int\frac{3}{y}dy} = \frac{1}{|y|^3}$,于是两边同乘 $\mu = \frac{1}{y^3}$ 得 $\frac{d}{dy}\left(\frac{u}{y^3}\right) = \frac{3}{y}$. 积分得

$$\frac{u}{y^3} = \int\frac{3}{y}dy + C = 3\ln|y| + C, \quad 即 \quad x^3 = Cy^3 + 3y^3\ln|y|,$$

其中 C 为任意常数.

(Ⅳ) 这是伯努利方程,此方程可改写为 $2yy' = \frac{y^2}{x-1} - \frac{x}{x-1}$.

由于 $2yy' = (y^2)'$,故令 $y^2 = u$,则原方程化为 $u' - \frac{1}{x-1}u = -\frac{x}{x-1}$.

这又是一个一阶线性非齐次方程,而 $e^{-\int\frac{dx}{x-1}} = \frac{1}{|x-1|}$,于是两边同乘 $\mu = \frac{1}{x-1}$ 得

www.TopSage.com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{x-1}\right)=-\frac{x}{(x-1)^2}.$$

积分得 $\frac{u}{x-1}=-\int\frac{x}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+C=-\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\right]+C=-\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C,$

即得通解为 $y^2=C(x-1)-(x-1)\ln|x-1|+1$,其中 C 为任意常数.

题型四 全微分方程的求解

【例 6.17】 求下列各微分方程的通解:

(Ⅰ) $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y=0$;

(Ⅱ) $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)\mathrm{d}y=0$.

【解】 (Ⅰ) 由凑微分法易知,这是全微分方程,改写成

$$\mathrm{d}x^3+3y^2\mathrm{d}x^2+3x^2\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}y^4=0,\text{即 }\mathrm{d}(x^3+3x^2y^2+y^4)=0.$$

于是即得其通解为 $x^3+3x^2y^2+y^4=C$,其中 C 为任意常数.

(Ⅱ) 经计算容易验证:$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)$,所以它也是全微分方程,然而,由于方程中含 $\ln x$,则只能在半平面 $x>0$ 上考虑. 为求原函数,现设积分路径从点(1,0)开始,首先沿 x 轴积到点$(x,0)$,然后再沿横坐标为 x 的直线积到点(x,y),有

$$u(x,y)=\int_1^x 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^y(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)\mathrm{d}y=(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)y.$$

于是即得其通解为$(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)y=C$,其中 C 为任意常数.

题型五 可降阶的高阶微分方程的求解

【例 6.18】 求解二阶微分方程的初值问题 $\begin{cases}yy''=1+(y')^2,\\ y(1)=1,y'(1)=0.\end{cases}$

【解】 此方程不显含 x,令 $p=y'$,并以 y 为自变量,则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,并且方程变为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2,\text{则}\quad\frac{2p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{2\mathrm{d}y}{y}.$$

其解为 $1+p^2=Cy^2$. 代入初始条件,可知 $C=1$,即 $p^2=y'^2=y^2-1$,从而$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x$.

这是一个变量分离的方程,两端求积分,并代入初始条件,则无论右端取正号,还是取负号,其结果均为 $y=\frac{\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}}{2}$.

评注 这是一个二阶微分方程,求解过程也分两步:第一步得到 $p=y'$ 与 y 的关系,第二步得到 y 与 x 的关系. 值得注意的是,这里初始条件也用了两次. 第一次是决定 p 与 y 的关系式中的常数,第二次是决定 y 与 x 的关系式中的常数.

www.TopSage.com

题型六　二阶线性常系数方程的求解

【例 6.19】 解下列微分方程：

（Ⅰ） $y''-7y'+12y=x$ 满足初始条件 $y(0)=\frac{7}{144}$，$y'(0)=\frac{7}{12}$ 的特解；

（Ⅱ） $y''+a^2y=8\cos bx$ 的通解，其中 $a>0,b>0$ 为常数；

（Ⅲ） $y'''+y''+y'+y=0$ 的通解．

【解】 （Ⅰ）相应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-7\lambda+12=0$，它有两个互异的实根：$\lambda_1=3,\lambda_2=4$，所以，其通解为 $\bar{y}(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$.

由于 0 不是特征根，所以非齐次方程的特解应具有形式 $y^*(x)=Ax+B$. 代入方程，可得 $A=\frac{1}{12}$，$B=\frac{7}{144}$，所以，原方程的通解为 $y(x)=\frac{x}{12}+\frac{7}{144}+C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$.

代入初始条件，则得 $\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ 3C_1+4C_2=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow C_1=-\frac{1}{2},\ C_2=\frac{1}{2}$.

因此所求的特解为 $y(x)=\frac{x}{12}+\frac{7}{144}+\frac{1}{2}(e^{4x}-e^{3x})$.

（Ⅱ）由于相应齐次方程的特征根为 $\pm ai$，所以其通解为 $\bar{y}(x)=C_1\cos ax+C_2\sin ax$. 求原非齐次方程的特解，需分两种情况讨论：

① 当 $a\neq b$ 时，特解的形式应为 $A\cos bx+B\sin bx$，将其代入原方程，则得

$$A=\frac{8}{a^2-b^2},\quad B=0.$$

所以，通解为 $y(x)=\frac{8}{a^2-b^2}\cos bx+C_1\cos ax+C_2\sin ax$，其中 C_1,C_2 为任意常数．

② 当 $a=b$ 时，特解的形式应为 $Ax\cos ax+Bx\sin ax$，代入原方程，则得

$$A=0,\quad B=\frac{4}{a}.$$

原方程的通解为 $y(x)=\frac{4}{a}x\sin ax+C_1\cos ax+C_2\sin ax$，其中 C_1,C_2 为任意常数．

（Ⅲ）这是一个三阶常系数线性齐次方程，其相应的特征方程为 $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$，分解得 $(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$，其特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=\pm i$，所以方程的通解为

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x,\text{其中 } C_1,C_2,C_3 \text{ 为任意常数.}$$

【注】 已知二阶线性常系数齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关特解，求该方程；已知二阶线性常系数非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的三个线性无关的特解，求该方程及相应的通解，这类题型见题型训练中三、题 5.

题型七　特殊的变系数二阶线性方程的求解

【例 6.20】 求方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解．

【解法一】 方程两端同乘 x，使之变为欧拉方程 $x^2y''-xy'=x^3$. 令 $x=\pm e^t$，则

www.TopSage.com

$$\frac{dy}{dx} = \pm e^{-t}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\pm e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}.$$

代入原方程，则有$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = \pm e^{3t}$. 这是一个二阶常系数线性非齐次方程，其通解为

$$y = \pm\frac{1}{3}e^{3t} + C_1e^{2t} + C_2 = \frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2, \text{其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

【解法二】 将原方程看作不显含 y 的二阶方程，则属于可降阶的范围. 令 $p = y'$，$p' = y''$，代入原方程，则化为 p 的一阶线性非齐次方程 $xp' - p = x^2$，即 $p' - \frac{1}{x}p = x$.

而 $e^{-\int\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{|x|}$，于是两边同乘 $\mu = \frac{1}{x}$ 得 $\left(\frac{1}{x}p\right)' = 1$. 因此

$$y' = p = Cx + x^2.$$

再积分一次，即得原方程的通解为：$y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2$，其中 C_1, C_2 为任意常数.

【解法三】 将方程改写为 $\frac{xy'' - y'}{x^2} = 1$，则 $\left(\frac{y'}{x}\right)' = 1$. 所以

$$\frac{y'}{x} = x + C, \quad \text{即} \quad y' = x^2 + Cx.$$

这个结果与【解法二】是一致的，再积分一次即得其通解.

【例 6.21】 利用代换 $u = y\cos x$ 将微分方程 $y''\cos x - 2y'\sin x + 3y\cos x = e^x$ 化简，并求出原方程的通解.

【分析】 这是一个二阶变系数线性非齐次微分方程，不属于我们能够求解的范围，而如果能使其变为常系数方程就可求解了. 从方程的形式看，令 $y\cos x = u$ 应该是自然的.

【解】 令 $y\cos x = u$，则 $y = u\sec x$，从而

$$y' = u'\sec x + u\sec x\tan x, \quad y'' = u''\sec x + 2u'\sec x\tan x + u\sec x\tan^2 x + u\sec^3 x.$$

代入原方程，则得 $u'' + 4u = e^x$. 这是一个二阶常系数线性非齐次方程，其通解为

$$u = \frac{1}{5}e^x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

代回到原未知函数，则有 $y = \frac{1}{5\cos x}e^x + C_1\frac{\cos 2x}{\cos x} + 2C_2\sin x$，其中 C_1, C_2 为任意常数.

题型八 含变限积分方程的求解

【例 6.22】 设 $f(x) = x\sin x - \int_0^x (x - t)f(t)\,dt$，其中 $f(x)$ 连续，求 $f(x)$.

【解】 将原方程改写为 $f(x) = x\sin x - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt$.

因为 $f(x)$ 连续，所以方程的右端是可微的，因而左端的函数 $f(x)$ 也可微. 两端对 x 求导，又原式中令 $x = 0$，则原方程等价于

$$f'(x) = x\cos x + \sin x - \int_0^x f(t)\,dt, f(0) = 0. \qquad ①$$

同理，方程右端仍可微，所以 $f(x)$ 存在二阶导数，再将 ① 中的方程两边求导并令 $x = 0$，则得 ① 等价于

$$f''(x) = -x\sin x + 2\cos x - f(x), f'(0) = 0, f(0) = 0.$$

即 $y = f(x)$ 满足微分方程的初值问题 $y'' + y = -x\sin x + 2\cos x, y(0) = 0, y'(0) = 0$. ②

由于此方程的特征根为 $\pm i$，所以其特解应具形式 $y^*(x) = x(Ax + B)\cos x + x(Cx + D)\sin x$. 代入

www.TopSage.com

方程，求出系数 A,B,C,D，则得其特解为 $y^*(x) = \frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{3}{4}x\sin x$，进而方程的通解为

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{3}{4}x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x . \qquad ③$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C_1 = 0$，而由 $f'(0) = 0$ 又可推出 $C_2 = 0$，所以 $f(x) = \frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{3}{4}x\sin x$.

评注 (1) 本题解答中一个常见的错误是忽略原方程所蕴含的定解条件，以为求出通解③就已经做完了.

(2) 方程②的右端为两项之和，在一般情况下，线性微分方程的右端项为两项之和时，可分成两个方程，分别求出特解，然后相加，叠加原理就是保证两个特解之和正好是原方程的特解. 这里没有分成两个方程，是由于它们的特解可以表成同一种形式.

题型九　由自变量增量与因变量增量间的关系给出的一阶方程

【例 6.23】　当 $\Delta x \to 0$ 时 α 是比 Δx 较高阶的无穷小量，函数 $y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{x^2 + x + 1} + \alpha$，且 $y(0) = \pi$，则 $y(1) =$ _____.

【分析】　首先尝试从 Δy 的表达式直接求 $y(1)$. 为此，设 $x_0 = 0, \Delta x = 1$，于是 $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y(1) - y(0) = y(1) - \pi$，代入 Δy 的表达式即得

$$y(1) - \pi = \pi + \alpha \quad \Leftrightarrow \quad y(1) = 2\pi + \alpha .$$

由于仅仅知道当 $\Delta x \to 0$ 时 α 是比 Δx 较高阶的无穷小，而不知道 α 的具体表达式，因而从上式无法求出 $y(1)$.

由此可见，为了求出 $y(1)$ 必须去掉 Δy 的表达式中包含的 α. 利用函数的增量 Δy 与其微分 $\mathrm{d}y$ 的关系可知，函数 $y(x)$ 在任意点 x 处的微分

$$\mathrm{d}y = \frac{y(x)}{x^2 + x + 1}\Delta x = \frac{y(x)}{x^2 + x + 1}\mathrm{d}x,$$

这是一个可分离变量方程，它满足初始条件 $y\big|_{x=0} = \pi$ 的特解正是本题中的函数 $y(x)$，解出 $y(x)$ 即可得到 $y(1)$.

将方程　$\mathrm{d}y = \frac{y}{x^2 + x + 1}\mathrm{d}x$　分离变量，得　$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}$.

求积分可得　$\ln|y| = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}$.

由初始条件　$y(0) = \pi$ 可确定 $C = \pi e^{-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$，从而 $y(1) = \pi e^{-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}} = \pi e^{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$.

评注　从函数 $y = y(x)$ 对应于自变量的改变量 Δx 的改变量 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ 满足

$$\Delta y = f(x,y)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}y = f(x,y)\mathrm{d}x,$$

于是 $y = y(x)$ 满足一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$.

题型十　综合题与证明题

【例 6.24】 设 $u(\sqrt{x^2+y^2})$ 是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$ 的解，求 u.

【解】 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=u_r'\frac{x}{r}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{rr}\frac{x^2}{r^2}+u_r'\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)$，

同理 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_{rr}''\frac{y^2}{r^2}+u_r'\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)$. 将其代入原方程，则得 $u''+u=r^2$. 该方程的通解是

$$u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2,$$

于是 $u(\sqrt{x^2+y^2})=u(r)=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-2$，其中 C_1,C_2 是任意常数.

【例 6.25】 设 $f(x)$ 是以 ω 为周期的连续函数，证明：一阶线性微分方程

$$y'+ky=f(x)$$

存在唯一的以 ω 为周期的特解，并求此特解，其中 $k\neq 0$ 为常数.

【分析】 本题实际上求该方程的特解. 对此，我们先求通解，然后利用周期性确定常数 C.

【证明】 此线性方程的通解即所有解可表示为 $y(x)=e^{-kx}\left[C+\int_0^x f(t)e^{kt}dt\right]$.

$y(x)$ 以 ω 为周期，即 $y(x)=y(x+\omega)$，亦即

$$e^{-kx}\left[C+\int_0^x f(t)e^{kt}dt\right]=e^{-kx-k\omega}\left[C+\int_0^{x+\omega} f(t)e^{kt}dt\right].$$

$$\Leftrightarrow\quad C+\int_0^x f(t)e^{kt}dt=e^{-k\omega}\left[C+\int_0^{x+\omega} f(t)e^{kt}dt\right]\xlongequal{t=s+\omega}e^{-k\omega}\left[C+\int_{-\omega}^{x} f(s+\omega)e^{ks+k\omega}ds\right]$$

$$=Ce^{-k\omega}+\int_{-\omega}^{0} f(s)e^{ks}ds+\int_0^x f(s)e^{ks}ds.$$

$$\Leftrightarrow\quad C=\frac{1}{1-e^{-k\omega}}\int_{-\omega}^{0} f(s)e^{ks}ds\xlongequal{s=t-\omega}\frac{e^{-k\omega}}{1-e^{-k\omega}}\int_0^{\omega} f(t)e^{kt}dt=\frac{1}{e^{k\omega}-1}\int_0^{\omega} f(t)e^{kt}dt.$$

对应于这个 C 的特解就是以 ω 为周期的函数，而且这样的常数只有一个，所以周期解也只有一个.

题型十一　有关微分方程应用题的求解

见【例 6.8】~【例 6.13】及题型训练四.

题型训练

一、选择题

1. 方程 $y'\sin x=y\ln y$ 满足条件 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$ 的特解是

(A) $\frac{e}{\sin x}$.　(B) $e^{\sin x}$.　(C) $\frac{e}{\tan\frac{x}{2}}$.　(D) $e^{\tan\frac{x}{2}}$.

2. 以下可以看作某个二阶方程的通解的函数是

(A) $y=C_1x^2+C_2x+C_3$.　(B) $x^2+y^2=C$.

(C) $y=\ln(C_1x)+\ln(C_1\sin x)$.　(D) $y=C_1\sin^2x+C_2\cos^2x$.

www.TopSage.com

3. 方程 $y''-2y'+3y=e^x\sin(\sqrt{2}x)$ 的特解的形式为

(A) $e^x[A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)]$.　　(B) $xe^x[A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)]$.

(C) $Ae^x\sin(\sqrt{2}x)$.　　(D) $Ae^x\cos(\sqrt{2}x)$.

二、填空题

1. 下列微分方程中(填序号)_____是线性微分方程.

① $\frac{dy}{dx}+y^2\sin x=e^x$　　② $x^2\frac{dy}{dx}+y\cos x=\tan x$

③ $x^4\frac{d^2y}{dx^2}+e^x\frac{dy}{dx}+(\ln x)y=0$　　④ $\frac{d^2y}{dx^2}+e^x\frac{dy}{dx}+(x^2+3y)y=x$

2. 已知 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的一个解是 $y_1=x$,又知 $\bar{y}=e^x-(x^2+x+1)$,$y^*=-x^2-1$ 均是 $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ 的解,则此方程的通解是 $y=$_____.

3. 已知方程 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=0$ 的两个特解 $y_1=e^x$,$y_2=x$,则该方程满足初值 $y(0)=1$,$y'(0)=2$ 的解 $y=$_____.

4. 微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解 $y=$_____.

三、计算题与证明题

1. 求下列方程的通解:

(Ⅰ) $(x-2)dy=[y+2(x-2)^3]dx$;　　(Ⅱ) $y^2dx=(x+y^2e^{y-\frac{1}{y}})dy$;

(Ⅲ) $(3y-7x)dx+(7y-3x)dy=0$;　　(Ⅳ) $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$.

2. 求下列方程的通解或特解:

(Ⅰ) $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=4x^2$,$y(0)=-\frac{1}{2}$,$y'(0)=2$;　(Ⅱ) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}\cos x$.

3. 求方程 $y''+2my'+n^2y=0$ 的通解;又设 $y=y(x)$ 是满足 $y(0)=a$,$y'(0)=b$ 的特解,求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$,其中 $m>n>0$,a,b 为常数.

4. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$,试求 $f(t)$.

5. 已知 $y_1^*=xe^x+e^{2x}$,$y_2^*=xe^x+e^{-x}$,$y_3^*=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性常系数非齐次方程的三个特解,试求其通解及该微分方程.

6. 求解初值问题 $\begin{cases}y^3\frac{d^2y}{dx^2}+1=0,\\ y(1)=1,y'(1)=0.\end{cases}$

7. 设 $p(x)$ 在 (a,b) 连续,$\int p(x)dx$ 表示 $p(x)$ 的某个原函数,C 为任意常数,证明:$y=Ce^{-\int p(x)dx}$ 是方程 $y'+p(x)y=0$ 的所有解.

四、应用题

1. 设连接两点 $A(0,1)$,$B(1,0)$ 的一条凸弧,$P(x,y)$ 为凸弧 AB 上的任意点(图 6.4).已知凸弧与弦 AP 之间的面积为 x^3,求此凸弧的方程.

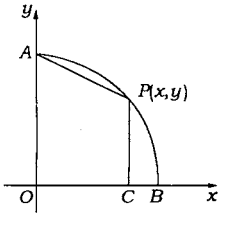


图 6.4

2. 在 $[0,+\infty)$ 上给定曲线 $y=y(x)>0$,$y(0)=2$,$y(x)$ 有连续导数.已知 $\forall x>0$,$[0,x]$ 上一段绕 x 轴旋转所得侧面积等于该段旋转体的体积,求曲线 $y=$

www.TopSage.com

$y(x)$ 的方程.

3. 设 $f(x)$ 为连续正值函数,$x \in [0, +\infty)$,若平面区域 $R_t = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant t, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ $(t > 0)$ 的形心纵坐标等于曲线 $y = f(x)$ 在 $[0,t]$ 上对应的曲边梯形面积与 $\frac{1}{2}$ 之和,求 $f(x)$.

4. 设曲线 $y = y(x)$ 上 $\forall$ 点 (x,y) 处的切线垂直于此点与原点的连线,求曲线 $y = y(x)$ 的方程.

5. 求证:曲率半径为常数 a 的曲线是圆.

6. 设有一弹性轻绳(即绳本身的重量忽略不计),上端固定,下端悬挂一质量为 3 克的物体,已知此绳受 1 克重量的外力作用时伸长 $\frac{1}{24}$ 厘米,如果物体在绳子拉直但并未伸长时放下,问此物体向下运动到什么地方又开始上升?

7. 5kg 肥皂溶于 300L 水中后,以每分钟 10L 的速度向内注入清水,同时向外抽出混合均匀之肥皂水,问何时余下的肥皂水中只有 1kg 肥皂.

8. 设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发,以速度大小为常数 v 沿 y 轴正方向运动,物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发,其速度大小为 $2v$,方向始终指向 A,任意时刻 B 点的坐标 (x,y),试建立物体 B 的运动轨迹(y 作为 x 的函数)所满足的微分方程,并写出初始条件.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

第七章　向量代数和空间解析几何

内容概要与重难点提示

本章由两个部分组成，向量代数的重点是向量的运算：加法、数乘、数量积、向量积与混合积，应能熟练地用于直线与平面的问题；空间解析几何的重点是建立平面、直线方程，以及直线与直线、平面与平面、直线与平面之间的各种关系，对于二次方程应当知道每种方程各表示什么曲面，会求柱面、旋转面方程．

从历年统考看，涉及本章知识的考题以三种形式出现：(1) 单独命题共有8题，大部分是填空或选择题；(2) 综合题共有13题，或与多元函数微分学的几何应用，如切平面、切线相关联，或与线性代数中的秩、线性相关性、二次型的标准形相联系等；(3) 在重积分、曲面积分中会接触到二次曲面的知识．

考核知识要点讲解

一、空间直角坐标系

为了确定空间点的位置，引进空间直角坐标系．这样，点与三个有序实数所构成的数组就有一一对应的关系，进而曲面可建立方程，对曲面几何性质的研究就可转化为对方程解析性质的研究．

从空间某定点 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且有相同的长度单位，三条轴分别称为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴)，三个坐标轴的方向要符合右手法则，这样就建立了空间直角坐标系 $Oxyz$，点 O 叫坐标原点．

如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$(或 $z=f(x,y)$)有如下关系：

(1) 曲面 S 上的每个点的坐标都满足方程；(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足此方程，则称这三元方程是曲面 S 的方程，而曲面 S 称为此方程的图形．

空间曲线 C 可以看成是两个曲面 $S_1:F(x,y,z)=0$ 和 $S_2:G(x,y,z)=0$ 的交线，方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 称为空间曲线 C 的一般方程．

对于空间曲线 C 上任意一点的直角坐标 (x,y,z)，若分别表示为参变量 t 的函数，即 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t),\end{cases}$ 则称此方程组是空间曲线 C 的参数方程．

二、向量的概念

既有大小又有方向的量称为**向量**(或矢量)．通常用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}$ 等形式表示向量，在建立空间

直角坐标系后，若向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，点 M 的坐标 (x,y,z) 就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，且有向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，通常记为 $\{x,y,z\}$，其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为 x,y,z 轴的正方向上的单位向量，即坐标向量.

起点是坐标原点 O，终点是 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的**向径**，也常用 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0$ 等形式表示.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小（长度）称为向量的**模**，记作 $|\boldsymbol{a}|$；模为 1 的向量叫单位向量，模为零的向量叫零向量.

方向相同或相反的向量称为**共线向量**，平行于同一平面的向量称为**共面向量**.

从同一点出发的两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，它们所成的两个角中不超过 π 的那个为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 如 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

且方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 就是单位向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 成比例的三个不全为零的数 A,B,C 构成的有序数组称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的一组方向数，记为 $\{A,B,C\}$，即

$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma}.$$

三、向量的运算

（一）定义与计算公式

设 $\boldsymbol{a}_j=x_j\boldsymbol{i}+y_j\boldsymbol{j}+z_j\boldsymbol{k}=\{x_j,y_j,z_j\}$，$j=1,2,3$.

▶1. **加法**　由平行四边形法则或三角形法则给出，用坐标作运算则有

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}. \tag{7.1}$$

▶2. **数乘向量**　$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，其模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，而方向规定为：若 $\lambda>0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，若 $\lambda<0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 用坐标作运算为：若 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，则

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x,\lambda y,\lambda z\}. \tag{7.2}$$

【注】　$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，　$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

▶3. **向量的数量积（点积，内积）**　$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2$ 是一个数，规定为 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\cos\theta$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的夹角. 用坐标作运算则有

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \tag{7.3}$$

两个向量的夹角是指不超过 π 的那个角.

▶4. **向量的向量积（叉积，外积）**　$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ 是一个向量，其模 $|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|=|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sin\theta$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 的夹角，其方向规定为与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 都垂直且 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ 符合右手系. 用坐标作运算为

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}. \tag{7.4}$$

www.TopSage.com

▶5. 混合积　三个向量 a_1,a_2,a_3 的混合积(a_1,a_2,a_3)是一个数,规定为$(a_1,a_2,a_3)=(a_1\times a_2)\cdot a_3$,用坐标作运算就是

$$(a_1,a_2,a_3)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{7.5}$$

(二) 运算法则

▶1. 加法与数乘

$$\begin{aligned}&a+b=b+a, && (a+b)+c=a+(b+c),\\ &\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a, && (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a,\\ &\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b, && 0+a=a,\\ &a+(-a)=0, && 1\cdot a=a.\end{aligned} \tag{7.6}$$

▶2. 数量积

$$a\cdot b=b\cdot a,\quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,\quad (\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b). \tag{7.7}$$

▶3. 向量积

$$\begin{aligned}&a\times b=-b\times a,\quad (\lambda a)\times b=\lambda(a\times b),\\ &a\times(b+c)=a\times b+a\times c,\quad a\times a=0.\end{aligned} \tag{7.8}$$

▶4. 混合积

$$\begin{aligned}&(a,b,c)=(b,c,a)=(c,a,b), && (a,a,b)=(a,b,a)=(a,b,b)=0,\\ &(a,b,c)=-(b,a,c), && (\lambda a,b,c)=\lambda(a,b,c),\\ &(a_1+a_2,b,c)=(a_1,b,c)+(a_2,b,c).\end{aligned} \tag{7.9}$$

(三) 几何应用

▶1. 加法与数乘

(1) 建立坐标系;建立直线方程;建立平面方程.

(2) 过点 P_0,方向向量为 S 的直线的向量方程是 $r-r_0=tS$(见图 7.1).

(3) 过点 P_0,与 U_1,U_2(U_1,U_2 不平行)都平行的平面的向量方程是 $r-r_0=t_1U_1+t_2U_2$(见图 7.2).

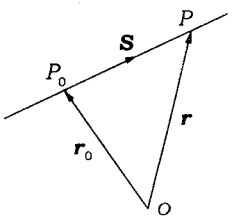


图 7.1

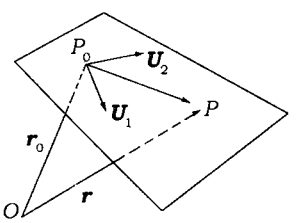


图 7.2

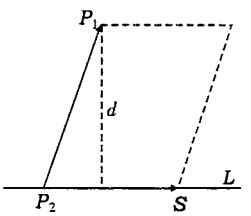


图 7.3

(4) 设有任意非零向量 a,则 $a=|a|a_0$,其中 a_0 是与 a 同方向的单位向量.

▶2. 数量积

(1) 求模 $|a|=\sqrt{a^2}$,进而可求两点距离;

www.TopSage.com

(2) 求两个向量的夹角 θ,进而可求两条直线、直线与平面、两个平面之间的夹角;

(3) 判定垂直:$\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0$,进而可证两条直线、两个平面的垂直关系,以及直线与平面的平行关系;

(4) 求点到平面的距离;

(5) 建立平面方程(点法式):$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$.

▶3. 向量积

(1) 求平行四边形(三角形)面积(以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两邻边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$),进而可求点到直线的距离(图 7.3)

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{S}|}. \tag{7.10}$$

(2) 求两个平面交线的方向向量 $\boldsymbol{S}$,从而可把直线的一般方程化为直线的标准方程. 设这两个平面的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$,则交线 L 与 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 都要垂直,故可取 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$.

(3) 判断平行:

$$\boldsymbol{a}_1 /\!/ \boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}(\text{坐标成比例}, \boldsymbol{a}_j = (x_j,y_j,z_j), j = 1,2)$$

$$\Leftrightarrow \text{存在实数 } \lambda, \text{使得 } \boldsymbol{a}_1 = \lambda \boldsymbol{a}_2 \text{ 或 } \boldsymbol{a}_2 = \lambda \boldsymbol{a}_1.$$

▶4. 混合积

(1) 判断三个向量(或四个点)是否共面:向量 $\boldsymbol{a}_1 = \{x_1,y_1,z_1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{x_2,y_2,z_2\}$, $\boldsymbol{a}_3 = \{x_3,y_3,z_3\}$ 共面

$$\Leftrightarrow \quad \text{混合积}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{存在不全为零的数 } k_1,k_2,k_3, \text{使 } k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}.$$

(2) 进而可建立平面方程:若 $\boldsymbol{U}_1 = \{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\boldsymbol{U}_2 = \{X_2,Y_2,Z_2\}$ 不平行,则过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 与 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 都平行的平面的方程是 $(\overrightarrow{P_0P},\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2) = 0$,用坐标表示,即

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.11}$$

(3) 求平行六面体的体积(亦可求四面体的体积),以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三条棱的平行六面体的体积是 $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$.

(4) 进而可判断两条直线是否异面并求两条异面直线公垂线的长. 设直线 L_1,L_2 分别过点 P_1,P_2,其方向向量分别为 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$,则 L_1 与 L_2 是异面直线 $\Leftrightarrow (\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2) = 0$.

设 L_1,L_2 是异面直线,过 L_1 作平面 Π 平行于直线 L_2,设 L_2 在 Π 上投影直线为 QR,它交 L_1 于 Q,并设 Q 为 L_2 上点 P 在 Π 上的投影,$\overline{PQ}$ 就是 L_1 与 L_2 的公垂线. 以 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\overrightarrow{P_1P_2}$ 为棱构造平行六面体,则底面 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 上的高就是公垂线 $\overline{PQ}$ 的长,记为 d,且

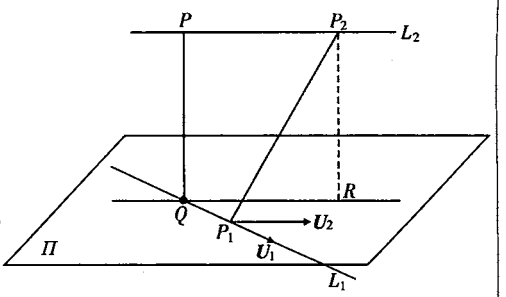


图 7.4

www.TopSage.com

$$d = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2)|}{|\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2|}. \tag{7.12}$$

(5) 可建立异面直线公垂线的一般方程

$$\begin{cases} (\overrightarrow{P_1P}, \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2) = 0, \\ (\overrightarrow{P_2P}, \boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2) = 0. \end{cases} \tag{7.13}$$

(异面直线 L_1, L_2 的公垂线既在过 L_1 且平行于 $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ 的平面上,又在过 L_2 且平行于 $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ 的平面上.)

【例 7.1】 已知 $\boldsymbol{a}_1 = \{1,2,-3\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{2,-3,x\}$, $\boldsymbol{a}_3 = \{-2,x,6\}$.

(Ⅰ) 如 $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$,则 $x =$ _____; (Ⅱ) 如 $\boldsymbol{a}_1 /\!/ \boldsymbol{a}_3$,则 $x =$ _____;

(Ⅲ) 如 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 共面,则 $x =$ _____.

【分析】 (Ⅰ) $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0$,故 $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-3)x = 0$,得 $x = -\frac{4}{3}$.

(Ⅱ) $\boldsymbol{a}_1 /\!/ \boldsymbol{a}_3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3} = \frac{z_1}{z_3}$,故 $\frac{1}{-2} = \frac{2}{x} = \frac{-3}{6}$,得 $x = -4$.

(Ⅲ) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 共面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 0$,故 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & x \\ -2 & x & 6 \end{vmatrix} = 0$,得 $x = -4$ 或 -6.

【例 7.2】 直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x - y = 6, \\ 2y + z = 3 \end{cases}$ 的夹角为_____.

【分析】 两条直线的夹角也就是这两条直线方向向量的夹角,L_1 的方向向量 $\boldsymbol{S}_1 = \{1,-2,1\}$ 已知,对 L_2 应通过方程转换化其为标准方程或参数方程来求 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{S}_2$.

令 $y = t$,直线 L_2 的参数方程是 $\begin{cases} x = t + 6, \\ y = t, \\ z = -2t + 3, \end{cases}$ 得到 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{S}_2 = \{1,1,-2\}$.

由于 $\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2|}{|\boldsymbol{S}_1||\boldsymbol{S}_2|} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$,所以 L_1 与 L_2 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$.

评注 平面 $\Pi_1: x - y = 6$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1 = \{1,-1,0\}$,平面 $\Pi_2: 2y + z = 3$ 的法向量是 $\boldsymbol{n}_2 = \{0,2,1\}$,而 $\boldsymbol{n}_1 \perp \Pi_1$,故 $\boldsymbol{n}_1 \perp L_2$,同理 $\boldsymbol{n}_2 \perp L_2$,可令 $\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ 得

$$\boldsymbol{S}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} = \{-1,-1,2\}.$$

【例 7.3】 与 $\boldsymbol{a}_1 = \{1,2,3\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{1,-3,-2\}$ 都垂直的单位向量为_____.

【分析】 用叉积,因为 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 按定义与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直,而

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k},$$

可见与 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 都垂直的向量是 $\boldsymbol{c} = l(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$ (l 为任意常数). 再将其单位化 $\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$ 即为所求. 故应填:

$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,-1\}$.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

四、平面方程、直线方程

(一) 平面方程

▶1. 平面方程的基本形式

(1) 点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$; (7.14)

(2) 一般式 $Ax+By+Cz+D=0$ (A,B,C 不全为零);

(3) 向量式 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t_1\boldsymbol{U}_1+t_2\boldsymbol{U}_2$,其中 $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OM}$,$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$,$P$ 是平面 Π 上任一点;

(4) 参数式 $\begin{cases} x=X_1t_1+X_2t_2+x_0, \\ y=Y_1t_1+Y_2t_2+y_0, \\ z=Z_1t_1+Z_2t_2+z_0. \end{cases}$

▶2. 确定平面方程的两个基本思路

(1) 如已知平面 Π 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 以及平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$,则平面 Π 被完全确定,它的方程是(7.14);

(2) 如已知平面 Π 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 以及与平面 Π 平行的两个不共线的向量 $\boldsymbol{U}_1=\{X_1,Y_1,Z_1\}$,$\boldsymbol{U}_2=\{X_2,Y_2,Z_2\}$,则平面 Π 被完全确定,它的方程是

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0. \tag{7.11}$$

【注】 如 $P(x,y,z)$ 是平面上任一点,那么 $\overrightarrow{MP},\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 共面,因此混合积 $(\overrightarrow{MP},\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)=0$,即有(7.11).利用(7.11)建立平面方程是重要的.

(二) 直线方程

▶1. 直线方程的基本形式

(1) 一般式(交面式) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ 其中 $\{A_1,B_1,C_1\}$ 与 $\{A_2,B_2,C_2\}$ 不平行; (7.15)

(2) 参数式 $\begin{cases} x=x_0+tl, \\ y=y_0+tm, \\ z=z_0+tn; \end{cases}$ (7.16)

(3) 对称式(标准式) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. (7.17)

▶2. 确定直线方程的两个基本思路

(1) 两个不平行的平面相交于一条直线,如(7.15);

(2) 已知直线 L 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 以及直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{S}=\{l,m,n\}$ 可确定直线 L,它的方程是(7.16)或(7.17).

www.TopSage.com

【例 7.4】 （Ⅰ）经过点 $P(1,2,-1)$ 并且与直线 $L:\begin{cases}x=-t+2,\\ y=3t-4,\\ z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面 Π_1 的方程是_____；（Ⅱ）经过点 P 及直线 L 的平面 Π_2 的方程是_____.

【分析】 （Ⅰ）由于 $L\perp\Pi_1$，L 的方向向量 $\boldsymbol{S}=\{-1,3,1\}$ 就是平面 Π_1 的法向量，那么由点法式得 Π_1 的方程是 $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$，即 $x-3y-z+4=0$.

（Ⅱ）点 $M(2,-4,-1)$ 在直线 L 上，因而点 M 是平面 Π_2 上的一点，于是 $\overrightarrow{PM}=\{1,-6,0\}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 是平面 Π_2 上的两个不平行的向量，设 $Q(x,y,z)$ 是平面 Π_2 上的任一点，则 $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PM}$，$\boldsymbol{S}$ 共面，利用(7.11)有

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z+1\\ 1 & -6 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0,\text{即}\quad 6x+y+3z-5=0.$$

【例 7.5】 （Ⅰ）经过点 $P(2,-3,1)$ 且与平面 Π：$3x+y+5z+6=0$ 垂直的直线 L_1 的方程是_____；（Ⅱ）经过点 P 且与直线 L：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+2}{5}$ 垂直相交的直线 L_2 的方程是_____.

【分析】 （Ⅰ）由于 $L_1\perp\Pi$，平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{3,1,5\}$ 就是 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{S}$，故有

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{5}.$$

（Ⅱ）因 L_2 与 L 垂直相交，所以直线 L_2 在经过 P 点且以 L 的方向向量 $\{3,4,5\}$ 为法向量的平面 Π_1 上，则有

$$\Pi_1:\ 3(x-2)+4(y+3)+5(z-1)=0,\text{即}\ 3x+4y+5z+1=0.$$

同时，L_2 在经过 P 点且经过直线 L 的平面 Π_2 上，于是有

$$\Pi_2:\begin{vmatrix}x-1 & y & z+2\\ 3 & 4 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{vmatrix}=0,\text{即}\quad 27x-4y-13z-53=0.$$

故所求 L_2 的方程是 $\begin{cases}3x+4y+5z+1=0,\\ 27x-4y-13z-53=0.\end{cases}$

评注 这两个例题是建立平面、直线方程时所采用的最基本也是最重要的方法，考生应仔细体会.

五、平面、直线之间相互关系与距离公式

平面、直线间的相互关系，实质上是两个向量（平面的法向量或直线的方向向量）间的相互关系.

（一）两个平面间的关系

设 Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则

（1）$\Pi_1\ /\!/\ \Pi_2\ \Leftrightarrow\ \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$；（法向量共线但两平面不重合）

（2）$\Pi_1\perp\Pi_2\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\ \Leftrightarrow\ A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；(7.18)

（3）Π_1 与 Π_2 的夹角 θ（法向量间夹角，指不大于 90° 的）

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

www.TopSage.com

（二）两条直线间的关系

设 L_1：$\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$，$L_2$：$\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$，则

（1）$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow S_1 /\!/ S_2$ 即 $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ 且 (x_1,y_1,z_1) 不满足 L_2 的方程；

（2）$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow S_1 \perp S_2$ 即 $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$； (7.19)

（3）L_1 与 L_2 间的夹角 θ（方向向量间夹角，指不大于 90° 的）

$$\cos\theta=\frac{|S_1\cdot S_2|}{|S_1||S_2|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

（三）直线与平面的关系

设 L：$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$，$\Pi$：$Ax+By+Cz+D=0$，则

（1）$L /\!/ \Pi \Leftrightarrow S \perp n$ 即 $Al+Bm+Cn=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$，

（2）$L \perp \Pi \Leftrightarrow S /\!/ n$ 即 $\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$； (7.20)

（3）L 与 Π 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-(S$ 与 n 的夹角$)$：$\sin\theta=\dfrac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.

（四）平面束方程

通过直线 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程是 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，其中 λ,μ 是不同时为零的任意常数.

（五）关于距离的计算公式

（1）两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

（2）点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 L：$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离(7.10)是（如图 7.5）

$$d=|\overrightarrow{P_0P_1}|\sin\langle\overrightarrow{P_0P_1},S\rangle=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times S|}{|S|},$$

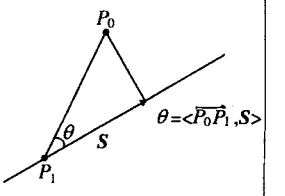


图 7.5

其中 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 S 分别是直线 L 上的定点与方向向量. 按向量叉积与模的运算得

$$d=\frac{|\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}\times\{l,m,n\}|}{|\{l,m,n\}|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}i & j & k\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ l & m & n\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

www.TopSage.com

(3) 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\Pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}\cos\langle\overrightarrow{P_1P_0},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|},$$

其中 P_1 与 $\boldsymbol{n}$ 分别是平面 Π 上的定点与法向量(如图 7.6). 按向量的点乘与模的运算得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{7.21}$$

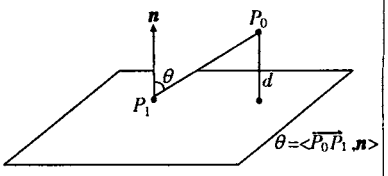


图 7.6

【例 7.6】 两个平行平面 $\Pi_1:2x-y-3z+2=0$, $\Pi_2:2x-y-3z-5=0$ 之间的距离是_____.

【分析】 在平面 Π_1 上任取一点,例如 $P_0(-1,0,0)$,P_0 到 Π_2 的距离就是 Π_1,Π_2 之间的距离,代入(7.21)得

$$d=\frac{|2\times(-1)+(-1)\times0+(-3)\times0-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

六、旋转面与柱面方程,常用二次曲面的方程及其图形

(一) 球面

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是球心,R 是半径,$P(x,y,z)$ 是球面上任意一点,则 $|\overrightarrow{P_0P}|=R$,即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

(二) 旋转曲面

设 L 是 xOz 平面上一条曲线(如图 7.7),其方程是 $\begin{cases}f(x,z)=0,\\ y=0.\end{cases}$ L 绕 z 轴旋转得到旋转曲面,设 $P(x,y,z)$ 是旋转面上任一点,由点 $P_0(x_0,0,z_0)$ 旋转而来(点 $M(0,0,z)$ 是圆心).

由 $|x_0|=|\overrightarrow{MP_0}|=|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{x^2+y^2}$,$z_0=z$ 得旋转面方程是

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0; \tag{7.22}$$

或由参数方程 $x=f(t)$,$y=g(t)$,$z=h(t)(t\in(\alpha,\beta))$,得旋转面的参数方程

$$\begin{cases}x=\sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\cos\theta,\\ y=\sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\sin\theta,\\ z=h(t),\end{cases}\quad \alpha<t<\beta,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi. \tag{7.23}$$

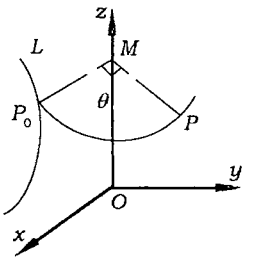


图 7.7

(三) 柱面

Γ 是一条空间曲线,直线 L 沿 Γ 平行移动所产生的曲面叫柱面,Γ 称为柱面的准线,L 叫柱面的母线.

www.TopSage.com

▶1. 若准线方程是 $\Gamma:\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$

(1) 当母线平行于 z 轴时,柱面方程是 $f(x,y)=0$;

(2) 当母线的方向向量是 $\boldsymbol{S}=\{l,m,n\}$ 时,柱面方程是:$f\left(x-\frac{l}{n}z,y-\frac{m}{n}z\right)=0$.

▶2. 若准线方程是 $\Gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases},t\in(\alpha,\beta)$,母线的方向向量是 $\boldsymbol{S}=\{l,m,n\}$,柱面方程是

$$\begin{cases}x=f(t)+lu,\\ y=g(t)+mu,\\ z=h(t)+nu\end{cases}\quad(\alpha<t<\beta,\ -\infty<u<+\infty).$$

(四) 二次曲面

曲面名称	方　　程	曲面名称	方　　程
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	旋转抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z\ (p>0)$
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z\ (p,q>0)$	双曲抛物面	$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z\ (p,q>0)$
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	抛物柱面	$\frac{x^2}{2p}=y\ (p>0)$

七、空间曲线在坐标平面上的投影

设 Γ 是一条空间曲线,Π 是一张平面,对于 Γ 上任意一点 P,令 $\Pi(P)$ 是点 P 在平面 Π 上的**投影点**,即 $\Pi(P)\in\Pi$,$\overrightarrow{\Pi(P)P}\perp\Pi$. 所有投影点的集合称为 Γ 在平面 Π 上的**投影曲线**. 而由垂线所构成的曲面是以 Γ 为准线的柱面,称为 Γ 到 Π 的**投影柱面**.

▶1. 如 $\Gamma:\begin{cases}f(x,y,z)=0,\\ g(x,y,z)=0,\end{cases}$ 消去 z 得到 $\varphi(x,y)=0$,这是以 Γ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面方程. 而 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 是 Γ 在 xOy 平面的投影曲线方程.

▶2. 如 $\Gamma:\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t),\\ z=h(t),\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t),\\ z=0\end{cases}$ 是 Γ 在 xOy 平面的投影曲线方程.

【例 7.7】 点 $A(4,-3,1)$ 在平面 $\Pi:x+2y-z-3=0$ 的投影是_____.

【分析】 由点 A 向平面 Π 作垂线 L,参数方程:$x=t+4$,$y=2t-3$,$z=-t+1$,代入到平面 Π 的方程得

www.TopSage.com

$$(t+4)+2(2t-3)-(-t+1)-3=0,$$

解出 $t=1$，所以 L 与 Π 的交点是 $(5,-1,0)$，故投影点是 $(5,-1,0)$.

大家网 TopSage.com

常考题型及其解题方法与技巧

题型一　向量的运算

【例 7.8】 设 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=2$，则 $[(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})]\cdot(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha})=$ _____.

【分析】 根据叉积有分配律等性质(7.8)有

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}.$$

再利用点积有分配律等性质(7.7)及混合积的性质(7.9)，则有

$$\text{原式}=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}+(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})\cdot\boldsymbol{\alpha}=2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=4.$$

【注】 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$，… 是共面向量的混合积，全是零.

【例 7.9】 试举例说明 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})$.

【解】 在平面 Π 上取三个彼此不平行的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}$ 都是平面 Π 的法向量. 按叉积的定义，$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})$ 都是平面 Π 上的向量. 前者垂直于 $\boldsymbol{\gamma}$，后者垂直于 $\boldsymbol{\alpha}$，显然它们不相等.

【例 7.10】 已知 $\boldsymbol{\alpha}=\{2,-1,1\}$，$\boldsymbol{\beta}=\{1,3,-1\}$，试在 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 所确定的平面 Π 内求与 $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直的单位向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

【解法一】 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=\{-2,3,7\}$ 是平面 Π 的法向量，设 $\boldsymbol{\gamma}=\{x,y,z\}$，则由 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\gamma}$ 及 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{\gamma}$，有 $\begin{cases}2x-y+z=0,\\-2x+3y+7z=0,\end{cases}$ 得通解 $k(5,8,-2)^{\mathrm{T}}$. 再单位化得 $\boldsymbol{\gamma}=\pm\left\{\dfrac{5}{\sqrt{93}},\dfrac{8}{\sqrt{93}},-\dfrac{2}{\sqrt{93}}\right\}$.

评注 由 $\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{n}$ 知 $\boldsymbol{\gamma}\parallel\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{n}$，可计算出

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&1\\-2&3&7\end{vmatrix}=\{-10,-16,4\},$$

再单位化即得 $\boldsymbol{\gamma}$.

【解法二】 由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是平面 Π 上不平行的向量，故平面 Π 的任一向量可用 $x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}$ 表示，则由

$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\gamma}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\cdot(x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta})=0\Leftrightarrow 6x-2y=0,\boldsymbol{\gamma}\parallel\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta},\text{下略}.$$

【例 7.11】 证明 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^2\leqslant\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{\gamma}^2$，并且等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 两两垂直或者 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 中有零向量.

【证明】 按定义 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin\theta_1$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|\cdot|\boldsymbol{\gamma}|\cos\theta_2$，其中 θ_1 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角，θ_2 是 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 的夹角，从而

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2|\boldsymbol{\gamma}|^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2|\boldsymbol{\gamma}|^2=\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{\gamma}^2.$$

等号成立的充要条件是 $\sin^2\theta_1=1=\cos^2\theta_2$. 由此得 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2},\theta_2=0$ 或 π. 即 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$，且 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\parallel\boldsymbol{\gamma}$. 于是即得结论.

【注】 本题的几何意义是在棱长一定的平行六面体中，长方体的体积最大.

www.TopSage.com

【例 7.12】 对三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

如记 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}$，$\boldsymbol{\beta} = \{b_1, b_2, b_3\}$，则方程组可改写成

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 都垂直，用 $\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3$ 对上式的两边作点积，有

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3).$$

当 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \neq 0$ 时，$x_1 = \dfrac{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}$.

类似地 $x_2 = \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}$，$x_3 = \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}$.

这就是线性代数中的克拉默法则.

【例 7.13】 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，证明向量方程组 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = a$，$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = b$，$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1) = c$ 的解可以表示为 $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}(b\boldsymbol{\alpha}_1 + c\boldsymbol{\alpha}_2 + a\boldsymbol{\alpha}_3)$.

【证明】 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出（不熟悉的同学可复习线性代数中【定理 3.5】，【定理 3.2】），设 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，用 $\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3$ 作内积，则因 $\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3 \perp \boldsymbol{\alpha}_2$，$(\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3) \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，同理 $(\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3) \cdot \boldsymbol{\alpha}_3 = 0$，得到

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = x_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3).$$

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \neq 0$，故 $x_1 = \dfrac{b}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}$. 下略.

评注 向量的运算有两种形式，或按定义用运算法则推演，或建立坐标系转化为坐标的运算，要注意几何意义的运用.

题型二 求平面方程

【解题思路】 求平面方程的基本方法有：

1° 找一定点 P_0 及法向量 $\boldsymbol{n}$，用点法式 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$；

2° 找一定点 P_0 及与平面平行的两个不共线向量 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2$，用混合积 $(\overrightarrow{P_0P}, \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2) = 0$；

3° 用平面束方程；

4° 用平面的一般方程（待定系数）.

【例 7.14】 与直线 $L_1: \begin{cases} x = 1, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t \end{cases}$ 及直线 $L_2: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ 都平行且经过坐标原点的平面方程是_____.

【分析一】 直线 L_1, L_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{S}_1 = \{0,1,1\}$ 与 $\boldsymbol{S}_2 = \{1,2,1\}$，设 $P(x,y,z)$ 是平面 Π 上任一点，则 $\overrightarrow{OP}, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ 共面，故混合积 $(\overrightarrow{OP}, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2) = 0$，即

www.TopSage.com

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -x + y - z = 0, \text{亦即} \quad x - y + z = 0.$$

【分析二】 同前,平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{S}_1 \times \boldsymbol{S}_2$,而

$$\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},$$

用点法式 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$,可得 $x - y + z = 0$.

【分析三】 设所求平面方程是 $Ax + By + Cz + D = 0$,根据线、面平行(7.20)及原点在平面上,有

$$\begin{cases} B + C = 0, \\ A + 2B + C = 0, \\ D = 0, \end{cases} \text{解出 } A = t, B = -t, C = t, \text{下略}.$$

【例 7.15】 经过两个平面 $\Pi_1: x + y + 1 = 0$, $\Pi_2: x + 2y + 2z = 0$ 的交线,并且与平面 $\Pi_3: 2x - y - z = 0$ 垂直的平面方程是_____.

【分析一】 用点法式.设平面 Π 的法向量是 $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$,由于 Π, Π_1, Π_2 交于一条公共直线,所以法向量 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 共面,且 $\boldsymbol{n}$ 可由 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 线性表出,故可设 $\boldsymbol{n} = t\boldsymbol{n}_1 + u\boldsymbol{n}_2$.因为 $\Pi \perp \Pi_3$,故 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_3 = 0$,即 $2(t + u) - (t + 2u) - 2u = 0$,取 $t = 2, u = 1$,得到法向量 $\boldsymbol{n} = \{3, 4, 2\}$.

联立 Π_1, Π_2,求 $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ 交点得 $(0, -1, 1)$ 是平面 Π 上一点,从而由点法式得

$$\Pi: \quad 3x + 4(y + 1) + 2(z - 1) = 0.$$

评注 若求出 Π_1, Π_2 交线的方向向量 $\boldsymbol{S}$,则取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{n}_3$ 即可.

【分析二】 用混合积.由于 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 都与平面 Π_1, Π_2 的交线垂直,可取交线的方向向量 $\boldsymbol{S}$ 为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \{2, -2, 1\}.$$

于是 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{n}_3$ 是平面 Π 上的两个不共线向量,再取平面上一点,例如 $P_0(0, -1, 1)$,那么 $\overrightarrow{P_0P}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{n}_3$ 共面,即得平面 Π 的方程:

$$\begin{vmatrix} x & y + 1 & z - 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

【分析三】 用平面束方程.设所求平面 Π 的方程是

$$\lambda(x + y + 1) + \mu(x + 2y + 2z) = 0,$$

即

$$(\lambda + \mu)x + (\lambda + 2\mu)y + 2\mu z + \lambda = 0.$$

由于 $\Pi \perp \Pi_3$,故 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_3 = 0$,即 $2(\lambda + \mu) - (\lambda + 2\mu) - 2\mu = 0$.

取 $\lambda = 2, \mu = 1$ 代入 Π 的方程,得 $3x + 4y + 2z + 2 = 0$ 为所求.

评注 求平面方程的基本思路应清晰,对常见的基本题型应熟练,如过一定点且与一定直线垂直的平面(【例 7.4】,【例 7.17】);过一定点且通过一条定直线的平面(【例 7.4】,【例 7.5】,【例 7.16】);过一定点且与两给定直线平行的平面(【例 7.14】);通过一条定直线且垂直一定平面的平面(【例 7.15】,【例 7.20】)等.试问

① 过两个定点且平行于一条给定直线的平面;

② 过两个定点且垂直于一已知平面的平面;

③ 平行于一定直线且通过另一已知直线的平面.

这些问题你如何解决呢?

题型三　求空间的直线方程

【解题思路】　求空间的直线方程的基本方法有：

1. 找出所求直线所在的两个平面，用直线的一般方程（交面式）；
2. 找定点及直线的方向向量，再用直线的标准方程或参数方程．

【例 7.16】　经过点 $A(-1,0,4)$，与直线 L_1：$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 及 L_2：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线 L 的方程是_____．

【分析一】　所求直线 L 在过 A 点且过直线 L_1 的平面 Π_1 上，也在过 A 点且过直线 L_2 的平面 Π_2 上．由于点 $O(0,0,0)$ 在直线 L_1 上，那么 $\overrightarrow{OA}=\{-1,0,4\}$ 与 $S_1=\{1,2,3\}$ 是平面 Π_1 上的两个向量，设 $P(x,y,z)$ 是 Π_1 上任一点，则 $\overrightarrow{OP}$，S_1，$\overrightarrow{OA}$ 共面，$(\overrightarrow{OP},S_1,\overrightarrow{OA})=0$，即有 Π_1 的方程

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8x-7y+2z=0.$$

类似地，$B(1,2,3)$ 在直线 L_2 上，$\overrightarrow{BP}$，S_2，$\overrightarrow{BA}$ 共面，得 Π_2 的方程

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9x-10y-2z+17=0,$$

故所求的方程为 $\begin{cases} 8x-7y+2z=0, \\ 9x-10y-2z+17=0. \end{cases}$

【分析二】　设所求直线 L 的方向向量 $S=\{l,m,n\}$，则 S，S_1，$\overrightarrow{OA}$ 共面，S，S_2，$\overrightarrow{BA}$ 共面，从而

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} l & m & n \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

即 $\begin{cases} 8l-7m+2n=0, \\ 9l-10m-2n=0, \end{cases}$ 得 $l:m:n=2:2:(-1)$．

故所求的方程为 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-1}$．

评注　设 Π_i 是定点 A 与已知直线 L_i 所决定的平面，法向量是 $\boldsymbol{n}_i$，点 P_i 是直线 L_i 上的定点，S_i 是 L_i 的方向向量（$i=1,2$），那么

$$\boldsymbol{n}_i=\overrightarrow{AP_i}\times S_i.$$

Π_1 与 Π_2 的交线就是所求直线 L（过 A 点与已知直线 L_1，L_2 相交的直线），$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 正是 L 的方向向量 S．请用这一思路再做本题．

【例 7.17】　经过点 $A(-1,2,3)$，垂直于直线 L：$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 且与平面 Π：$7x+8y+9z+10=0$ 平行的直线方程是_____．

【分析一】　用交面式．所求直线在过点 A 以 L 的方向向量 $S=\{4,5,6\}$ 为法向量的平面 Π_1 上，也在过 A 点且 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{7,8,9\}$ 为法向量的平面 Π_2 上．

www.TopSage.com

$$\Pi_1:\ 4(x+1)+5(y-2)+6(z-3)=0,$$
$$\Pi_2:\ 7(x+1)+8(y-2)+9(z-3)=0,$$

故所求直线方程为$\begin{cases}4x+5y+6z-24=0,\\7x+8y+9z-36=0.\end{cases}$

【分析二】 设所求直线 L_1 的方向向量是 $\boldsymbol{S}_1$，由于 $L\perp L_1$，即 $\boldsymbol{S}\perp\boldsymbol{S}_1$，由于 $L_1\ /\!/\ \Pi$，即 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{S}_1$，所以

$$\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=-\{3,-6,3\},$$

故所求直线方程为$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

评注 求直线方程的两种思路要明确，交面式往往会简明一些，相对而言，平面方程更显基础与重要，把直线的一般方程化为对称方程要熟悉，关键是求直线的方向向量 $\boldsymbol{S}$.

例如，把$\begin{cases}x-2y+z-1=0,\\2x+y-2z+2=0\end{cases}$ 化为对称方程

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&1\\2&1&-2\end{vmatrix}=\{3,4,5\},$$

或
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\2&1&-2&-2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\&5&-4&-4\end{array}\right],$$

得 $A(0,0,1)$，$B(3,4,6)$ 是直线上的两点，从而 $\boldsymbol{S}=\overrightarrow{AB}=\{3,4,5\}$，这是求方向向量的两种常用方法.

题型四 求点、直线、平面间的关系

【例 7.18】 求经过直线 $L:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$，而且与点 $A(4,1,2)$ 的距离等于 3 的平面方程.

【解】 把 L 的方程改为交面式$\begin{cases}x+1=0,\\3y+2z+2=0,\end{cases}$ 则经过 L 的平面可用平面束方程表示为

$$\lambda(x+1)+\mu(3y+2z+2)=0,\text{即 }\lambda x+3\mu y+2\mu z+\lambda+2\mu=0.$$

由点到平面的距离公式(7.21)，有

$$d=\frac{|5\lambda+9\mu|}{\sqrt{\lambda^2+13\mu^2}}=3,$$

从而 $8\lambda^2+45\lambda\mu-18\mu^2=(\lambda+6\mu)(8\lambda-3\mu)=0$.

取 $\lambda=6,\mu=-1$ 得 $6x-3y-2z+4=0$;

取 $\lambda=3,\mu=8$ 得 $3x+24y+16z+19=0$.

【例 7.19】 证明 $L_1:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$，$L_2:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ 是异面直线，并求公垂线方程及公垂线的长.

【证明】 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{S}_1=\{1,2,3\}$，经过点 $P_1(0,0,0)$，L_2 的方向向量 $\boldsymbol{S}_2=\{1,1,1\}$，经过点 $P_2(1,-1,2)$. 由于

www.TopSage.com

$$(\overrightarrow{P_1P_2}, S_1, S_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

所以 L_1, L_2 是异面直线.

公垂线 L 的方向向量 S 与 S_1, S_2 都垂直,令

$$S = S_1 \times S_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{-1, 2, -1\},$$

那么,经过 L_1 并且与 S 平行的平面 Π_1 的方程为 $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$,整理得 $4x + y - 2z = 0$.

经过 L_2 并且与 S 平行的平面 Π_2 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{整理得} \quad x - z + 1 = 0.$$

而平面 Π_1 与 Π_2 的交线即是 L_1 与 L_2 的公垂线 L(7.13),故

$$L: \begin{cases} 4x + y - 2z = 0, \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$$

公垂线的长(7.12)为 $d = \dfrac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, S_1, S_2)|}{|S_1 \times S_2|} = \dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

题型五　求投影方程

【例 7.20】 求直线 $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程,并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

【解法一】 经过 L 作平面 Π_1 与 Π 垂直,则 Π_1 与 Π 的交线就是 L 在 Π 上的投影. L 的方向向量 $S = \{1, 1, -1\}$, Π 的法向量 $n = \{1, -1, 2\}$ 是平面 Π_1 上的两个不共线向量,点 $P_0(1, 0, 1)$ 是 L 上一定点. 设 $P(x, y, z)$ 是 Π_1 上任一点,则 $\overrightarrow{P_0P}, S, n$ 共面,即

$$\Pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{即 } x - 3y - 2z + 1 = 0,$$

所以 L 在 Π 上的投影是 $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - 3y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

评注 关于平面 Π_1 的求法还可用平面束方程、点法式、… 等方法,参看【例 7.15】. 关于投影直线用交面式往往方便,因此,对过一定直线且与一定平面垂直的平面方程应能熟练、简捷写出来.

【解法二】 设经过 L 垂直于平面 Π 的平面方程为 $\Pi_1: A(x-1) + By + C(z-1) = 0$.

由于 $L \in \Pi_1, \Pi \perp \Pi_1$,则 $\begin{cases} A + B - C = 0, \\ A - B + 2C = 0, \end{cases}$ $A: B: C = 1: -3: -2$.

从而 L_0 的方程为 $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - 3y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

www.TopSage.com

为求 L_0 绕 y 轴旋转的曲面方程，把 L_0 改写为参数式 L_0：$\begin{cases} x = 2t, \\ y = t, \\ z = -\dfrac{1}{2}(t-1). \end{cases}$

按(7.23)得旋转面的参数方程 $x = \sqrt{f^2 + g^2}\sin\theta$，$z = \sqrt{f^2 + g^2}\cos\theta$，$y = t$，所以

$$x^2 + z^2 = (2t)^2 + \frac{1}{4}(t-1)^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2.$$

即有旋转曲面的方程为：$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$.

评注 求旋转曲面所参数方程未曾注(经过同一纬线相等这一事实)往往是方便的.

题型六 求曲面方程

【例 7.21】 圆柱面的轴线是 L：$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$，点 $P_0(1,-1,0)$ 是圆柱面上一点，求圆柱面方程.

【解】 点 P_0 到轴 L 的距离 d 就是圆柱面的底面半径，在 L 上取一点 $P_1(0,1,-2)$，L 的方向向量 $\boldsymbol{S} = \{1,2,-2\}$，则用点到直线的距离公式(7.10)有

$$d = \frac{|\boldsymbol{S} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\boldsymbol{S}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

设 $P(x,y,z)$ 是柱面上任一点，则 P 到轴线 L 的距离为 d，即 $|\boldsymbol{S} \times \overrightarrow{P_1P}| = |\boldsymbol{S} \times \overrightarrow{P_1P_0}|$，而

$$\boldsymbol{S} \times \overrightarrow{P_1P} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ x & y-1 & z+2 \end{vmatrix} = \{2(z+2) + 2(y-1), -2x - z - 2, y - 1 - 2x\},$$

从而 $(2y + 2z + 2)^2 + (2x + z + 2)^2 + (2x - y + 1)^2 = 32$，即所求圆柱面的方程.

【例 7.22】 设 a,b,c 为非零常数，求以曲线 Γ：$\begin{cases} F(cx,cy) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线，母线平行于 $\boldsymbol{l} = (a,b,c)$ 的柱面 S 的方程.

【分析与求解】 1° 过 Γ 上 $\forall$ 点 $(x_0,y_0,0)$，以 $\boldsymbol{l} = (a,b,c)$ 为方向向量的直线方程是

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = tc,$$

$$\Rightarrow \quad cx_0 = cx - az, \quad cy_0 = cy - bz$$

$\Rightarrow$ 这些直线即柱面 S 上的点 (x,y,z) 满足

$$F(cx_0,cy_0) = F(cx - az, cy - bz) = 0.$$

即 S 上 $\forall$ 点 (x,y,z) 满足

$$F(cx - az, cy - bz) = 0.$$

2° 设 $\forall(x_0,y_0,z_0)$ 满足方程

$$F(cx_0 - az_0, cy_0 - bz_0) = 0,$$

要证 (x_0,y_0,z_0) 在柱面 S 上.

令 $\begin{cases} cx_0 - az_0 = cx^*, \\ cy_0 - bz_0 = cy^* \end{cases}$ $\Rightarrow (x^*,y^*,0)$ 在准线 Γ 上 $\Rightarrow (x_0,y_0,z_0)$ 在直线 $\begin{cases} cx - az = cx^*, \\ cy - bz = cy^* \end{cases}$ 上. 该直线

www.TopSage.com

的方向向量

$$\boldsymbol{l}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ c & 0 & -a\\ 0 & c & -b\end{vmatrix}=c(a,b,c),$$

$\Rightarrow(x_0,y_0,z_0)$ 在柱面 S 上.

因此,柱面 S 的方程是 $F(cx-az,cy-bz)=0$.

题 型 训 练

1. 已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是单位向量,夹角是 $\frac{\pi}{3}$,求向量 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $-3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

2. 若 $\boldsymbol{\alpha}\ /\!/\ \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}=\{6,3,-2\}$,而 $|\boldsymbol{\beta}|=14$,求 $\boldsymbol{\beta}$.

3. 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是单位向量且满足 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=0$,求以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为边的平行四边形的面积.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 不共线,证明 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$.

5. 把直线 L 的方程 $\begin{cases}x+2y+3z+4=0,\\ 5x+6y+7z+8=0\end{cases}$ 化为对称方程.

6. 直线 $L_1:x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$, $L_2:x+1=y-1=z$,(Ⅰ)若 $L_1\perp L_2$,求 λ;(Ⅱ)若 L_1 与 L_2 相交,求 λ.

7. 设平面 Π 经过平面 $\Pi_1:3x-4y+6=0$ 与 $\Pi_2:2y+z-11=0$ 的交线,且和 Π_1 垂直,求 Π 的方程.

8. 已知平面 $\Pi:x-4y+2z+9=0$,直线 $L:\begin{cases}2x-2y+z+9=0,\\ x-2y+2z+11=0,\end{cases}$ 试求在平面 Π 内,经过 L 与 Π 的交点且与 L 垂直的直线方程.

9. 求点 $M_1(1,2,3)$ 到直线 $L:\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 的距离.

10. 求点 $M_1(2,1,3)$ 到平面 $\Pi:2x-2y+z-3=0$ 的距离与投影.

11. 求直线 $L:\frac{x-2}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转面的方程.

12. 求以曲线 $\Gamma:\begin{cases}y^2=2px,\\ z=0\end{cases}$ 为准线,$\{l,m,n\}$ 为母线方向的柱面方程.

13. 求曲线 $\begin{cases}(x+2)^2-z^2=4,\\ (x-2)^2+y^2=4\end{cases}$ 在 yOz 平面上的投影方程.

www.TopSage.com

第八章　多元函数微分学

内容概要与重难点提示

本章内容是多元函数(主要是二元函数)的偏导数、全微分等概念,计算它们的各种方法以及其应用.

研究二元函数的主要方法之一是将它转化为一元函数.当自变量限制于 x 轴或 y 轴上变化时,二元函数就转化为一元函数,这时相应的一元函数的导数分别为二元函数对 x 与对 y 的偏导数.若研究 (x,y) 沿任意方向、任意路径趋于某点 (x_0,y_0) 时二元函数的性质,就要考虑二元函数的可微性.因此,多元函数微分学中的主要概念是:偏导数、可微性、全微分,还要了解全微分存在的必要条件及充分条件.

求二元函数的偏导数,本质上就是求一元函数的导数.计算上重点是复合函数的求导法,这时复合函数的情形要比一元函数复杂,它有二元函数与一元函数的复合,二元与二元函数的复合,以及二元与三元函数的复合等.我们要掌握它们的共同规律,熟练地用于求多元复合函数及隐函数的一阶与二阶偏导数或全微分.

多元函数微分学的一个重要应用是多元函数的最值问题,包括简单极值问题与条件极值问题.都是通过求驻点来解最值问题的,不同的是,前者求的是目标函数的驻点,而后者求的是辅助函数(拉格朗日乘子)的驻点.

当自变量限制于某直线上变化时,二(三)元函数也转化为一元函数,这时相应的一元函数的导数就是方向导数.多元函数微分学的另一重要概念是方向导数及与其相应的梯度向量.用复合函数微分法可以导出方向导数的计算公式,求方向导数归结为求偏导数(或梯度向量)及方向余弦.

多元函数微分学的几何应用在于空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面与法线的概念,并会求它们的方程,其关键前者是求切向量,后者是求法向量.

考核知识要点讲解

一、多元函数的概念、极限与连续性

(一)多元函数的概念

▶1. 二元函数的定义

【定义 8.1】 设 D 是平面上的一个点集,如果对每个点 $P(x,y)\in D$,按照某一对应规则 f,变量 z 都有一个确定的值与之对应,则称 z 是变量 x,y 的**二元函数**,记作 $z=f(x,y)$(或 $z=f(P)$).D 称为该函数的**定义域**,数集 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的**值域**.

▶2. 二元函数的几何意义

空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形,通常它是一张曲面.

曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $z=C$ 的交线在 Oxy 平面上的投影曲线:$f(x,y)=C$ 称为 $z=f(x,y)$ 的**等高线**.

www.TopSage.com

▶3. 一元函数与多元函数的联系与区别

(1) 一元函数是二元函数的特殊情形：让一自变量变动，另一自变量固定，或让(x,y)沿某曲线变动，二元函数就转化为一元函数.

(2) 一元函数中，自变量x代表直线上的点，只有两个变动方向，而二元函数中，自变量(x,y)代表平面上的点，它有无数个变动方向.

(3) 一元函数$z=f(x)(a<x<b)$，也可看成二元函数，其定义域是：$a<x<b,-\infty<y<+\infty$.

(二) 二元函数的极限

▶1. 二元函数极限定义

【定义 8.2】 设函数$f(x,y)$在开区域或闭区域D有定义，$M_0(x_0,y_0)$是D的内点或边界点，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\exists \text{ 正数 } \delta,\text{使得当 } (x,y)\in D,\text{且} 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \text{ 时有}$$

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

【注】 ① 这里的极限过程是点(x,y)在D内沿任何路径以任何方式趋于点(x_0,y_0).

② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$也可写成$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

极限与无穷小的关系：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \Leftrightarrow f(x,y)=A+\alpha(x,y) \quad ((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

其中$\alpha(x,y)=o(1)$是无穷小($(x,y)\to(x_0,y_0)$时)，即$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha(x,y)=0$.

▶2. 二元函数与一元函数有相同的极限运算法则与极限性质

求二元函数的极限常用的方法：直接用极限运算法则，或通过适当放大缩小法，变量替换法转化为求简单的极限或一元函数的极限.

▶3. 二元函数$z=f(x,y)$极限的不存在问题

证明$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在的方法：当$(x,y)$沿不同的路径趋于$(x_0,y_0)$时$f(x,y)$趋于不同的值或$(x,y)$沿某路径趋于$(x_0,y_0)$时$f(x,y)$的极限不存在，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在.

【例 8.1】 求下列极限：

(Ⅰ) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}(a\neq 0)$；　　(Ⅱ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$.

【解】 (Ⅰ) $I=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x^2}{xy(x+y)}}$，而

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\xlongequal{t=xy}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e,\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x^2}{xy(x+y)}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{1}{y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}=\frac{1}{a},$$

因此，$I=e^{\frac{1}{a}}$.

(Ⅱ) 由$x^4+y^2\geqslant 2x^2|y| \Rightarrow 0\leqslant\dfrac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+y^2}\leqslant\dfrac{x^2|y|^{3/2}}{2x^2|y|}=\dfrac{1}{2}|y|^{\frac{1}{2}}$.

而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{2}|y|^{\frac{1}{2}}=0$，因此原极限为0.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

【例 8.2】 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

【分析】 先考察(x,y)沿不同的直线趋于$(0,0)$时$f(x,y)$的极限.若不同,则得证;若相同,再考察(x,y)沿其他特殊的路径——曲线趋于$(0,0)$时$f(x,y)$的极限.

【证明】 令$y=kx$((x,y)沿不同的直线趋于$(0,0)$),则

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+k^2)x^2}{[1+k^2+(1-k)^2]x^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}.$$

它随k而变,如$k=0$时该极限为$\dfrac{1}{2}$,$k=1$时该极限为1.因此该极限不存在.

(三) 二元函数的连续性

▶1. 二元函数连续性定义

【定义 8.3】 设$z=f(x,y)$定义在区域D上,$P_0(x_0,y_0)\in D$是D内一点或其边界点.若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,则称$f(x,y)$在点$P_0$连续;若$f(x,y)$在$D$上每一点连续,则称$f(x,y)$在$D$连续.

▶2. 二元初等函数在其定义区域上连续

二元函数$z=f(x,y)$,若它是x的初等函数及y的初等函数经过有限次四则运算或复合运算而得的函数,称它为二元初等函数.类似地可定义多元初等函数.

多元初等函数在它的定义区域上是连续的.

▶3. 判断二元函数连续性与一元函数有相同的方法

▶4. 二元连续函数的性质 与一元函数类似,二元连续函数$z=f(x,y)$也有相应的性质:

【定理 8.1】 设$z=f(x,y)$在$M_0(x_0,y_0)$连续,$f(x_0,y_0)>0(<0)$,则$\exists\delta>0$,当$(x,y)\in U(M_0,\delta)=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$且$(x,y)\in D$时,$f(x,y)>0(<0)$.

【定理 8.2】(最大值最小值定理) 设$z=f(x,y)$在有界闭区域D上连续,则它在D上一定有最大值和最小值,即$\exists M_1,M_2\in D$,使得$\forall M\in D$,有

$$f(M_2)\leqslant f(M)\leqslant f(M_1),$$

其中,$f(M_1)$为$f(x,y)$在D上的最大值,$f(M_2)$为$f(x,y)$在D上的最小值.

【定理 8.3】(中间值定理) 设$z=f(x,y)$在区域D上连续,$\forall M_1,M_2\in D$,$f(M_1)<f(M_2)$,则对任意的实数μ,$f(M_1)<\mu<f(M_2)$,在D中至少存在一点M_0,使得$f(M_0)=\mu$.

二、多元函数的偏导数与全微分

(一) 偏导数的概念与计算

▶1. 偏导数的定义

【定义 8.4】 设有二元函数$z=f(x,y)$,若存在

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}\right),$$

称它为$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处对x(对y)的**偏导数**,记为$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$或$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$,

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$,$z'_x|_{(x_0,y_0)}\left(\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\right.$,$\left.\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\right.$,$\left.z'_y|_{(x_0,y_0)}\right)$.

www.TopSage.com

按定义有

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

▶2. **偏导数的几何意义** $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ 即曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率；$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ 即曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 M_0 处的切线对 y 轴的斜率.

▶3. **偏导数的计算**

(1) 求偏导数,归结为求一元函数的导数.

(2) 求 $f(x,y)=\begin{cases}g(x,y), & (x,y)\neq(x_0,y_0),\\ A, & (x,y)=(x_0,y_0)\end{cases}$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数的方法：

方法 1° 按定义：

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x,y_0)-A}{\Delta x};$$

类似地求 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$.

方法 2° 在连续的条件下求偏导数的极限：

当 $x\in U_0(x_0,\delta)$ 时，$f(x,y)$ 在 (x,y_0) 存在偏导数 $\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}$，$f(x,y_0)$ 对 x 在 $x=x_0$ 连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}=B$，则 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=B$. 对 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ 有类似结论.

【例 8.3】 求下列函数在指定点处的偏导数：

(Ⅰ) 设 $f(x,y)=x^2+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{y}{x}}$，求 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}$；

(Ⅱ) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 求 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

【解】 (Ⅰ) 只求 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}$，先令 $y=1$ 再对 x 求导，得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1)\Big|_{x=2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)\Big|_{x=2}=4.$$

(Ⅱ) 按定义

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\ln(\Delta x^2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\Delta x\ln(\Delta x^2)]=0.$$

类似可求 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$ (或由 x,y 的对称性得).

(二) 可微性,全微分及其几何意义

▶1. **可微性与全微分的定义**

【定义 8.5】 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可表为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)(\rho\to 0),$$

www.TopSage.com

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，仅与 x_0,y_0 有关，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ **可微**，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的**全微分**，记作 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$，$\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)}$ 等．

当 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 可微时，

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

其中规定自变量 x 与 y 的微分 $\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=\Delta y$．

▶2. 全微分的几何意义

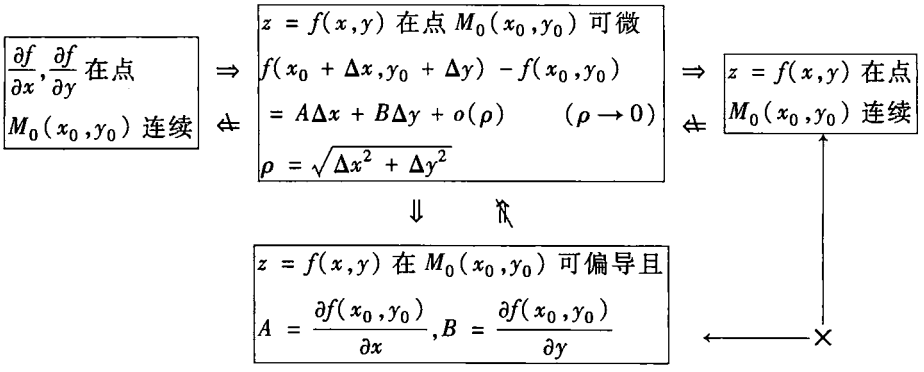
$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分在几何上表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处切平面上点的竖坐标的增量．

（三）偏导数的连续性、函数可微性、可偏导性与函数连续性之间的关系

若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处存在 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$，则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) **可偏导**．

偏导数的连续性、函数可微性、可偏导性与函数连续性之间的关系如下：

【定理 8.4】



（四）高阶偏导数、混合偏导数与求导次序无关问题

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y$，它们在 D 内都是 x,y 的函数．如果这两函数的偏导数也存在，则称它们是 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**．

按对自变量求导次序的不同，有下列 4 个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y),$$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为混合偏导数．

类似可定义三阶，四阶以及 n 阶偏导数．对不同变量求导的高阶偏导数称为**混合偏导数**．

【定理 8.5】 若函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 都在点 (x_0,y_0) 处连续，则

www.TopSage.com

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

【注】 对于其他高阶混合偏导数，也有类似【定理 8.5】的结论.

【例 8.4】 设 $u = e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\frac{1}{\pi}\right)$ 的值为_____.

【分析一】 $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\sin\frac{x}{y} + \left(e^{-x}\cos\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} = e^{-x}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - \sin\frac{x}{y}\right)$ （对 x 求导时 y 为常量）.

将上式对 y 求导，得（对 y 求导时 x 为常量） $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = e^{-x}\left[-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) - \cos\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$.

把 $x = 2, y = \frac{1}{\pi}$ 代入上式，得 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)} = e^{-2}(-\pi^2\cos 2\pi + 2\pi^3\sin 2\pi + 2\pi^2\cos 2\pi) = \left(\frac{\pi}{e}\right)^2$.

【分析二】 $\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{-x}\cos\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$,

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)} = \frac{d}{dx}(-\pi^2 x e^{-x}\cos\pi x)\Big|_{x=2} \quad \left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)} = \left.\frac{d}{dx}\left(\left.\frac{\partial u\left(x,\frac{1}{\pi}\right)}{\partial y}\right|_{x=2}\right)\right)$$

$$= -\pi^2[e^{-x}(1-x)\cos\pi x - x e^{-x}\pi\sin\pi x]\Big|_{x=2} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^2.$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^2.$$

评注 ① 多元初等函数的偏导数仍是初等函数.

② 在【例 8.4】中 $u = e^{-x}\sin\frac{x}{y}$ 是二元初等函数，则它的混合偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 在定义域上均为二元初等函数，因而连续，故有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

【例 8.5】 求下列函数在指定点处的二阶偏导数：

（Ⅰ） $z = \arctan\frac{x-y}{1-xy}$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}$；（Ⅱ） $z = \ln(1+x^2+y)$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

【解】 （Ⅰ）按定义

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = \frac{d^2}{dx^2}z(x,0)\Big|_{x=0} = \left.\frac{d^2}{dx^2}(\arctan x)\right|_{x=0} = \left.\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right|_{x=0} = \left.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}$$

$$= 0.$$

【注】 若利用 $z = \arctan x$ 为奇函数 $\Rightarrow$ $\frac{d^2}{dx^2}\arctan x$ 为奇函数 $\Rightarrow$ $\left.\frac{d^2}{dx^2}\arctan x\right|_{x=0} = 0$.

（Ⅱ） $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y}$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)} = \left.\frac{d}{dy}\left[\frac{\partial z(1,y)}{\partial x}\right]\right|_{y=1} = \left.\frac{d}{dy}\left(\frac{2}{2+y}\right)\right|_{y=1} = \left.2\frac{-1}{(2+y)^2}\right|_{y=1} = -\frac{2}{9}$.

评注 如果只求 $z = f(x,y)$ 在某点 (x_0,y_0) 的偏导数，可不必先求出该函数在任意点 (x,y) 的偏导数，然后代入 $x = x_0$ 与 $y = y_0$. 而是先代入 $x = x_0$ 或 $y = y_0$，然后求一元函数的导数会更简单些. 如：

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}, \quad \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = \frac{d^2}{dy^2}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0},$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y} = \frac{d}{dy}\left[\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0}\right]\Bigg|_{y=y_0}.$$

www.TopSage.com

（五）多元函数为常数的条件

1. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上满足 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$ $(\forall (x,y)\in D)$，则 $f(x,y)$ 在区域 D 为常数.

2. 设 $z=f(x,y)$ 定义在全平面上.

若 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，则 $f(x,y)=\varphi(y)$；若 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$，则 $f(x,y)=\psi(x)$；

其中 $\varphi(y),\psi(x)$ 均为任意的一元函数.

三、多元函数微分法则

（一）全微分四则运算法则

设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在 (x,y) 可微，则

$$d(u\pm v)=du\pm dv;\qquad d(cu)=cdu,c\text{ 为常数};$$

$$d(uv)=vdu+udv;\qquad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(vdu-udv)\quad (v\neq 0).$$

对 n 元函数有类似结论 $(n>2)$.

（二）多元复合函数的微分法则

由于多元复合函数的情形是多种的，所以复合函数求导法则的形式也多种多样.

▶1. 多元函数与一元函数的复合

【定理 8.6】 设 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 在 t 可导，$u=f(x,y,z)$ 在对应点 $(x,y,z)=(x(t),y(t),z(t))$ 处可微，则复合函数 $u=f(x(t),y(t),z(t))$ 在 t 可导，且

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

这里也把 $\frac{du}{dt}$ 称为**全导数**.

▶2. 多元函数与多元函数的复合

【定理 8.7】 设 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处有对 x,y 的偏导数，$z=f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 处可微，则 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 处有对 x,y 的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

一阶全微分形式不变性：设 $z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 都是可微函数，则 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 处的全微分仍可表为 $dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$.（无论 u 及 v 是自变量还是中间变量该式都成立.）

类似地，设 $z=f(u,v,w),u=u(x,y),v=v(x,y),w=w(x,y)$，则它们的复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y),w(x,y))$ 在点 (x,y) 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

设 $z=f(u,v,w)$，为了方便，我们常用 f_1' 表示 $f(u,v,w)$ 对第一个变量 u 的偏导数，类似有 $f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}$，$f_3'=\frac{\partial f}{\partial w}$，$f''_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$，$f''_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$，$f''_{23}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}$ 等等.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

【例 8.6】 设 $z = f(u,v,x)$，$u = \varphi(x,y)$，$v = \psi(y)$ 都是可微函数，求复合函数 $z = f(\varphi(x,y), \psi(y), x)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 由复合函数求导法可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_2' \frac{\partial \psi}{\partial x} + f_3' = f_1' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_3',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f_2' \psi'(y). \tag{8.1}$$

这里省略了 f, φ, ψ 满足的条件，后面的例中也常有这种情形.

评注 在该题的情况下，记号 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 的含意是不清楚的. $f(u,v,x)$ 作为 u,v,x 的三元函数求 $\dfrac{\partial f(u,v,x)}{\partial x}$，与 $f(\varphi(x,y), \psi(y), x)$ 作为 x,y 的二元函数求 $\dfrac{\partial f(\varphi(x,y), \psi(y), x)}{\partial x}$ 的含意是不同的. 因此，这里或避免使用记号 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 或要加以说明.

若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 表示 $f(u,v,x)$ 对 x 的偏导数，则该例中 $z = f(\varphi(x,y), \psi(y), x)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 也可表为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\psi'(y).$$

应用复合函数求导法则应注意以下几点：

① 尽管复合函数求导法则有各种形式，但它们的共同点是：

复合函数对指定自变量的偏导数

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \begin{array}{l} \text{函数对第 } i \text{ 个中间变量的偏导数与该中} \\ \text{间变量对指定自变量的偏导数的乘积} \end{array} \right\}, \text{其中 } m \text{ 是中间变量的个数.}$$

原则上函数有几个中间变量，偏导数公式中就有几项的和；函数有几重复合，偏导数公式每项中就有几个因子的乘积. 要分清中间变量与自变量，一定要注意对哪个自变量求导，对中间变量求导不要漏项. 有时公式中右端项的项数比中间变量个数少，那是因为有的中间变量与求偏导数的自变量无关，从而导数为零. 如【例 8.6】中的(8.1)式，其中的中间变量 x 与 y 无关. 有时一个变量既是自变量又是中间变量，如【例 8.6】的 x，这时中间变量 x 对自变量 x 的导数为 1.

② 复合函数求导公式中，函数对中间变量的偏导数仍然是中间变量的函数，如设 $z = f(u,v), u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$. (8.2)

这里 $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}$ 均是 u,v 的函数，而 $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$，它们的复合仍是 x,y 的函数，求高阶偏导数时要特别注意这一点. 求 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial x}(f)$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 与 f 的地位是相同的. 理解这一点，对求复合函数的二阶偏导数特别重要.

(三) 复合函数的二阶偏导数

【例 8.7】 设 $z = f(u,v), u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，求复合函数 $z = f(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】 将(8.2)式再对 x 求导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \tag{8.3}$$

www.TopSage.com

这里对(8.2)式用求导的四则运算法则,应用乘法求导公式时注意不要漏项.

求$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$时必须再用复合函数求导法则,注意对中间变量求导不要漏项.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

将它们代入(8.3)式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

用类似方法可求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$与$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

四、复合函数求导法的应用——隐函数微分法

(一)由方程式确定的隐函数求导法

【定理8.8】(隐函数存在定理) 设$F(x,y)$在点(x_0,y_0)某邻域有连续的偏导数,且$F(x_0,y_0)=0$,$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$,则方程

$$F(x,y)=0 \tag{8.4}$$

在点(x_0,y_0)某邻域恒能唯一确定一个连续函数$y=y(x)$,它满足$y_0=y(x_0)$,并有连续的导数,且

$$y'=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{8.5}$$

在(x_0,y_0)邻域将方程(8.4)对x求导,得(注意$y=y(x)$)

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,\quad \text{解出 } y' \text{ 就得(8.5).}$$

【定理8.9】(隐函数存在定理) 设有三元方程$F(x,y,z)=0$,其中$F(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)某邻域有连续偏导数,且$F(x_0,y_0,z_0)=0$,$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则此方程在点(x_0,y_0,z_0)某邻域恒能唯一确定一个连续函数$z=z(x,y)$,它满足$z_0=z(x_0,y_0)$,并有连续的偏导数,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\quad\left(\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\quad\left(\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0\right). \tag{8.6}$$

由$F(x,y,z(x,y))=0$及复合函数求导法得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

分别解出$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$,就得(8.6).

我们也可用一阶全微分形式不变性,对方程两边求全微分得

$$\mathrm{d}F(x,y,z)=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z=0,$$

即

$$\mathrm{d}z=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\Big/\frac{\partial F}{\partial z},\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0\right).$$

若F对x,y,z有连续的二阶偏导数,还可求$z=z(x,y)$的二阶偏导数.必须注意:上面的$\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$仍然是$x,y,z$的函数,而$z$又是$x,y$的函数.下面求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

www.TopSage.com

方法 1° 将 $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边对 x 求偏导数.

先改写成 $F_1'+F_3'\frac{\partial z}{\partial x}=0$,两边对 x 求偏导数得

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_1')+\frac{\partial}{\partial x}(F_3')\frac{\partial z}{\partial x}+F_3'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

即
$$F''_{11}+F''_{13}\frac{\partial z}{\partial x}+\left(F''_{31}+F''_{33}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+F_3'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

移项,得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\left[F''_{11}+2F''_{13}\frac{\partial z}{\partial x}+F''_{33}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]/F_3'.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的表达式代入得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=[2F''_{13}F_1'F_3'-F''_{11}(F_3')^2-F''_{33}(F_1')^2]/(F_3')^3, \tag{8.7}$$

或
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3. \tag{8.8}$$

方法 2° 将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的表达式对 x 求偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_1'}{F_3'}\right)=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}(F_1')F_3'-F_1'\frac{\partial}{\partial x}(F_3')}{(F_3')^2}$$

$$=-\left[\left(F''_{11}+F''_{13}\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_3'-F_1'\left(F''_{31}+F''_{33}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]/(F_3')^2,$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}=-F_1'/F_3'$ 代入,同样可得(8.7)或(8.8).

(二) 由方程组确定的隐函数求导法

▶1. 设有 3 个变量 2 个方程构成的方程组

$$\begin{cases}F(x,u,v)=0,\\ G(x,u,v)=0,\end{cases} \tag{8.9}$$

其中 F,G 有连续偏导数. 若在区间 I 上存在函数组 $u=u(x),v=v(x)$ 满足该方程组,则说此方程组确定了隐函数 $u=u(x),v=v(x)$. 若它们可导,则由 $F(x,u(x),v(x))=0$, $G(x,u(x),v(x))=0$ 及复合函数求导法则可得

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0,\\ \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

这可看成是以 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 为未知数的二元一次方程组,设

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u}&\frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u}&\frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,$$

解得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}. \tag{8.10}$$

www.TopSage.com

【定理 8.10】(隐函数存在定理)　设 $F(x,u,v)$, $G(x,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,u_0,v_0)$ 某邻域有连续偏导数且 $F(x_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,u_0,v_0)=0$, $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0$, 则方程组(8.9)在 P_0 点某邻域恒能唯一确定连续函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$, 它满足 $u(x_0)=u_0$, $v(x_0)=v_0$, 并有连续导数且(8.10)成立.

▶2. 类似地, 设有 4 个变量 2 个方程构成的方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \tag{8.11}$$

确定隐函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 其中 F,G 有连续的偏导数. 若 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 可偏导, 则由 $F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0$, $G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0$ 及复合函数求导法, 将方程组两边分别对 x,y 求偏导数, 然后分别求解 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 或 $\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 的二元一次方程组, 设

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则可求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}, & \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}, & \frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

【定理 8.11】(隐函数存在定理)　设 $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 某邻域有连续偏导数, 且 $F(P_0)=G(P_0)=0$, $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0$, 则方程组(8.11)在 P_0 点某邻域恒能唯一确定连续函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 它满足 $u(x_0,y_0)=u_0$, $v(x_0,y_0)=v_0$, 并有连续偏导数且(8.12)成立.

【例 8.8】　设 $u=f(x,y,z,t)$ 关于各变量均有连续偏导数, 而其中由方程组

$$\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0, \\ te^z+z\sin t=0 \end{cases} \tag{①}$$

确定 z,t 为 y 的函数, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

【解】　注意 $z=z(y)$, $t=t(y)$, 于是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}. \end{cases} \tag{②}$$

因此, 我们还要求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$, 将方程组 ① 两边对 y 求导得

$$\begin{cases} 2y+z+y\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-t^2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-2zt\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=0, \\ te^z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+e^z\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\sin t\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (y-t^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-2zt\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=-(2y+z),\quad (te^z+\sin t)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+(e^z+z\cos t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=0.$$

记系数行列式为 $W=(y-t^2)(e^z+z\cos t)+2zt(te^z+\sin t)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\begin{vmatrix} -(2y+z) & -2zt \\ 0 & e^z+z\cos t \end{vmatrix}\Big/W=\frac{-(2y+z)(e^z+z\cos t)}{W},$$

www.TopSage.com

$$\frac{dt}{dy}=\begin{vmatrix} y-t^2 & -(2y+z) \\ te^z+\sin t & 0 \end{vmatrix}\Big/W=\frac{(2y+z)(te^z+\sin t)}{W},$$

代入②得 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{2y+z}{W}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(te^z+\sin t)-\frac{\partial f}{\partial z}(e^z+z\cos t)\right].$$

五、复合函数求导法则的其他应用

(一) 变量替换下方程的变形

多元函数的复合函数求导法则的重要应用在于:作变量替换时,求函数在新变量下的偏导数,有时通过变量替换可将某些偏微分方程(未知函数及其偏导数所满足的方程)化简.

【例 8.9】 设 $u=u(x,y)$ 有二阶连续偏导数,证明在极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 下有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

【证明】 利用复合函数求导公式,有

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},\qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

再对 $\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 及 $\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 用复合函数求导法及(*)式可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=(-r\sin\theta)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(r\cos\theta)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

于是 $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},\quad 即\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

【注】 在极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 下,拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\quad 化成\quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0.$$

(二) 多元函数问题转化为一元函数问题

多元函数问题常常转化为一元函数问题,通过复合函数求导法把一元函数的导数与多元函数的偏导数联系起来.

如求二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的二阶泰勒公式时,把二元函数的增量 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 看成一元函数 $\Phi(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$ 的增量 $\Phi(1)-\Phi(0)$. 由一元函数的二阶泰勒公式:

$$\Phi(1)=\Phi(0)+\Phi'(0)+\frac{1}{2!}\Phi''(0)+\frac{1}{3!}\Phi^{(3)}(\theta)\quad (0<\theta<1),$$

通过复合函数求导法求出 $\Phi'(0)$, $\Phi''(0)$, $\Phi^{(3)}(\theta)$,即得二元函数的二阶泰勒公式:

【定理 8.12】 设 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(M_0)$ 有直到3阶连续偏导数,$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(M_0)$ 为任一点,则有二阶泰勒公式

www.TopSage.com

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0,y_0)+R_2$$

$$=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+R_2,$$

其中 $R_2=\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$ $(0<\theta<1)$ 称为**拉格朗日余项**,

$R_2=o(\rho^2)$ $(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0)$ 称为**皮亚诺余项**.

这里 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0,y_0)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\Delta x^k\Delta y^{n-k}$.

六、多元函数的极值问题

(一) 多元函数极值及驻点的定义

【定义 8.6】 若 $\exists M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(M_0,\delta)$,使得

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)\quad (f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)),\forall (x,y)\in U(M_0,\delta),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 有**极大值(极小值)** $f(x_0,y_0)$. 极大值与极小值统称为**极值**. M_0 为 $f(x,y)$ 的**极值点**.

【定义 8.7】 凡是能使 $f'_x(x,y)=0, f'_y(x,y)=0$ 同时成立的点 (x,y) 称为 $z=f(x,y)$ 的**驻点**.

(二) 多元函数取得极值的充分条件与必要条件

▶1. 多元函数取得极值的必要条件

【定理 8.13】 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数,且在点 (x_0,y_0) 处取极值,则它在该点的偏导数必然为零,即 $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$.

【注】 具有偏导数的极值点必然是驻点,但驻点不一定是极值点.

▶2. 多元函数取得极值的充分条件

【定理 8.14】 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域有连续的二阶偏导数,又 $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$,令 $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)=C$,则

(1) $AC-B^2>0$ 时,$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取极值,且当 $A>0$ 时取极小值,$A<0$ 时取极大值;

(2) $AC-B^2<0$ 时,(x_0,y_0) 不是 $f(x,y)$ 的极值点;

(3) $AC-B^2=0$ 时,则不能确定 (x_0,y_0) 是否是 $f(x,y)$ 的极值点,还需另作讨论.

【注】 若 $z=f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数,则可按如下方法求它的极值点:

第一步,解方程组 $f'_x(x,y)=0, f'_y(x,y)=0$ 求得所有驻点;

第二步,对每个驻点求出二阶偏导数值

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0);$$

第三步,定出 $AC-B^2$ 的符号,按【定理 8.14】的结论判定 $f(x_0,y_0)$ 是否取极值,是极大值还是极小值.

【例 8.10】 设函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$,证明:函数 z 有无穷多个极大值点,而无极小值点.

www.TopSage.com

【证明】 (Ⅰ)先计算$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=e^y(\cos x-1-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^y(\cos x-2-y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x.$$

(Ⅱ)求出所有的驻点.由$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^y(\cos x-1-y)=0,\end{cases}$

解得$(x,y)=(2n\pi,0)$ 或 $(x,y)=((2n+1)\pi,-2)$, 其中$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(Ⅲ)判断所有驻点是否是极值点,是极大值点还是极小值点.

在$(2n\pi,0)$处,由于$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=(-2)\times(-1)-0=2>0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2<0$,

则$(2n\pi,0)$是极大值点.

在$((2n+1)\pi,-2)$处,由于$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=(1+e^{-2})(-e^{-2})=-\frac{e^2+1}{e^4}<0$,

则$((2n+1)\pi,-2)$不是极值点.因此函数z有无穷多极大值点$(2n\pi,0)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,而无极小值点.

七、多元函数的最大值与最小值问题

(一)极值问题的提法

▶1. 简单极值问题(或普通极值问题)

求二元函数$z=f(x,y)$在Oxy平面上某区域D上的最大值或最小值.

求三元函数$u=f(x,y,z)$在$Oxyz$空间中某区域Ω上的最大值或最小值.

▶2. 条件极值问题

求二元函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的最大值或最小值问题.

求三元函数$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0$下或条件$\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$下的最大值或最小值问题.

(二)求二元函数或三元函数的简单极值问题

▶1. 设$z=f(x,y)$在平面有界闭区域D上连续,则$f(x,y)$在D存在最大值M和最小值m,且它们或在D的边界点上达到,或在D内满足$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0$的点(即$f(x,y)$的驻点)处达到,或在偏导数不存在的点处达到.

【注】 对三元函数有类似结论.

▶2. 设$z=f(x,y)$在开区域D内可偏导,又根据实际问题可知,它在D内有最大值或最小值.于是,我们只须在满足$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0$的点中找到$f(x,y)$的最大值点或最小值点.

【注】 在实际问题中,函数z的条件最大值与最小值是否存在,通常可以根据实际问题本身的背景加以确定,这与一元函数的情况类似.

www.TopSage.com

【例 8.11】 求函数 $z = x^2y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$，x 轴和 y 轴所围成的区域 D 上的最大值与最小值.

【解】 区域 D 如图 8.1 所示，它是有界闭区域. $z(x,y)$ 在 D 上连续，所以在 D 上一定有最大值与最小值，它或在 D 内的驻点达到，或在 D 的边界上达到.

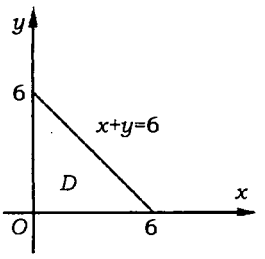


图 8.1

为求 D 内驻点，先求

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy(4 - x - y) - x^2y = xy(8 - 3x - 2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(4 - x - y) - x^2y = x^2(4 - x - 2y).$$

再解方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ x + 2y = 4, \end{cases}$ 得 $z(x,y)$ 在 D 内的唯一驻点 $(x,y) = (2,1)$ 且 $z(2,1) = 4$.

在 D 的边界 $y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 6$ 或 $x = 0, 0 \leqslant y \leqslant 6$ 上 $z(x,y) = 0$，在边界 $x + y = 6$ $(0 \leqslant x \leqslant 6)$ 上将 $y = 6 - x$ 代入得 $z(x,y) = x^2(6 - x)(-2) = 2(x^3 - 6x^2), 0 \leqslant x \leqslant 6.$

令 $h(x) = 2(x^3 - 6x^2)$，则 $h'(x) = 6(x^2 - 4x)$，$h'(4) = 0$，$h(0) = 0$，$h(4) = -64$，$h(6) = 0$，即 $z(x,y)$ 在边界 $x + y = 6$ $(0 \leqslant x \leqslant 6)$ 上的最大值为 0，最小值为 -64. 因此，$\max\limits_{D} z(x,y) = 4$，$\min\limits_{D} z(x,y) = -64$.

（三）求二元函数或三元函数的条件极值问题

▶1. 求函数 $z = f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的最大值或最小值

若从条件 $\varphi(x,y) = 0$ 中可解出 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$，再代入 $z = f(x,y)$，则可化为简单极值问题.

拉格朗日乘数法：先构造辅助函数 $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$，然后求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

所有满足此方程组的解 (x,y,λ) 中的 (x,y) 是 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的可能的极值点，由可能的极值点中求得最大值点或最小值点.

【注】 这个方法可推广到求三元函数 $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z) = 0$ 下或条件 $\varphi(x,y,z) = 0, \psi(x,y,z) = 0$ 下的最大值或最小值.

▶2. 用拉格朗日乘数法求函数 $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z) = 0, \psi(x,y,z) = 0$ 下的最大值或最小值

先构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$，然后求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x,y,z) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = \psi(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

www.TopSage.com

所有满足此方程组的解(x,y,z,λ,μ)中的(x,y,z)是$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0$与$\psi(x,y,z)=0$下的可能的极值点.由可能的极值点中求得最大值点或最小值点.

【例 8.12】 已知平面曲线$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ $(C>0,AC-B^2>0)$为中心在原点的椭圆,求它的面积.

【分析】 只需求椭圆的半长轴a与半短轴b,它们分别是椭圆上的点到中心(原点)的距离的最大值与最小值.因此,归结为求解条件极值问题.

【解】 椭圆上点(x,y)到原点的距离平方为$d^2=x^2+y^2$,条件为$Ax^2+2Bxy+Cy^2-1=0$.

令$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1)$,解方程组

$$\begin{cases} F'_x=(2-2A\lambda)x-2B\lambda y=0, & ① \\ F'_y=-2B\lambda x+(2-2C\lambda)y=0, & ② \\ F'_\lambda=-(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1)=0, & ③ \end{cases}$$

将①式乘x,②式乘y,然后两式相加得

$$[(1-A\lambda)x^2-B\lambda xy]+[-B\lambda xy+(1-C\lambda)y^2]=0,$$

即
$$x^2+y^2=\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2)=\lambda,$$

于是可得$d=\sqrt{\lambda}$.

从直观知道,函数d^2的条件最大值点与最小值点是存在的,其坐标不同时为零,即联立方程组$F'_x=0,F'_y=0$有非零解,其系数行列式应为零,即

$$\begin{vmatrix} 1-A\lambda & -B\lambda \\ -B\lambda & 1-C\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \text{亦即} \quad \lambda^2-\frac{A+C}{AC-B^2}\lambda+\frac{1}{AC-B^2}=0.$$

该方程一定有两个根λ_1,λ_2,它们分别对应d^2的最大值与最小值.因此,椭圆的面积为

$$S=\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

八、方向导数与梯度

(一) 方向导数

平面上过点$M_0(x_0,y_0)$以$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$为方向向量的直线$L$的参数方程:

$$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta.$$

$z=f(x,y)$限制在直线L上(见图 8.2)变化时就变成了一元函数

$$\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta).$$

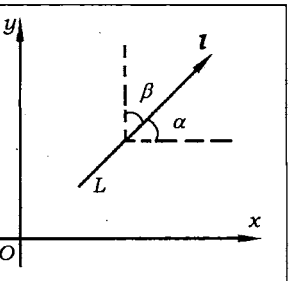


图 8.2

【定义 8.8】 若存在极限

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t},$$

称它为$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$沿方向$\boldsymbol{l}$的**方向导数**,记为$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$或$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$.

(二) 方向导数的计算公式

【定理 8.15】 设$z=f(x,y)$在$M_0(x_0,y_0)$处可微,则$f(x,y)$在M_0点沿任意方向$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,$

www.TopSage.com

$\cos\beta$) 存在方向导数且$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta$.

在平面上 l 除了用方向角表示外也可用极角表示：$l=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta$ 是 l 的极角，$\theta\in[0,2\pi)$，此时相应的方向导数的计算公式是$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\theta$.

【定理 8.16】 设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 $f(x,y,z)$ 在 M_0 点沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 存在方向导数且有

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

（三）梯度向量与方向导数的最大值

$z=f(x,y)$ 在点 M_0 的方向导数计算公式可改写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}&=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)\\&=\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)\cdot l=|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)|\cos\langle\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0),l\rangle,\end{aligned}$$

这里向量 $\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)=\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 的**梯度（向量）**.

$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$ 随 l 而变化，当 $l=\dfrac{\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)}{|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)|}$ 即沿梯度方向时，方向导数取最大值 $|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)|$.

【例 8.13】 求函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数.

【解】 先求$\overrightarrow{AB}$的方向余弦：$\overrightarrow{AB}=(3-1,-2-0,2-1)=(2,-2,1)$，

$$l=\overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{3}(2,-2,1).$$

再求
$$\begin{aligned}\mathbf{grad}u|_{(1,0,1)}&=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,0,1)}\\&=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left(1,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)\Big|_{(1,0,1)}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,0,1)}&=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,0,1)}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,0,1)}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,0,1)}\cos\gamma\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

九、多元函数微分学的几何应用

（一）空间曲面的切平面与法线

▶1. 用隐式方程表示的曲面

若空间曲面 S 的方程为 $F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上的一点，则 S 在 M_0 点的切平面方程为

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

www.TopSage.com

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial x}}=\dfrac{y-y_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial y}}=\dfrac{z-z_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial z}}$,

其中 $F(x,y,z)$ 在 M_0 点处有连续偏导数且 $\left[\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial x}\right]^2+\left[\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial y}\right]^2+\left[\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial z}\right]^2\neq 0$.

这里 S 在 M_0 点处的法向量是 $\mathbf{grad}F(M_0)=\left(\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial x},\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial y},\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial z}\right)$.

▶2. 用显式方程表示的曲面

若空间曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$,$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上的一点,$z_0=f(x_0,y_0)$,则 S 在 M_0 的切平面方程为 $z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$,其中 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有连续偏导数. 这里 S 在 M_0 的法向量为 $\pm(-f'_x(x_0,y_0),-f'_y(x_0,y_0),1)$.

单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\pm(-f'_x(x_0,y_0),-f'_y(x_0,y_0),1)}{\sqrt{1+f'^2_x(x_0,y_0)+f'^2_y(x_0,y_0)}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

这里 α,β,γ 分别是法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x,y,z 轴正向的夹角,$\boldsymbol{n}$ 的表达式中正负号的选取取决于 γ 是锐角还是钝角,即法向量是朝上还是朝下.

【例 8.14】 设有曲面 $S:\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$,平面 $\Pi:2x+2y+z+5=0$.

(Ⅰ)在曲面 S 上求平行于平面 Π 的切平面方程;(Ⅱ)求曲面 S 与平面 Π 之间的最短距离.

【解】 (Ⅰ)先写出曲面 S 上任意点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程.

记 S 的方程为 $F(x,y,z)=0$,$F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}-1$,则 S 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$,

其中 $F'_x(M_0)=x_0$,$F'_y(M_0)=2y_0$,$F'_z(M_0)=\dfrac{1}{2}z_0$.

该切平面与平面 Π 平行 $\Leftrightarrow$ 它们的法向量共线即成比例 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}z_0}{1}=\lambda$,且

$$2x_0+2y_0+z_0+5\neq 0.$$

因为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在 S 上,所以它满足方程

$$\frac{1}{2}x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2=\frac{1}{2}(2\lambda)^2+\lambda^2+\frac{1}{4}(2\lambda)^2=1,$$

即 $4\lambda^2=1$,$\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$. 于是,$(x_0,y_0,z_0)=\pm\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$. 显然,$(x_0,y_0,z_0)$ 不在平面 Π 上.

相应的切平面方程是

$$(x-1)+\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(z-1)=0,\qquad -(x+1)-\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(z+1)=0,$$

即 $x+y+\dfrac{1}{2}z-2=0$, $x+y+\dfrac{1}{2}z+2=0$.

这就是曲面 S 上平行于平面 Π 的切平面方程.

(Ⅱ)椭球面 S 是夹在上述两个切平面之间,故曲面 S 上切点到平面 Π 的距离最短或最长

$$d_1=\frac{\left|2\times 1+2\times\frac{1}{2}+1+5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=3,\quad d_2=\frac{\left|2\times(-1)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1+5\right|}{3}=\frac{1}{3}.$$

www.TopSage.com

因此,曲面 S 到平面 Π 的最短距离为 $d_2 = \frac{1}{3}$.

(二) 空间曲线的切线与法平面

▶1. 用参数方程表示的空间曲线

若空间曲线 Γ 的参数方程为 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,又 $M_0(x_0,y_0,z_0) = (x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 是 Γ 上的一点,则 Γ 在点 M_0 的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程为 $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$,其中 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $t = t_0$ 可导且 $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) \neq 0$,$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ 为 Γ 在点 M_0 的切向量.

▶2. 作为两曲面交线的空间曲线

若空间曲线 Γ 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$ M_0 是 Γ 上的一点,则 Γ 在点 M_0 的切线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \dfrac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0, \\ \dfrac{\partial G(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial G(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \dfrac{\partial G(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

或

$$\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}},$$

法平面方程为 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}(y - y_0) + \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}(z - z_0) = 0$.

其中 $F(x,y,z), G(x,y,z)$ 在 M_0 均有连续的偏导数且 $\mathbf{grad}F(M_0) \times \mathbf{grad}G(M_0) \neq \mathbf{0}$. 这里 Γ 在 M_0 的切向量是

$$\mathbf{grad}F(M_0) \times \mathbf{grad}G(M_0) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial F(M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial F(M_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial F(M_0)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G(M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial G(M_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial G(M_0)}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0} \right).$$

【例 8.15】 在曲线 $\begin{cases} x = t, \\ y = -t^2, \\ z = t^3 \end{cases}$ 的所有切线中,与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线

(A) 只有一条. (B) 只有两条.

(C) 至少有三条. (D) 不存在.

【分析】 $\forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$,该曲线在点 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0)) = (t_0, -t_0^2, t_0^3)$ 的切线方程为

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}, \text{即 } \frac{x - t_0}{1} = \frac{y + t_0^2}{-2t_0} = \frac{z - t_0^3}{3t_0^2}.$$

该切线与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的充要条件是,切线的方向向量 $(1, -2t_0, 3t_0^2)$ 与平面的法向量 $(1,2,1)$ 垂直,即 $(1, -2t_0, 3t_0^2) \cdot (1,2,1) = 1 - 4t_0 + 3t_0^2 = (3t_0 - 1)(t_0 - 1) = 0$,则 $t_0 = \frac{1}{3}$ 或 $t_0 = 1$,且

www.TopSage.com

M_0 不在该平面上．因此选(B)．

【例 8.16】 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+z^2=10,\\ y^2+z^2=10\end{cases}$ 在点 $M_0(1,1,3)$ 处的切线与法平面方程．

【分析】 关键是求切线的方向向量．这里没给出曲线的参数方程，而是给出曲面的交线方程，曲面的交线的切线与它们的法向均垂直，由此可求出切线的方向向量 $\boldsymbol{l}$．

【解】 这两个曲面在点 M_0 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(2x,0,2z)\big|_{(1,1,3)}=2(1,0,3)$，$\boldsymbol{n}_2=(0,2y,2z)\big|_{(1,1,3)}=2(0,1,3)$．切线的方向向量与它们均垂直，即有

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

可取方向向量 $\boldsymbol{l}=(3,3,-1)$，因此切线方程为 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$．

法平面方程为 $3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0$，即 $3x+3y-z-3=0$．

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 有关多元函数偏导数与全微分概念的问题

▶1. 已知二元函数的偏导数求二元函数

【例 8.17】 设 $z(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy}, & ①\\ z(1,y)=\sin y, & ②\end{cases}$$

求 $z(x,y)$．

【分析】 实质上这是一元函数的积分问题．当 y 任意给定时，求 $z(x,y)$ 就是 x 的一元函数的积分问题，但求积分后还含有 y 的任意函数，要由 $z(1,y)$ 定出这个任意函数．

【解】 把 y 看作任意给定的常数，将等式 ① 两边对 x 求积分得

$$z(x,y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 为待定函数．由 ② 式得 $-\sin y-\dfrac{1}{y}\ln|1-y|+\varphi(y)=\sin y$，故

$$\varphi(y)=2\sin y+\frac{1}{y}\ln|1-y|.$$

因此，$$z(x,y)=(2-x)\sin y+\frac{1}{y}\ln\left|\frac{1-y}{1-xy}\right|.$$

▶2. 二元分段函数在分界点处的可微性与偏导数的连续性等问题的讨论

【例 8.18】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处

(A) 连续，偏导数存在．　(B) 连续，偏导数不存在．

(C) 不连续，偏导数存在．　(D) 不连续，偏导数不存在．

【分析】 这是讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否连续，是否可偏导．先讨论容易的，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是

www.TopSage.com

否可偏导. 由于 $f(x,0)=0\ (\forall x\in(-\infty,+\infty))$,则 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$. 同理,$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$. 因此(B),(D)被排除.

再考察 $f(x,y)$ 在(0,0)的连续性. 令 $y=x^3$,则 $\lim\limits_{\substack{y=x^3\\x\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3\cdot x^3}{x^6+(x^3)^2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$,因此 $f(x,y)$ 在点(0,0)不连续. 故应选(C).

【例 8.19】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ (Ⅰ)求 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$;(Ⅱ)讨论 $f(x,y)$ 在(0,0)处的可微性,若可微并求 $\mathrm{d}f|_{(0,0)}$.

【分析与求解】 (Ⅰ)当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^2}{x^2+y^2}-\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

当 $(x,y)=(0,0)$ 时,因 $f(x,0)=0(\forall x)$,于是 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$.

由对称性得当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时 $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x^2y}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$.

(Ⅱ)**方法 1°** 考察 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在(0,0)的连续性. 注意

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant1,\quad\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant1,\text{于是}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant4|x|,\quad\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant4|y|.$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}=0=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)},\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}=0=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)},$$

即 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点(0,0)处均连续,因此 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微. 于是

$$\mathrm{d}f|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\mathrm{d}y=0.$$

方法 2° 因为 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$,考察 $f(x,y)$ 在(0,0)是否可微,就是考察下式是否成立

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\Delta y+o(\rho)\quad(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to0),$$

即 $\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}=o(\rho)$ $(\rho\to0)$,亦即当 $\rho\to0$ 时 $\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}$ 是否是无穷小量.

因为 $\left|\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}\right|=\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\cdot\frac{|\Delta y|}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{1/2}}\cdot|\Delta y|\leqslant|\Delta y|$, 所以当 $\rho\to0$ 时 $\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}$ 是无穷小量,因此,$f(x,y)$ 在点(0,0)处可微,且 $\mathrm{d}f|_{(0,0)}=0$.

题型二 求二元(三元)各类函数的偏导数与全微分

▶1. 求二元(三元)初等函数的偏导数与全微分

【例 8.20】 设 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$, 求 $\mathrm{d}z$ 与 $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$.

【解】 由一阶全微分形式不变性及全微分四则运算法则得

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\mathrm{d}(x^2+y^2)+(x^2+y^2)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}})$$

www.TopSage.com

$$= e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[2xdx + 2ydy - (x^2 + y^2)\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2}\right]$$

$$= e^{-\arctan\frac{y}{x}}(2xdx + 2ydy - xdy + ydx) = e^{-\arctan\frac{y}{x}}[(2x + y)dx + (2y - x)dy],$$

由 dz 的表达式得 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\arctan\frac{y}{x}}(2x + y)$.

对 y 求导得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}(2x + y)\right] = e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{y^2 - x^2 - xy}{x^2 + y^2}$.

▶2. 求带抽象函数记号的复合函数的偏导数

【例 8.21】 设 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x + y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【解】 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$. 由于 $f(xy)$ 是一元函数 $f(u)$ 与二元函数 $u = xy$ 的复合，u 是中间变量，$\varphi(x + y)$ 是一元函数 $\varphi(v)$ 与二元函数 $v = x + y$ 的复合，v 是中间变量. 注意，这里 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$，先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 方便，由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f'(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) + \varphi(x + y) + y\varphi'(x + y)\frac{\partial}{\partial y}(x + y)$$

$$= f'(xy) + \varphi(x + y) + y\varphi'(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = yf''(xy) + \varphi'(x + y) + y\varphi''(x + y).$$

评注 ① 若先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{1}{x}f'(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy) + y\varphi'(x + y)\frac{\partial}{\partial x}(x + y)$$

$$= -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{y}{x}f'(xy) + y\varphi'(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{x^2}f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x}f'(xy) + \frac{y}{x}f''(xy)x + \varphi'(x + y) + y\varphi''(x + y)$$

$$= yf''(xy) + \varphi'(x + y) + y\varphi''(x + y).$$

这说明对混合偏导数，不同的求导次序可能影响计算的繁简.

② 前面已经指出 $f'[\varphi(x)] = f'(u)\big|_{u=\varphi(x)}$，这里我们正是用这个记号：

$$f'(xy) = f'(u)\big|_{u=xy},\quad f''(xy) = f''(u)\big|_{u=xy}.$$

在定义中 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 与 $f'_x(x,y)$ 是同一记号，故此 $f'_x(xy)$ 可理解为 $\frac{\partial f(xy)}{\partial x}$，因此不可写成

$$\frac{\partial}{\partial x}f(xy) = f'_x(xy).$$

【例 8.22】 设 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$，求 du 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.

【解】 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ 是 $u = f(s,t)$ 与 $s = \frac{x}{y}, t = \frac{y}{z}$ 复合而成的 x, y, z 的三元函数. 先求 du（从而也就求得 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$）或先求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 也就可求得 du，然后再由 $\frac{\partial u}{\partial y}$（或 $\frac{\partial u}{\partial z}$）求 $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)$. 由一阶全微分形式的不变性及全微分的四则运算法则，得

www.TopSage.com

$$du = f_1'\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) + f_2'\mathrm{d}\left(\frac{y}{z}\right) = f_1'\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} + f_2'\frac{z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z}{z^2}$$

$$= \frac{1}{y}f_1'\mathrm{d}x + \left(-\frac{x}{y^2}f_1' + \frac{1}{z}f_2'\right)\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}f_2'\mathrm{d}z,$$



大家网 TopSage.com

进而 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}f_1' + \dfrac{1}{z}f_2'$,

因此 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{x}{y^2}f_{12}''\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{y}{z}\right) - \dfrac{1}{z^2}f_2' + \dfrac{1}{z}f_{22}''\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{y}{z}\right) = \dfrac{x}{yz^2}f_{12}'' - \dfrac{y}{z^3}f_{22}'' - \dfrac{1}{z^2}f_2'$.

评注 ① f_1' 与 f_2' 中第一个变量是 $\dfrac{x}{y}$ 均与 z 无关，求 $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ 时 f_{11}'' 与 f_{21}'' 前的系数均为 0，此项不出现，因此求 $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ 与求 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ 的繁简程度是差不多的.

② 我们也可根据全微分的基本公式及复合函数求导法求出，即

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$= f_1'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}x + \left[f_1'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + f_2'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}\right)\right]\mathrm{d}y + f_2'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{y}f_1'\mathrm{d}x + \left(-\frac{x}{y^2}f_1' + \frac{1}{z}f_2'\right)\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}f_2'\mathrm{d}z.$$

▶3. 求由方程式确定的隐函数的偏导数或全微分

【例 8.23】 设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $xy + x + y - z = \mathrm{e}^z$ 所确定的二元函数，求 $\mathrm{d}z$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【分析与求解】 将方程两边求全微分后求出 $\mathrm{d}z$，由 $\mathrm{d}z$ 可求得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 再将 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 分别对 x，y 求导求得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. 将方程两边同时求全微分，由一阶全微分形式不变性及全微分的四则运算法则，得

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \mathrm{d}x + \mathrm{d}y - \mathrm{d}z = \mathrm{e}^z\mathrm{d}z,$$

解出 $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{\mathrm{e}^z + 1}[(y+1)\mathrm{d}x + (x+1)\mathrm{d}y]$.

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y+1}{\mathrm{e}^z + 1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^z + 1}$.

再将 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 对 x 求导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+1}{\mathrm{e}^z + 1}\right) = -\frac{y+1}{(\mathrm{e}^z + 1)^2}\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x},$$

代入 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{(y+1)^2}{(\mathrm{e}^z + 1)^3}\mathrm{e}^z$.

最后求出

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y+1}{\mathrm{e}^z + 1}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^z + 1} - \frac{y+1}{(\mathrm{e}^z + 1)^2}\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^z + 1} - \frac{(x+1)(y+1)}{(\mathrm{e}^z + 1)^3}\mathrm{e}^z = \frac{(\mathrm{e}^z + 1)^2 - (x+1)(y+1)\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z + 1)^3}.$$

▶4. 求带抽象函数记号的方程式确定的隐函数的偏导数或全微分

【例 8.24】 设由方程 $\varphi(bz - cy, cx - az, ay - bx) = 0$ (*)

确定隐函数 $z = z(x,y)$，其中 φ 对所有变量有连续偏导数，a，b，c 为非零常数，且 $b\varphi_1' - a\varphi_2' \neq 0$，求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}$

www.TopSage.com

$+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【分析与求解一】 将方程(*)看成关于 x,y 的恒等式,两边分别对 x,y 求偏导数得

$$\varphi_1'\cdot b\frac{\partial z}{\partial x}+\varphi_2'\cdot\left(c-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\varphi_3'\cdot(-b)=0, \tag{1}$$

$$\varphi_1'\cdot\left(b\frac{\partial z}{\partial y}-c\right)+\varphi_2'\cdot\left(-a\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\varphi_3'\cdot a=0, \tag{2}$$

由 ① $\times a$ + ② $\times b$,可得

$$b\varphi_1'\cdot\left(a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}\right)-a\varphi_2'\cdot\left(a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=(b\varphi_1'-a\varphi_2')c.$$

因此 $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

评注 用复合函数求导法求解时,容易以下错误:

$$\frac{\partial(bz-cy)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial(cx-az)}{\partial x}=c,$$

因为这里 z 不是自变量,它是 x,y 的函数,正确的结果应该是:

$$\frac{\partial(bz-cy)}{\partial x}=b\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial(cx-az)}{\partial x}=c-a\frac{\partial z}{\partial x}.$$

【分析与求解二】 由一阶全微分形式不变性,对方程(*)求全微分得

$$\varphi_1'\cdot(b\mathrm{d}z-c\mathrm{d}y)+\varphi_2'\cdot(c\mathrm{d}x-a\mathrm{d}z)+\varphi_3'\cdot(a\mathrm{d}y-b\mathrm{d}x)=0,$$

即 $$(b\varphi_1'-a\varphi_2')\mathrm{d}z=(b\varphi_3'-c\varphi_2')\mathrm{d}x+(c\varphi_1'-a\varphi_3')\mathrm{d}y. \tag{3}$$

于是 $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{b\varphi_1'-a\varphi_2'}[a(b\varphi_3'-c\varphi_2')+b(c\varphi_1'-a\varphi_3')]=c.$$

【分析与求解三】 将 $\varphi(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$ 记为 $G(x,y,z)=0$,代公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial x}\Big/\frac{\partial G}{\partial z}=-\frac{c\varphi_2'-b\varphi_3'}{b\varphi_1'-a\varphi_2'}=\frac{b\varphi_3'-c\varphi_2'}{b\varphi_1'-a\varphi_2'}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial G}{\partial y}\Big/\frac{\partial G}{\partial z}=-\frac{-c\varphi_1'+a\varphi_3'}{b\varphi_1'-a\varphi_2'}=\frac{c\varphi_1'-a\varphi_3'}{b\varphi_1'-a\varphi_2'}. \tag{5}$$

$$\Rightarrow\quad a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a(b\varphi_3'-c\varphi_2')+b(c\varphi_1'-a\varphi_3')}{b\varphi_1'-a\varphi_2'}=c.$$

评注 若题目改为求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\mathrm{d}z$,用【解法二】是方便的.由③式可求得 $\mathrm{d}z$,并由 $\mathrm{d}z$ 表达式中 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 的系数分别求得 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.也可用【解法三】,由④,⑤式分别求得 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$,然后再求得

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

或用【解法一】,由①,②式分别求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$,然后再求 $\mathrm{d}z$.

▶5. 求由方程组确定的隐函数的偏导数

【例 8.25】 设 $\begin{cases}u=f(x-ut,y-ut,z-ut),\\ g(x,y,z)=0,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

【解法一】 这里有变量 x,y,z,u,t 的两个方程,所以确定两个因变量,三个自变量.按题意,u 是因变量,x,y 是自变量,t 与 z 中哪个是自变量呢?由第二个方程来看,z 应是因变量.因此我们确定 x,y,t 为自变量,u,z 为因变量.于是将方程组对 x 求偏导数得

www.TopSage.com

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(1-t\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-f_2'\dfrac{\partial u}{\partial x}t+f_3'\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial x}t\right),\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}[1+t(f_1'+f_2'+f_3')]=f_1'+f_3'\dfrac{\partial z}{\partial x},\\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\partial g}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial g}{\partial z}.\end{cases}$$

解得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1'\dfrac{\partial g}{\partial z}-f_3'\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}[1+t(f_1'+f_2'+f_3')]}.$$

将方程组对 y 求偏导数同样可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{f_2'\dfrac{\partial g}{\partial z}-f_3'\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}[1+t(f_1'+f_2'+f_3')]}$.

【解法二】 利用一阶全微分形式不变性,分别对两个方程求全微分得

$$\begin{aligned}du&=f_1'd(x-ut)+f_2'd(y-ut)+f_3'd(z-ut)\\&=f_1'(dx-udt-tdu)+f_2'(dy-udt-tdu)+f_3'(dz-udt-tdu),\end{aligned}$$

整理得 $$[1+t(f_1'+f_2'+f_3')]du=f_1'dx+f_2'dy+f_3'dz-u(f_1'+f_2'+f_3')dt. \qquad (*)$$

对题设中第二个方程求全微分得 $g_1'dx+g_2'dy+g_3'dz=0$,解得

$$dz=-\frac{1}{g_3'}(g_1'dx+g_2'dy).$$

将上式代入(*),得

$$[1+t(f_1'+f_2'+f_3')]du=\frac{1}{g_3'}[(f_1'g_3'-f_3'g_1')dx+(f_2'g_3'-f_3'g_2')dy]-u(f_1'+f_2'+f_3')dt,$$

因此 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1'g_3'-f_3'g_1'}{g_3'[1+t(f_1'+f_2'+f_3')]},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f_2'g_3'-f_3'g_2'}{g_3'[1+t(f_1'+f_2'+f_3')]}.$$

评注 隐函数偏导数的计算完全归结为复合函数求导法.计算时,首先要明确函数关系:哪些是自变量,哪些是因变量,一般说来,有几个方程就确定几个因变量,其余的都是自变量;至于哪些是因变量或自变量,这可由题目本身的分析确定.

题型三 变量替换下方程式的变形

【例 8.26】 设 $z=z(x,y)$ 有连续的二阶偏导数并满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \qquad ①$$

(Ⅰ)作变量替换 $u=3x+y$, $v=x+y$,以 u,v 作为新的自变量,变换上述方程;

(Ⅱ)求满足上述方程的 $z(x,y)$.

【分析与求解】 (Ⅰ)将 z 对 x,y 的偏导数转换为 z 对 u,v 的偏导数.由复合函数求导法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=3\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

这里 $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$ 仍是 u,v 的函数,而 u,v 又是 x,y 的函数,因而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 3+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot 3+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=9\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+6\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \qquad ②$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \qquad ③$$

www.TopSage.com

又 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\tag{④}$$

将 ②,③,④ 代入原方程 ① 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

即原方程 ① 变成 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. ⑤

(Ⅱ) 由题(Ⅰ),在变量替换 $u=3x+y, v=x+y$ 下,求解满足 ① 的 $z=z(x,y)$ 转化为求解满足 ⑤ 的 $z=z(u,v)$.

由 ⑤ 式 $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)=0$,对 v 积分得 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=f(u)$,其中 $f(u)$ 为任意的有连续导数的函数.

再对 u 积分得 $z=\varphi(u)+\psi(v)$,其中 φ,ψ 为任意的有连续的二阶导数的函数.

回到原变量得 $z=\varphi(3x+y)+\psi(x+y)$.

题型四 多元函数的最值问题

▶1. 简单最值问题

【例 8.27】 在半径为 R 的圆的一切内接三角形中,求出其面积最大者.

【解】 用 x,y,z 表示三角形各边所对的中心角,则三角形的面积 S 可用 x,y,z,R 表示为

$$S=\frac{1}{2}R^2\sin x+\frac{1}{2}R^2\sin y+\frac{1}{2}R^2\sin z,$$

其中 $z=2\pi-x-y$,将其代入得 $S=\dfrac{1}{2}R^2[\sin x+\sin y-\sin(x+y)]$,定义域是

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 2\pi\}.$$

现求 $S(x,y)$ 的驻点:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{1}{2}R^2[\cos x-\cos(x+y)],\quad \frac{\partial S}{\partial y}=\frac{1}{2}R^2[\cos y-\cos(x+y)].$$

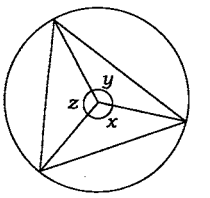


图 8.3

解 $\dfrac{\partial S}{\partial x}=0,\dfrac{\partial S}{\partial y}=0$,得唯一驻点:$(x,y)=\left(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{2}{3}\pi\right)$ 在 D 内部,又在 D 的边界上即 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $x+y=2\pi$ 时 $S(x,y)=0$. 因此,S 在 $\left(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{2}{3}\pi\right)$ 取最大值.

因 $x=y=\dfrac{2}{3}\pi$,则 $z=\dfrac{2}{3}\pi$,因此内接等边三角形面积最大.

▶2. 条件最值问题

【例 8.28】 在空间坐标系的原点处,有一单位正电荷,设另一单位负电荷在椭圆 $z=x^2+y^2, x+y+z=1$ 上移动,问两电荷间的引力何时最大,何时最小?

【分析】 当负点电荷在点 (x,y,z) 处时,两电荷间的引力大小为 $f(x,y,z)=\dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}$. 负点电荷又在椭圆上,于是问题化为求函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $x^2+y^2-z=0, x+y+z-1=0$ 下的最大值和最小值.

为简单起见,考虑函数 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,f 的最大值(或最小值) 就是 g 的最小值(或最大值)(差一倍数). 于是问题又化为求函数 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $x^2+y^2-z=0, x+y+z-1=$

www.TopSage.com

0 条件下的最大值和最小值.

【解】 用拉格朗日乘子法. 令

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1),$$

解方程组
$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \\ F'_\mu = x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

由前三个方程得 $x = y$,代入后两个方程得 $\begin{cases} z = 2x^2, \\ z = 1 - 2x. \end{cases}$ 解得 $x = y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $z = 2 \mp \sqrt{3}$. 记 $M_1\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right)$,可算得

$$g(M_1) = 9 - 5\sqrt{3}, \quad g(M_2) = 9 + 5\sqrt{3}.$$

从实际问题看,函数 g 的条件最大与最小值均存在,所以 g 在点 M_1, M_2 分别达到最小值和最大值,因而函数 f 在点 M_1, M_2 分别达到最大值和最小值,即两个点电荷间的引力当单位负电荷在点 M_1 处最大,在点 M_2 处最小.

题型五 求二元、三元函数的梯度与方向导数

【例 8.29】 曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 求函数 $u = \dfrac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

【分析与求解】 首先求出方向 $\boldsymbol{n}$ 及其方向余弦. 曲面 $F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6 = 0$,在 P 处的两个法向量是 $\pm\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_P = \pm(4x, 6y, 2z)\,|_P = \pm 2(2,3,1)$,点 P 位于第一卦限,椭球面在 P 处的外法向的坐标均为正值,故可取 $\boldsymbol{n} = (2,3,1)$. 它的方向余弦为

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{(2,3,1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

又
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P = \left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2 + 8y^2}}\right|_P = \frac{6}{\sqrt{14}}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P = \left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2 + 8y^2}}\right|_P = \frac{8}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P = \left.-\frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z^2}\right|_P = -\sqrt{14},$$

因此
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}_0}\right|_P = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{14}} \times \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \times \frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}} \times \sqrt{14}$$
$$= \frac{11}{7}.$$

【例 8.30】 设在 xOy 平面上,各点的温度 T 与点的位置间的关系为 $T = 4x^2 + 9y^2$,点 P_0 为 $(9,4)$,求:

(Ⅰ) $\mathbf{grad}T\,|_{P_0}$; (Ⅱ) 在点 P_0 处沿极角为 210° 的方向 $\boldsymbol{l}$ 的温度变化率;

(Ⅲ) 在什么方向上点 P_0 处的温度变化率取得:1° 最大值;2° 最小值;3° 零,并求此最大、小值.

【分析与求解】 (Ⅰ) 按梯度的定义

www.TopSage.com

$$\mathbf{grad}T\big|_{P_0}=\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{P_0}=(8x,18y)\big|_{P_0}=72(1,1).$$

大家网 TopSage.com

(Ⅱ) 求 P_0 点处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的温度变化率即求$\left.\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$. 按方向用极角表示时方向导数的计算公式得

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\mathbf{grad}T\big|_{P_0}\cdot(\cos\theta,\sin\theta)\big|_{\theta=210^\circ}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{P_0}\cos210^\circ+\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{P_0}\sin210^\circ$$

$$=72\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+72\left(-\frac{1}{2}\right)=-36(\sqrt{3}+1).$$

(Ⅲ) 温度 T 在 P_0 点的梯度方向就是点 P_0 处温度变化率$\left(\text{即}\left.\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}\right)$取最大值的方向,且最大值为

$$|\mathbf{grad}T|_{P_0}|=72\sqrt{2}.$$

温度 T 在 P_0 点的负梯度方向,即 $-\mathbf{grad}T\big|_{P_0}=-72(1,1)$ 就是点 P_0 处温度变化率取最小值方向,且最小值为 $-|\mathbf{grad}T|_{P_0}|=-72\sqrt{2}$.

与 P_0 处梯度垂直的方向即 $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$就是点 P_0 处温度变化率为零的方向. 因为

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=|\mathbf{grad}T|_{P_0}|\cos\langle\mathbf{grad}T|_{P_0},\boldsymbol{l}\rangle\xlongequal{\text{仅当 }\boldsymbol{l}\perp\mathbf{grad}T|_{P_0}}0.$$

题型六　多元函数微分学的几何应用

▶1. 求曲面的切平面与法线

【例 8.31】 设 $f'(u)\neq0,x_0^2+y_0^2\neq0$,则曲面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 上点 $P_0(x_0,y_0,z_0)(z_0=f(\sqrt{x_0^2+y_0^2}))$ 处的法线与 z 轴的关系是

(A) 平行.　(B) 异面直线.　(C) 垂直相交.　(D) 不垂直相交.

【分析】 曲面在点 P_0 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{P_0}=\frac{1}{r_0}(x_0f'(r_0),y_0f'(r_0),-r_0),$$

其中 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$. 因 $f'(r_0)\neq0,x_0$ 与 y_0 不同时为零 $\Rightarrow\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 不平行(即 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴不平行). 又

$$\boldsymbol{k}\cdot(\overrightarrow{OP_0}\times\boldsymbol{n})=\begin{vmatrix}0&0&1\\x_0&y_0&z_0\\x_0f'(r_0)&y_0f'(r_0)&-r_0\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ 法线与 z 轴相交. 又

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\neq0$$

$\Rightarrow$ 法线与 z 轴不垂直.

因此选(D).

【例 8.32】 设 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数,求曲面 $S:F\left(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x}\right)=0$ 上 $\forall$ 点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程,并证明切平面过定点.

【分析与求解】 记 $G(x,y,z)=F\left(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x}\right)$,曲面 S 的方程可写为 $G(x,y,z)=0$,则 S 上任一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

www.TopSage.com

$$\boldsymbol{n} = \left\{\frac{\partial G(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial G(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial G(M_0)}{\partial z}\right\},$$

其中 $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{z}F'_2 - \frac{y}{x^2}F'_3$, $\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{z}{y^2}F'_1 + \frac{1}{x}F'_3$, $\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{y}F'_1 - \frac{x}{z^2}F'_2$.

于是曲面 S 上点 M_0 处的切平面方程是

$$\frac{\partial G(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial G(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial G(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0,$$

即 $$\left[\frac{1}{z_0}F'_2(M_0) - \frac{y_0}{x_0^2}F'_3(M_0)\right](x - x_0) + \left[-\frac{z_0}{y_0^2}F'_1(M_0) + \frac{1}{x_0}F'_3(M_0)\right](y - y_0).$$

$$+\left[\frac{1}{y_0}F'_1(M_0) - \frac{x_0}{z_0^2}F'_2(M_0)\right](z - z_0) = 0.$$

上式左端中令 $x = y = z = 0$ 得

$$-\frac{x_0}{z_0}F'_2(M_0) + \frac{y_0}{x_0}F'_3(M_0) + \frac{z_0}{y_0}F'_1(M_0) - \frac{y_0}{x_0}F'_3(M_0) - \frac{z_0}{y_0}F'_1(M_0) + \frac{x_0}{z_0}F'_2(M_0) = 0,$$

即切平面通过定点$(0,0,0)$.

▶2. 求空间曲线的切线方程与法平面方程

【例 8.33】 证明曲线 $\Gamma: x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$ 与锥面 $S: x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线(即锥面上点(x,y,z) 与顶点的连线) 相交的角度相同,其中 a 为常数.

【分析】 先求 Γ 的切向量 $\boldsymbol{\tau} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ 以及锥面上点(x,y,z) 的母线方向,即它与锥的顶点$(0,0,0)$ 的连线方向 $\boldsymbol{l} = (x,y,z)$,最后考察 $\cos\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{l}\rangle$.

【证明】 曲线 Γ 的参数方程满足 $x^2 + y^2 = z^2$,于是 Γ 在锥面 S 上,Γ 上任一点(x,y,z) 处的母线方向 $\boldsymbol{l} = \{x,y,z\}$,切向量

$$\boldsymbol{\tau} = \{x',y',z'\} = \{ae^t(\cos t - \sin t), ae^t(\cos t + \sin t), ae^t\} = \{x - y, x + y, z\}.$$

因此 $$\cos\langle\boldsymbol{l},\boldsymbol{\tau}\rangle = \frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{\tau}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(x - y, x + y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2 + z^2}} = \frac{2z^2}{\sqrt{2}\sqrt{3}z^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

即曲线 Γ 与锥面 S 的各母线相交的角度相同.

题型七 有关多元函数的综合题

【例 8.34】 设 $f(u)(u > 0)$ 有连续的二阶导数且 $z = f(e^{x^2 - y^2})$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 16(x^2 + y^2)z$,求 $f(u)$.

【分析】 $z = f(e^{x^2 - y^2})$ 是 $z = f(u)$ 与 $u = e^{x^2 - y^2}$ 的复合函数,由复合函数求导法可导出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 与 $f'(u)$, $f''(u)$ 的关系式,从而由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 16(x^2 + y^2)z$ 导出 $f(u)$ 的微分方程式,然后解出 $f(u)$.

【解】 令 $u = e^{x^2 - y^2}$,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 2xuf'(u), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = -2yuf'(u),$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2 - y^2} = 2xu$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2ye^{x^2 - y^2} = -2yu$.

进而可得 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2u^2f''(u) + (2u + 4x^2u)f'(u),$$

www.TopSage.com

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2u^2f''(u) - (2u - 4y^2u)f'(u).$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2)u^2 f''(u) + 4(x^2 + y^2)uf'(u).$$

由题设条件,得 $u^2f''(u) + uf'(u) - 4f(u) = 0.$

这是欧拉方程,令 $u = e^t$,方程化为

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 4z = 0 \quad (z = f(u)),$$

解此二阶线性常系数齐次方程得

$z = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$,即 $z = f(u) = C_1u^2 + \frac{C_2}{u^2}$,其中 C_1, C_2 为 $\forall$ 常数.

题型训练

一、选择题

1. 下列函数在(0,0)处不连续的是

(A) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(B) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(C) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(D) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}\sin\frac{1}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. 在下列二元函数中,$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$ 的二元函数是

(A) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^{10}.$

(B) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2) + \cos xy.$

(C) $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(D) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. 设 $u(x,y)$ 在 M_0 取极大值,并 $\exists \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}$,则

(A) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \geqslant 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \geqslant 0.$ (B) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} < 0.$

(C) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \leqslant 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \leqslant 0.$ (D) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \leqslant 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \geqslant 0.$

4. 设 $f(x,y) = |x - y|\varphi(x,y)$,其中 $\varphi(x,y)$ 在(0,0)连续且 $\varphi(0,0) = 0$,则

www.TopSage.com

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ 不存在.

(B) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

(C) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ 存在，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

5. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域存在偏导数 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 且偏导数在 (x_0,y_0) 不连续，则下列结论中正确的是

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微且 $\mathrm{d}f\big|_{(x_0,y_0)} = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y$.

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不可微.

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿 $\forall$ 方向 $\exists$ 方向导数.

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线的方向向量是 $\left(0,1,\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$.

二、填空题

1. 设 $z = \int_0^{x^2y} f(t,\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$，其中 f 是二元连续函数，则 $\mathrm{d}z =$ _____.

2. 设 $z = z(x,y)$ 满足方程 $2z - \mathrm{e}^z + 2xy = 3$ 且 $z(1,2) = 0$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)} =$ _____.

3. 设 $z = yf(x^2 - y^2)$，其中 $f(u)$ 可微，则 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

4. 设 $f(x,y)$ 有连续偏导数，满足 $f(1,2) = 1$，$f'_x(1,2) = 2$，$f'_y(1,2) = 3$，$\Phi(x) = f(x,2f(x,2f(x,2x)))$，则 $\Phi'(1) =$ _____.

5. 设 $x = x(y,z)$，$y = y(z,x)$，$z = z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的隐函数，并且 $F(x,y,z)$ 满足隐函数存在定理的条件，则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

6. 函数 $z = 1 - (x^2 + 2y^2)$ 在点 $M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right)$ 处沿曲线 $C: x^2 + 2y^2 = 1$ 在该点的内法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为_____.

7. 过曲面 $z - \mathrm{e}^z + 2xy = 3$ 上点 $M_0(1,2,0)$ 处的切平面方程为_____.

8. 过曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于 $2x + 2y + z - 1 = 0$，则 P 点的坐标为_____.

9. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 在 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程为_____，法平面方程为_____.

三、计算题与证明题

1. 设 $z = f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$，$f(x,1) = 0$，$\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \sin x$，求 $f(x,y)$.

2. 设 $u = yf\left(\dfrac{x}{y}\right) + xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$，求 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

3. 设 $u = u(x,y)$ 由方程 $u = \varphi(u) + \int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}P(y) + \dfrac{\partial u}{\partial y}P(x)$，其中 $\varphi'(u) \neq 1$.

4. 设函数 $u(x,y)$ 有连续二阶偏导数，满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，又满足下列条件：$u(x,2x) = x$，$u'_x(x,2x) = x^2$（即 $u'_x(x,y)\big|_{y=2x} = x^2$），求 $u''_{xx}(x,2x)$，$u''_{xy}(x,2x)$，$u''_{yy}(x,2x)$.

www.TopSage.com

5. 设 $u = f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$，求 $\mathrm{d}u$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.

6. 若可微函数 $z = f(x,y)$ 在极坐标系下只是 θ 的函数，求证：$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (r \neq 0)$.

7. 作自变量与因变量变换：$u = x + y, v = x - y, w = xy - z$，变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

为 w 关于 u,v 的偏导数满足的方程，其中 z 对 x,y 有连续的二阶偏导数.

8. 设 $u = u(x,y), v = v(x,y)$ 有连续的一阶偏导数且满足条件：$F(u,v) = 0$，其中 F 有连续的偏导数且 $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 > 0$. 求证：$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$.

9. 设 $z = z(x,y)$ 满足 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$，

又 $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$，由 $z = z(x,y)$ 可解出 $y = y(z,x)$. 求：(Ⅰ) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；(Ⅱ) $y = y(z,x)$.

10. 设 $f(x,y) = 2(y - x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2$，

(Ⅰ) 求 $f(x,y)$ 的驻点；(Ⅱ) 求 $f(x,y)$ 的全部极值点，并指明是极大值点还是极小值点.

11. 求 $z = 2x + y$ 在区域 $D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1$ 上的最大值与最小值.

12. 造一容积为 V_0 的无盖长方体水池，问其长、宽、高为何值时有最小的表面积.

13. 已知三角形的周长为 $2p$，将它绕其一边旋转而构成一立体，求使立体体积最大的那个三角形.

14. 求函数 $u = xy + yz + zx$ 在 $M_0(2,1,3)$ 处沿与各坐标轴成等角方向的方向导数.

15. 求椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 = 0$ 上具有下列性质的点 (x,y,z) 的轨迹：过 (x,y,z) 的切平面与 Oxy 平面垂直.

16. 过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ 上点 $M(3,4,12)$ 分别作垂直于 x 轴与 y 轴的平面，求过这两平面与球面的截线的公共点的两截线的切线方程，并求通过这两条切线的平面方程.

17. 设 $a,b,c > 0$，在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的第一卦限部分求一点，使得该点处的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积最小.

18. 若函数 $f(x,y)$ 对任意正实数 t，满足

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y), \qquad (*)$$

称 $f(x,y)$ 为 **n 次齐次函数**. 设 $f(x,y)$ 是可微函数，证明：$f(x,y)$ 为 n 次齐次函数 $\Leftrightarrow$

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = n f(x,y). \qquad (**)$$

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

第九章　多元函数积分的概念、计算及其应用

内容概要与重难点提示

多元函数积分是一元函数积分的推广，更确切地说，是定积分的推广，这种推广包括重积分（含二重积分与三重积分）、曲线积分与曲面积分，而且曲线积分、曲面积分又都分为第一类与第二类．

从定义方式上讲，这些积分与定积分是相似的，都是某种和式的极限；而其计算也都要化成定积分，由此可见定积分是基础，学习重积分、曲线积分、曲面积分关键就是要掌握它们与定积分的关系，以及它们之间的相互关系．

本章的重点是掌握把计算各类多元函数积分转化为求定积分的有关公式及重积分的变量替换（包括极坐标变换，柱坐标变换与球坐标变换）．

在本章还要学会用多元函数积分求一些几何量（平面图形的面积，曲线的弧长，曲面的面积，空间区域的体积）与物理量（质量，质心，形心，转动惯量，引力，功及流量）．这些公式均可用微元法得到，最后还是归结为计算有关的多元函数的积分．

考核知识要点讲解

一、多元函数积分的概念与性质

（一）多元函数积分的定义

▶1. 二重积分

定义　平面上有界闭区域 D 上二元函数 $z=f(x,y)$ 的二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 $d=\max_i\{d_i\}$，d_i 为小区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径，$\Delta\sigma_i$ 的面积也记为 $\Delta\sigma_i$．

当二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在时，则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积．若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积，即存在二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$．

几何意义　当连续函数 $z=f(x,y)\geqslant 0$ 时，二重积分 I 表示以区域 D 为底，曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，侧面是以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面的曲顶柱体的体积．一般情形，

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=Oxy\text{ 平面上方的曲顶柱体体积}-Oxy\text{ 平面下方的曲顶柱体体积}.$$

▶2. 三重积分

定义　空间中有界闭区域 Ω 上三元函数 $W=f(x,y,z)$ 的三重积分

$$J=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i,$$

其中 $d=\max_i\{d_i\}$，d_i 是小区域 ΔV_i 的直径，ΔV_i 的体积也记为 ΔV_i．

www.TopSage.com

当三重积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$存在时，称$f(x,y,z)$在$\Omega$上可积．若$f(x,y,z)$在有界闭区域$\Omega$上连续，则三重积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$一定存在．

▶3. **第一类曲线积分**(对弧长的曲线积分)

定义 Oxy平面上分段光滑曲线L上函数$f(x,y)$的第一类曲线积分

$$\int_L f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

其中Δs_i表示各小段的弧长，$\lambda = \max_i\{\Delta s_i\}$．**第一类曲线积分**也称为对弧长的曲线积分，$f(x,y)$称作**被积函数**，$L$称作**积分弧段**．

若$f(x,y)$在分段光滑曲线L上连续，则存在曲线积分$\int_L f(x,y)\,ds$．

类似可定义$f(x,y,z)$在空间分段光滑曲线L上的第一类曲线积分

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

如果积分弧段L是封闭曲线，则相应的对弧长的曲线积分记作$\oint_L f(x,y)\,ds$(或$\oint_L f(x,y,z)\,ds$)．

▶4. **第二类曲线积分**(对坐标的曲线积分)

定义 $F = \{P(x,y),Q(x,y)\}$在定向分段光滑曲线L上的第二类曲线积分

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i],$$

其中λ仍是各小弧段长度的最大值，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y = y_i - y_{i-1}$，$(x_i,y_i)$是分点$M_i$的坐标，**第二类曲线积分**也称为对坐标的曲线积分，也记为$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$．

若$P(x,y)$，$Q(x,y)$在定向分段光滑曲线L上连续，则存在曲线积分$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$．

将第二类曲线积分推广到沿空间曲线的情形，即为

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i].\end{aligned}$$

▶5. **第一类曲面积分**(对面积的曲面积分)

定义 $f(x,y,z)$在分块光滑曲面Σ上的第一类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

其中λ是各小块曲面直径的最大值，ΔS_i也是小曲面块ΔS_i的面积，$f(x,y,z)$是**被积函数**，Σ是**积分曲面**．**第一类曲面积分**也称为对面积的曲面积分．

【注】 曲面是光滑的，即指曲面上各点有连续变动的切平面．若曲面Σ由$z = z(x,y)((x,y)\in D)$所确定，Σ是光滑的，即指$z(x,y)$在D上有连续的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$．分块光滑曲面即指由有限块光滑曲面所组成的曲面．如长方体的表面是分块光滑的．

▶6. **第二类曲面积分**(对坐标的曲面积分)

定义 $F = \{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$在有向分块光滑曲面$\Sigma$上的第二类曲面积分

www.TopSage.com

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\right],$$

其中$(\Delta S_i)_{yz},(\Delta S_i)_{zx},(\Delta S_i)_{xy}$分别表示小曲面块$\Delta S_i$到$Oyz,Ozx,Oxy$平面上的有向投影的面积.

同样地,λ是各小块曲面直径的最大值,$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$称为**被积函数**,$\Sigma$称为**积分曲面**,**第二类曲面积分**也称为对坐标的曲面积分.

【注】 ① 对双侧曲面,称取定法向量的曲面为有向曲面,而所选择的一侧通常是由法向的指向表示的.对封闭曲面常用外侧(法向量朝外)、内侧(法向量朝内)表示.对曲面$z=z(x,y)$用上侧(法向量与z轴夹角为锐角)、下侧(法向量与z轴夹角为钝角)表示.类似地,有曲面$x=x(y,z)$取前侧或后侧,曲面$y=y(z,x)$取左侧或右侧等.

② 曲面Σ的法向量$\boldsymbol{n}(M_i)=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$,若$\cos\gamma_i>0$,则$\Delta S_i$的投影面积$(\Delta S_i)_{xy}$取正值,若$\cos\gamma_i<0$,则$(\Delta S_i)_{xy}$取负值.其余类似.

③ 若被积函数在分段光滑闭曲面上连续,则存在曲面积分.

▶7. 几种多元函数积分的比较

比较上述各类积分的定义,可以看到它们的共同点是:每种积分都是对积分区域进行任意剖分后得到的相应的和式的极限.不论哪种积分和式中每一项都有两个乘积因子,其中一个均是被积函数在小区域上某点取值;都是用"区域"的直径的最大值趋于零来刻画无限细分;每个极限都有两个无关性(与分割无关,与点的取法无关).不同点是:不同类型的积分有不同类型的积分区域,这决定了乘积因子中另一因子是不同的(小区域的面积或体积;小曲线的长度或在坐标轴上的有向投影;小曲面的面积或在坐标平面上的有向投影的面积).

(二) 多元函数积分的性质

这里只叙述二重积分的性质.

设$f(x,y),g(x,y)$在有界区域D上可积,则

▶1. 线性性质 $\forall$ 常数λ,μ,有$\iint_D[\lambda f(x,y)\pm\mu g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \lambda\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \mu\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

▶2. 对区域的可加性质 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,

其中$D=D_1\cup D_2$,而且区域D_1与D_2没有重叠的部分.

▶3. 比较定理 若$f(x,y),g(x,y)$在D上连续且$f(x,y)\leqslant g(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地,若$m\leqslant f(x,y)\leqslant M$在$D$上成立,则$mA<\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma<MA$,其中$A$为$D$的面积.又有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

▶4. 积分中值定理 若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,则在D上存在一点(ξ,η),使

www.TopSage.com

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)A.$$

▶5. **连续非负函数的积分性质** 设 $f(x,y)$ 在 D 连续，非负，若 $D_0 \subset D$，则有

$$\iint_{D_0} f(x,y)\,d\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,d\sigma.$$

设 $f(x,y)$ 在 D 连续，非负，且 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = 0$，则 $f(x,y) \equiv 0$，$((x,y) \in D)$.

▶6. 设 $f(x,y)$ 在 D 连续，若在 D 内任意子区域 D_0，有 $\iint_{D_0} f(x,y)\,d\sigma = 0$，则

$$f(x,y) \equiv 0,\ ((x,y) \in D).$$

【注】 ① 各类多元函数积分都有与二重积分类似的线性性质与对区域的可加性质.

② 对三重积分与第一类曲线、曲面积分有类似二重积分的比较定理、积分中值定理及非负连续函数的积分性质等.

（三）两类曲线积分之间及两类曲面积分之间的关系

▶1. **两类曲线积分的关系**

设 $L_{\overset{\frown}{AB}}$ 为分段光滑曲线，两类曲线积分有如下关系：

$$\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} P\,dx + Q\,dy = \int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是曲线弧 $L_{\overset{\frown}{AB}}$ 沿从 A 到 B 方向的切线的方向余弦；P,Q 是 $L_{\overset{\frown}{AB}}$ 上连续函数. 推广到空间的情形，即为

$$\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

将上式写成向量的点积形式即为 $\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,ds$，其中，$\boldsymbol{F} = \{P,Q,R\}$，$d\boldsymbol{s} = \{dx,dy,dz\}$，$\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 $L_{\overset{\frown}{AB}}$ 上任意点 (x,y,z) 处指向曲线方向的单位切向量. 上述两个公式表明第二类曲线积分可以化为第一类曲线积分，这也可以说是第二类曲线积分的一个计算方法.

▶2. **两类曲面积分的关系**

设 Σ 为分块光滑曲面，则两类曲面积分有如下关系：

$$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处法向量的方向余弦；P,Q,R 在 Σ 上连续，将上式写成向量的点积的形式，即为

$$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS,$$

其中，$\boldsymbol{F} = \{P,Q,R\}$，$d\boldsymbol{S} = \{dydz,dzdx,dxdy\}$，$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

▶3. **第一、二类曲线(面)积分的比较**

(1) 第一、二类曲线积分的一个重要不同点是：第一类曲线积分与曲线的定向无关，而第二类曲线积分与曲线定向有关. 若 L^+ 与 L^- 是平面上同一条分段光滑曲线，但它们的定向不同，则

$$\int_{L^+} P\,dx + Q\,dy = -\int_{L^-} P\,dx + Q\,dy.$$

www.TopSage.com

(2) 第一、二类曲面积分的一个重要不同点是:第一类曲面积分与曲面的定向(即法向量的取向)无关,而第二类曲面积分与曲面的定向有关. 设 S^+ 与 S^- 是同一块分块光滑曲面,但定向不同,则有

$$\iint_{S^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{S^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

▶4. **若干基本结论**(据两类曲线积分或曲面积分之间的关系或定义得出)

(1) 设 L 是空间中分段光滑的曲线,则

$$\int_L P\mathrm{d}x = 0 \text{ (若 } L \text{ 在垂直于 } x \text{ 轴的平面上)},$$

$$\int_L Q\mathrm{d}y = 0 \text{ (若 } L \text{ 在垂直于 } y \text{ 轴的平面上)},$$

$$\int_L R\mathrm{d}z = 0 \text{ (若 } L \text{ 在垂直于 } z \text{ 轴的平面上)}.$$

(2) 设 S 是分块光滑的曲面,则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \text{ (若 } S \text{ 垂直于 } Oyz \text{ 平面,即 } S \text{ 的法向量与 } Oyz \text{ 平面平行)},$$

$$\iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0 \text{ (若 } S \text{ 与 } Ozx \text{ 平面垂直)},$$

$$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \text{ (若 } S \text{ 与 } Oxy \text{ 平面垂直)}.$$

二、在直角坐标系中化多元函数的积分为定积分

(一) 曲线积分化为定积分

【定理 9.1】 设 $f(x,y)$ 在曲线 L 上连续.

若曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t, \tag{9.1}$$

其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续的导数且 $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$.

特别地,若曲线 L 能表成 $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ 的形式,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + y'^2_x}\,\mathrm{d}x, \tag{9.2}$$

其中 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数.

【定理 9.2】 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续.

若定向曲线 L 的参数方程为:$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ 而且 α 对应于起点 A, β 对应于终点 B(β 不一定大于 α!),则

$$\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t, \tag{9.3}$$

其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$)有连续的导数,$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$.

特别地,若曲线 L 能表为 $y = y(x)$ 的形式,且 $x = a$ 时对应于起点 A, $x = b$ 时对应于终点 B,则

$$\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]\mathrm{d}x, \tag{9.4}$$

www.TopSage.com

其中 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 或 $[b,a]$ 有连续的导数.

从上述定理看到,曲线积分化为定积分是直接的.将曲线的参数方程代入被积表达式,归结为微分运算:

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt, \quad dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt.$$

积分限代入曲线端点的参数值,对第一类曲线积分来说下限小于上限;对第二类曲线积分来说,下、上限分别是起、终点的参数(与曲线的定向有关).

对空间曲线积分 $\int_L f(x,y,z)\,ds$, $\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$,有类似的计算公式.

若未给出曲线的参数方程,需先求出曲线的参数方程才可用上述公式.

【例 9.1】 计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$,其中,$L$ 是圆周 $x^2 + y^2 = 4x$ (见图 9.1).

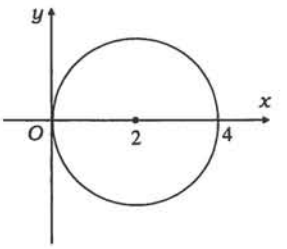


图 9.1

【解】 **方法 1°** 利用直角坐标系.

$$L:(x-2)^2 + y^2 = 4, y'_x = \frac{2-x}{y}, ds = \sqrt{1+y'^2_x}\,dx = \sqrt{\frac{4}{y^2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{y^2}}\,dx,$$

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = 2\int_0^4 \sqrt{4x}\cdot\frac{2}{\sqrt{y^2}}\,dx = 4\int_0^4 \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = 8\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

$$= -16\sqrt{4-x}\Big|_0^4 = 32.$$

方法 2° 利用参数方程.圆周 $L:(x-2)^2 + y^2 = 2^2$ 的参数方程是

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

则 $ds = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = 2dt,$

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \oint_L \sqrt{4x}\,ds = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{8(1+\cos t)}\,dt$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt = 16\int_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt = 32.$$ (周期函数与奇偶函数积分性质)

方法 3° 利用极坐标表示 L 的参数方程.

$L: x^2 + y^2 = 4x$ 的极坐标表示为 $r = 4\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$,因此,就有 L 的参数方程 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 及 $ds = \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}\,d\theta = \sqrt{(4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta)^2}\,d\theta = 4d\theta$,则

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cdot 4\,d\theta = 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = 32.$$

评注 在方法 1° 中使用了弧段关于 x 轴的对称性及被积函数关于 y 是偶函数;方法 2° 中含有绝对值,应分段考虑,即 $[0,\pi]$ 与 $[\pi,2\pi]$,但由于被积函数 $\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ 是 t 的 2π 周期函数又是偶函数,于是 $\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = 2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt$,所以积分可简化;方法 3° 中使用了极坐标系中的弧微分公式,即 $ds = \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\,d\theta$.

【例 9.2】 计算积分 $\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} x^2\,dx + (y-x)\,dy$,其中 L:(Ⅰ) 是半径为 a,圆心在原点的上半圆周,起点 $A(a,0)$,终点 $B(-a,0)$(见图 9.2);(Ⅱ) x 轴上由 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$ 的直线段.

【解】 **方法 1°** 化成对 x 的定积分.

(Ⅰ) 上半圆周的表达式为:$y = \sqrt{a^2 - x^2}$.起点 A 对应于 $x = a$,终点 B 对应于 $x = -a$,则

www.TopSage.com

$$\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} x^2\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y = \int_a^{-a}\left[x^2 - (\sqrt{a^2-x^2} - x)\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -2\int_0^a x^2\mathrm{d}x - \int_a^{-a} x\mathrm{d}x + \int_a^{-a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{3}a^3 + 2\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x - 2a^2\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= -\frac{2}{3}a^3 + \frac{\pi a^2}{2} - \pi a^2 = -\frac{2}{3}a^3 - \frac{\pi}{2}a^2.$$

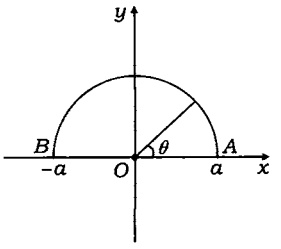


图 9.2

(Ⅱ) 对于从 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$ 的直线段,则

$$\int_{L(\overline{AB})} x^2\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y = \int_a^{-a} x^2\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}a^3.$$

方法 2° 以角度 θ 为参数.

上半圆周的表达式为 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$,所以

$$\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} x^2\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}[a^2\cos^2\theta\cdot(-a\sin\theta) + (a\sin\theta - a\cos\theta)\cdot a\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(-a^3\cos^2\theta\sin\theta + a^2\sin\theta\cos\theta - a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}a^3 - \frac{\pi}{2}a^2.$$

(二) 二重积分化为累次积分

【定理 9.3】 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,

若 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$, (9.5)

其中 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续(如图 9.3),则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{9.6}$$

若 $D = \{(x,y) \mid \alpha \leqslant y \leqslant \beta, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$, (9.7)

其中 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续(如图 9.4),则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{9.8}$$

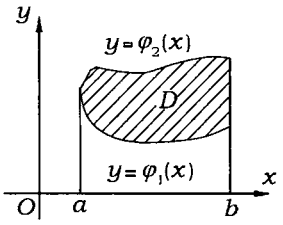


图 9.3

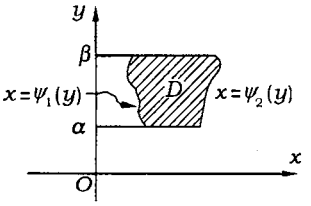


图 9.4

计算二重积分的关键是配置积分限. 为此要画好积分区域 D 的图形或写出 D 的不等式表示(9.5)或(9.7). 这两个公式都是将二重积分化为累次积分即二次定积分. 不同的是,前者先对 y 积分后对 x 积分,后者相反. (9.5) 式表示的 D 的特点是:穿过 D 内部与 y 轴平行的直线交 D 的边界不多于两点,是适于先积 y 后积 x 类型的区域. (9.7) 式表示的 D 的特点是:穿过 D 内部与 x 轴平行的直线交 D 的边界不多于两点,是适于先积 x 后积 y 类型的区域.

【例 9.3】 将 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分,其中 D 为 $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$ 与 $x^2 + y^2 \leqslant 2ay$ 的公共部分

www.TopSage.com

$(a>0)$.

【解】 如图9.5，$x^2+y^2=2ax$ 与 $x^2+y^2=2ay$ 是两个圆，其交点为 $O(0,0)$，$P(a,a)$. 因此，若先对 y 积分，就有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a \mathrm{d}x\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$$

若先对 x 求积分，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a \mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

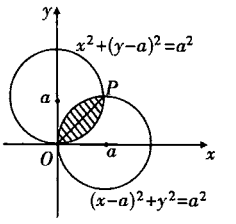


图 9.5

评注 为了保证所确定的积分限准确无误，在计算重积分时，画出积分区域的图形是必要的，这里应注意的是：先对 y 积分时，是纵向的由“下”而“上”，边界曲线要表成 x 的函数；先对 x 积分时，是横向的由“左”而“右”，边界曲线要表成 y 的函数.

【例9.4】 设 D 是由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1(a>0,b>0)$ 与 x 轴，y 轴围成的区域，求 $I=\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解法一】 先对 x 积分. 区域 D 如图9.6所示.

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant x\leqslant a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2\right\},$$

$$I=\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^{a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2} y\mathrm{d}x=\int_0^b a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2 y\mathrm{d}y=\frac{ab^2}{30}.$$

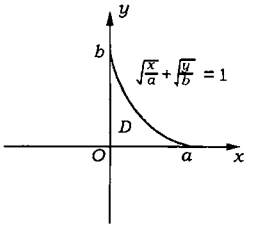


图 9.6

【解法二】 先对 y 积分.

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2\right\},$$

$$I=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2} y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^a b^2\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4\mathrm{d}x,$$

令 $t=1-\sqrt{\frac{x}{a}}$，则 $x=a(1-t)^2$，$\mathrm{d}x=2a(t-1)\mathrm{d}t$. 于是 $I=\frac{b^2}{2}\int_0^1 t^4(1-t)2a\mathrm{d}t=\frac{ab^2}{30}$.

（三）三重积分化为累次积分

【定理9.4】 设 Ω 是 $Oxyz$ 空间中的有界闭区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 连续.

若 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D\}$，　(9.9)

其中 D 是 Oxy 平面上的有界闭区域，$z_i(x,y)$ 在 D 连续，$i=1,2$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.\qquad(9.10)$$

若 $\Omega=\{(x,y,z)\mid \alpha\leqslant z\leqslant\beta,(x,y)\in D(z)\}$，　(9.11)

其中 $D(z)$ 为竖坐标为 z 的平面上的有界闭区域，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}z\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\qquad(9.12)$$

这里(9.9)表示的区域 Ω 是由上曲面 $z=z_2(x,y)$，下曲面 $z=z_1(x,y)$ 及侧面—柱面，以 Oxy 平面上区域 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面所围成. D 是 Ω 在 Oxy 平面上的投影区域，有时形象地称这种区域为曲顶曲底柱形长条区域. 公式(9.10)是先对 z 积分，由下方曲面 $z=z_1(x,y)$ 到上方曲面 $z=z_2(x,y)$，然后在平面区域 D 上对 x,y 作二重积分. 如果先对 y 或先对 x 求积分，方法是类似的.

www.TopSage.com

(9.11) 表示的区域 Ω 是介于平面 $z=\beta$ 与 $z=\alpha(\beta>\alpha)$ 之间，过 z 轴上区间 $[\alpha,\beta]$ 中任一点 z 作垂直于 z 轴的平面截区域 Ω 得平面区域 $D(z)$. 常称这种区域为截面已知的区域.

公式(9.10) 与(9.12) 都是把三重积分化为求一次定积分与求一次二重积分. 最后均化为求三次定积分. 但(9.10) 式是先求一次定积分，再求一次二重积分(先一后二) 的情形，(9.12) 式是先求一次二重积分再求一次定积分(先二后一) 的情形.

【例 9.5】 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由三个坐标面及平面 $x+y+2z=2$ 围成.

【解法一】 因区域 Ω 可表成(9.9) 的形式：

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,0\leqslant z\leqslant 1-\frac{1}{2}(x+y),(x,y)\in D_{xy}\right\},$$

$$D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x\leqslant 2-y\right\},\text{见图 9.7.}$$

所以可用公式(9.10) 求得 I 值，即

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-\frac{1}{2}(x+y)}x\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\left[1-\frac{1}{2}(x+y)\right]x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{2-y}\left[1-\frac{1}{2}(x+y)\right]x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2\left[\left(1-\frac{1}{2}y\right)\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]\Big|_0^{x=2-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\int_0^2(2-y)^3\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

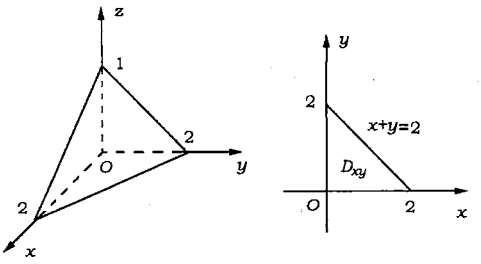


图 9.7

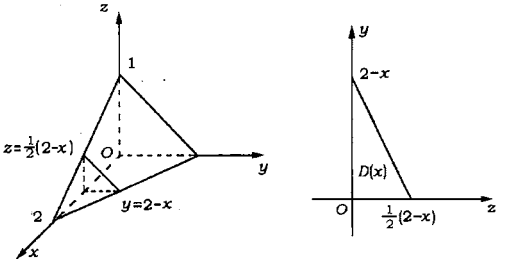


图 9.8

【解法二】 因区域 Ω 也可表成类似于(9.11) 的形式：

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,(y,z)\in D(x)\},$$

$D(x)$ 是过 x 轴上 $[0,2]$ 中的任一点 x 作垂直于 x 轴的平面截 Ω 所得的平面区域，它是直角三角形，直角边长分别为 $\frac{1}{2}(2-x)$ 与 $2-x$，见图 9.8，所以用类似于(9.12) 的公式得

$$I=\int_0^2\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2-x)(2-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2(x-2)^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\int_0^2x\mathrm{d}(x-2)^3=-\frac{1}{12}\int_0^2(x-2)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

(四) 曲面积分化为二重积分

▶1. 第一类曲面积分化为二重积分

【定理 9.5】 如果积分曲面 Σ 能够表为 $z=z(x,y)$ 的形式，并且在 xOy 平面上的投影域为 D，那么

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}\sigma,\tag{9.13}$$

www.TopSage.com

其中 $f(x,y,z)$ 在 Σ 连续，$z(x,y)$ 在 D 有连续的偏导数.

这样，就将对面积的曲面积分化成了二重积分，而二重积分又可以化为累次积分，所以曲面积分又最终化成了定积分. 这里的计算过程要注意三点：(1) 被积函数中要代入曲面方程(被积函数定义在曲面 Σ 上)；(2) 积分元素 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}\sigma$；(3) 积分区域 D 是 Σ 在 xOy 平面上的投影.

【注】 ① 曲面元 $\mathrm{d}S$ 在 (x,y,z) 处的单位法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}(-z'_x,-z'_y,1)$，$\mathrm{d}S$ 与它在 Oxy 平面上的投影 $\mathrm{d}\sigma$ 的关系是：

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}\sigma.$$

② 若曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$ 或 $y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}$ 时，有类似的化第一类曲面积分为二重积分的公式.

▶2. 第二类曲面积分化为二重积分

【定理 9.6】

(1) 若定向曲面 Σ：$x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，$x(y,z)$ 在 D_{yz} 有连续的偏导数，$P(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{9.14-1}$$

(2) 若定向曲面 Σ：$y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}$，$y(z,x)$ 在 D_{zx} 有连续的偏导数，$Q(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma}Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}}Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x. \tag{9.14-2}$$

(3) 若定向曲面 Σ：$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，$z(x,y)$ 在 D_{xy} 有连续的偏导数，$R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{9.14-3}$$

其中 D_{yz},D_{zx},D_{xy} 分别为积分曲面 Σ 在 Oyz,Ozx,Oxy 三个坐标平面上的投影. 式中“±”号的确定方法为：

1° 若 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴正方向的夹角为锐角，即取前侧，则右端第一个积分前取“+”号，否则取“-”号；

2° 若 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴正方向的夹角为锐角，即取右侧，则右端第二个积分前取“+”号，否则取“-”号；

3° 若 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正方向的夹角为锐角，即取上侧，则右端第三个积分前取“+”号，否则取“-”号.

【定理 9.7】 若定向曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 给出，Σ 在 Oxy 平面上的投影区域为 D_{xy}，$z(x,y)$ 在 D_{xy} 有连续的偏导数，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Σ 连续，则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}\Big[&P(x,y,z(x,y))\Big(-\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+Q(x,y,z(x,y))\Big(-\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\\&+R(x,y,z(x,y))\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{9.15}$$

其中正负号由 Σ 的定向决定：法向量指向上侧时取正号，否则取负号.

【注】 ①公式(9.14)是将 Σ 分别投影到 Oyz 平面，Ozx 平面与 Oxy 平面来计算 $\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\iint_{\Sigma}Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 与 $\iint_{\Sigma}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 公式(9.15)是将 Σ 投影到 Oxy 平面来计算 $\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 若将 Σ 投影到 Oyz 平面

www.TopSage.com

或 Ozx 平面上，可得到与(9.15)类似的公式.

② 得到公式(9.15)的关键是：第一类曲面积分与第二类曲面积分的关系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

曲面 $\Sigma: z = z(x,y)$ 的单位法向量公式

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}(-z_x', -z_y', 1)$$

及第一类曲面积分化为二重积分的公式(9.13). 该过程可概括为：

第二类曲面积分 $\Rightarrow$ 第一类曲面积分 $\Rightarrow$ 二重积分.

【例 9.6】 计算 $\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S$，其中 Σ 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

【解】 由于 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}(0 \leqslant z \leqslant 1)$，因此 $z'_x = \frac{x}{z}$，$z'_y = \frac{y}{z}$，$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\mathrm{d}\sigma$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

若记 Σ 在 xOy 平面上的投影域为 $D: z = 0, x^2 + y^2 \leqslant 1$，则

$$\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S = \iint_{D} \sqrt{2}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

【例 9.7】 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧(见图 9.9).

【解法一】 投影到 xy 平面. 将积分曲面 Σ 分成上下两部分，分别记为 Σ_1 与 Σ_2，则

$$\Sigma_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad \Sigma_2: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. 并且在 Σ_1 上法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正方向的夹角为锐角，故公式(9.14)中符号应取“+”号；在 Σ_2 上法向量与 z 轴正方向的夹角为钝角，故应取“-”号. Σ_1, Σ_2 在 xOy 平面上的投影域均为 $D: z = 0, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1$，所以

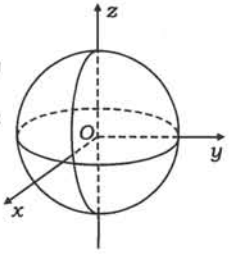


图 9.9

$$\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D} xy(-\sqrt{1 - x^2 - y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1 - r^2}\mathrm{d}r \quad (r = \sin t)$$

$$= (\sin^2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t)\mathrm{d}t = \frac{2}{3 \cdot 1} - \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2}{15}.$$

【解法二】 投影到 yz 平面. 这时曲面 Σ 就不必分块，Σ 表为

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}, (y,z) \in D_{yz}: x = 0, y \geqslant 0, y^2 + z^2 \leqslant 1, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z}{x}.$$

于是，由类似于(9.15)的公式得

$$\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = + \iint_{D_{yz}} xyz\left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} xyz \cdot \frac{z}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\iint_{D_{yz} \cap \{z \geqslant 0\}} yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta \cdot r^2\sin^2\theta \cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\mathrm{d}\sin\theta \cdot \int_0^1 r^4\mathrm{d}r = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

www.TopSage.com

评注 对坐标的曲面积分常有两种计算方法：转化为二重积分，只要注意与不同的投影方向，选择恰当的计算的表达式系号即可. 虽然 Σ 不是封闭曲面，但是，可以补充 zOx 平面与 yOz 平面包含在半径为 1 的球内的部分分别为 Σ^*，这样 $\Sigma \cup \Sigma^*$ 就是封闭曲面，而在 Σ^* 部分的积分为零，所以，若记 $\Sigma \cup \Sigma^*$ 所包含的部分为 Ω，则有

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dxdy = \iint_{\Sigma} xyz\,dxdy + \iint_{\Sigma^*} xyz\,dxdy = \iiint_{\Omega} xy\,dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^5 \sin^2\varphi \sin\theta\cos\varphi\,d\rho = \frac{2}{15}.$$

三、重积分的变量替换

(一) 平移变换

【定理 9.8】 设 D 为平面有界闭区域，$f(x,y)$ 在 D 连续，则

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \xlongequal{\substack{u = x - a \\ v = y - b}} \iint_{D'} f(u + a, v + b)\,dudv,$$

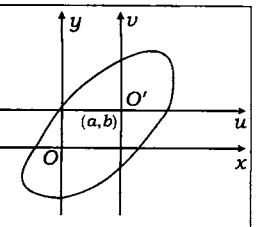


图 9.10

其中 D' 是在平移变换 $\begin{cases} u = x - a, \\ v = y - b \end{cases}$ $\left(\text{即} \begin{cases} x = u + a, \\ y = v + b \end{cases}\right)$ 下把 xy 平面上的区域 D 变为 uv 平面上的一个区域. 见图 9.10.

【定理 9.9】 设 Ω 为空间中的有界闭区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 连续，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \xlongequal{\substack{u = x - a \\ v = y - b \\ w = z - c}} \iiint_{\Omega'} f(u + a, v + b, w + c)\,dudvdw,$$

其中 Ω' 是在平移变换：$u = x - a, v = y - b, w = z - c$ 下把 $Oxyz$ 空间中的区域 Ω 变为 $O'uvw$ 空间中的一个区域.

平移变换下保持区域的形状与体积(或面积)不变. 如，$\Omega: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leqslant 1$，在平移变换 $u = x - 1, v = y - 1, w = z - 1$ 下，Ω 变成 $\Omega': u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$.

【注】 考试大纲中对平移变换没提出要求，但考虑到平移变换十分简单又较容易掌握，有了它对解有些题目十分简便. 因此，我们把平移变换写在这里，供读者参考.

【例 9.8】 设 $\Omega = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z + \frac{1}{4}\right\}$，求 $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)\,dxdydz$.

【解】 将 Ω 改写成

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 1\right\},$$

作平移变换：$u = x - \frac{1}{2}$，$v = y - \frac{1}{2}$，$w = z - \frac{1}{2}$，则

$$I = \iiint_{\Omega'} \left(u + v + w + \frac{3}{2}\right) dudvdw = 0 + \frac{3}{2} \iiint_{\Omega'} dudvdw = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi = 2\pi,$$

其中 $\Omega' = \left\{(u,v,w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1\right\}$.

www.TopSage.com

（二）二重积分的极坐标变换

【定理 9.10】 极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 下有

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta, \tag{9.16}$$

其中 D 为直角坐标系 Oxy 平面上的有界闭区域，$f(x,y)$ 在 D 上连续. D' 是直角坐标系 $Or\theta$ 中相应的有界闭区域. 在极坐标变换下，D 与 D' 是一一对应的（可除去若干点或若干条曲线）. 见图 9.11.

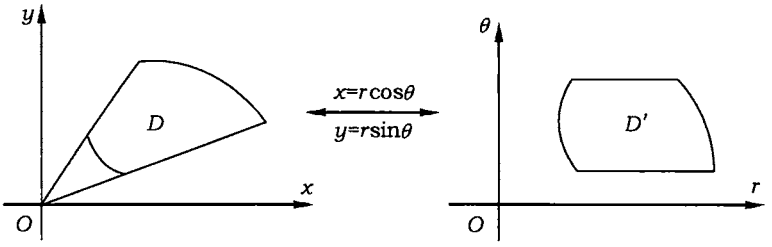


图 9.11

怎样将 $\iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$ 化为累次积分 —— 这是直角坐标系中化二重积分为累次积分的问题.

在 $Or\theta$ 中 D' 的不等式表示与 Oxy 中 D 的极坐标的不等式表示形式上是相同的. 因此在极坐标变换下化二重积分 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 为累次积分的关键是：在 Oxy 平面上画出 D 的图形并写出相应的 D 的极坐标的表示式.

在这个意义下，人们习惯上常把 (9.16) 写成 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$.

常见以下情形：

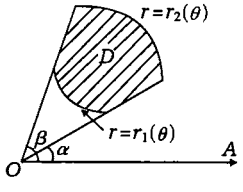


图 9.12

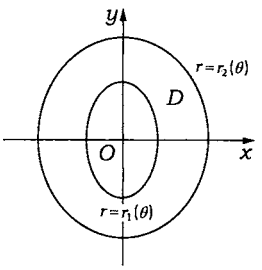


图 9.13

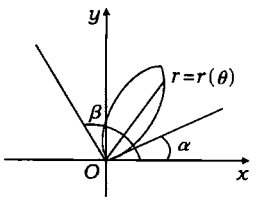


图 9.14

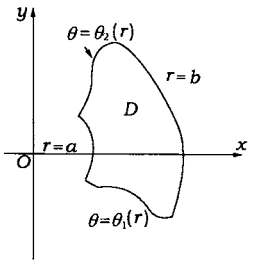


图 9.15

■ **情形 Ⅰ** $D = \{(x,y) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)\}$，如图 9.12，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr. \tag{9.17}$$

■ **情形 Ⅱ** $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)\}$，如图 9.13，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr.$$

特殊情形是 $r_1(\theta) = 0$.

www.TopSage.com

■ 情形 Ⅲ　$D=\{(x,y)\mid \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0\leqslant r\leqslant r(\theta)\}$，如图 9.14，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr.$$

■ 情形 Ⅳ　$D=\{(x,y)\mid a\leqslant r\leqslant b,\theta_1(r)\leqslant\theta\leqslant\theta_2(r)\}$，如图 9.15，则

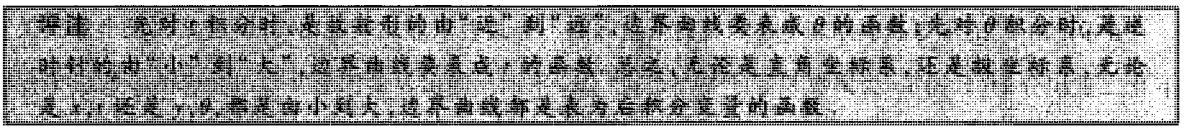
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,d\theta.$$

【例 9.9】　在极坐标变换下将 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 化为累次积分，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 2ax$ 与 $x^2+y^2\leqslant 2ay$ 的公共部分（$a>0$）.

【解】　由于两个圆在极坐标下的表达式分别为：$r=2a\cos\theta$ 与 $r=2a\sin\theta$，交点 P 处的极坐标是 $\left(\sqrt{2}a,\frac{\pi}{4}\right)$，于是连接 OP 将区域 D 分成两部分（见图 9.16），则

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2a\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr.$$

或者先对 θ 积分，则　$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\sqrt{2}a}r\,dr\int_{\arcsin\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta.$



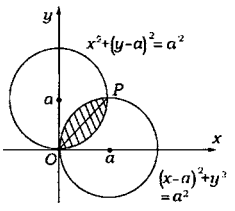


图 9.16

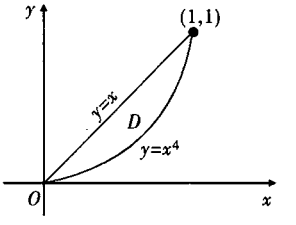


图 9.17

【例 9.10】　求积分 $I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$，其中 D 由 $y=x$ 与 $y=x^4$ 围成.

【解】　D 的图形如图 9.17 所示，虽然 D 的边界不是圆弧，但被积函数是 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，选用极坐标变换方便．在极坐标变换下，D 的边界方程是 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$r=\frac{\sin^{\frac{1}{3}}\theta}{\cos^{\frac{4}{3}}\theta}$，从而

$$D:\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant r\leqslant\frac{\sin^{\frac{1}{3}}\theta}{\cos^{\frac{4}{3}}\theta}.$$

于是

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sin^{\frac{1}{3}}\theta/\cos^{\frac{4}{3}}\theta} r\cdot r\,dr=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos\theta}{\cos^4\theta}$$

$$=\frac{1}{9}\frac{1}{\cos^3\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{9}(2\sqrt{2}-1).$$

（三）三重积分的柱坐标变换

【定理 9.11】　在柱坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$ 下有

www.TopSage.com

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz,$$

其中 Ω 为直角坐标系 $Oxyz$ 中的有界闭区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 连续，Ω' 是直角坐标系 $Or\theta z$ 中相应的有界闭区域．在柱坐标变换下 Ω 与 Ω' 是一一对应的(可除去若干点，或若干曲线或曲面)．

若 Ω 为(9.9)所示，上、下底曲面的柱坐标方程为 $z = z_2(r,\theta)$，$z = z_1(r,\theta)$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iint_{D'} r\,dr\,d\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz,$$

其中 D' 是 $Or\theta$ 中相应于 D 的区域，若 D 由(9.17)所示，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,dr \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz.$$

若 Ω 是 $Oxyz$ 中介于半平面 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$ 之间且极角为 $\theta \in [\alpha, \beta]$ 的任一半平面与 Ω 相截得平面区域 $D(\theta)$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \iint_{D(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,dz.$$

【例 9.11】 利用柱坐标变换求三重积分：$I = \iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$，$\Omega$：$x^2 + y^2 \leqslant z, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2$．

【解法一】 区域 Ω 的边界面分别是旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$，见图 9.18，两曲面的交线是 $\begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ 作柱坐标变换：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$，则边界面的方程是：$z = r^2, z = \sqrt{2 - r^2}$．又 Ω 在 xOy 平面上投影区域的极坐标表示为：$D = \{(r,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$，于是

$$I = \iiint_{\Omega} z \cdot r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\,r\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 r \cdot \frac{1}{2} z^2 \Big|_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} dr = \pi \int_0^1 r(2 - r^2 - r^4)\,dr = \frac{7}{12}\pi.$$

【解法二】 过 z 轴极角为 θ 的半平面与 Ω 相交的截面为(图 9.19)

$$D(\theta) = \{(r,z) \mid r^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - r^2}, 0 \leqslant r \leqslant 1\}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

于是 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z \cdot r\,dz$．同样得到 $I = \frac{7}{12}\pi$．

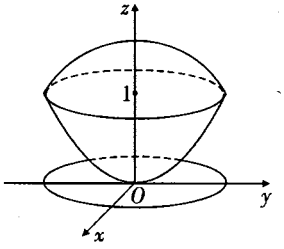
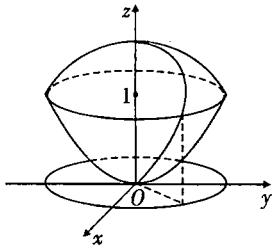


图 9.18



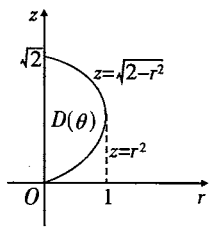


图 9.19

(四) 三重积分的球坐标变换

【定理 9.12】 在球坐标变换 $x = \rho\sin\varphi\cos\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\varphi$ 下有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi,$$

www.TopSage.com

其中 Ω 为直角坐标系 $Oxyz$ 中的有界闭区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 连续，Ω' 是直角坐标系 $O\rho\theta\varphi$ 中相应的有界闭区域．在球坐标变换下，Ω 与 Ω' 是一一对应的（可除去若干点、若干条曲线或若干块曲面）．

下面记 $F(\rho,\varphi,\theta)=f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)$．

若 O 位于闭曲面 S 所围区域 Ω 内，S 的球坐标方程 $\rho=\rho(\varphi,\theta)$，则（如图 9.20）

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\rho(\varphi,\theta)}F(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho;$$

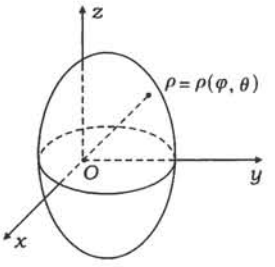


图 9.20

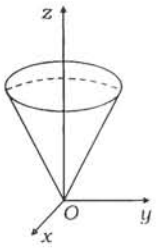


图 9.21

若 Ω 由锥面 $\varphi=\alpha$ 及球坐标方程为 $\rho=\rho(\varphi,\theta)$ 的曲面所围，则（如图 9.21）

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\rho(\varphi,\theta)}F(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

【例 9.12】 将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$ 在三种坐标系下化成累次积分，其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x^2+y^2\leqslant z^2, z\geqslant 0$ 所围成的区域（如图 9.22 所示）．

【解】 **方法 1°** 使用直角坐标系．

先求区域 Ω 在 xOy 平面上的投影域 D，它是由球面与锥面的交线所确定，即 $x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}R^2, z=0$．若依照由 z 到 y 再到 x 的顺序积分，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}R^2-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

就本题积分域的特点先对 z 求积分是自然的．

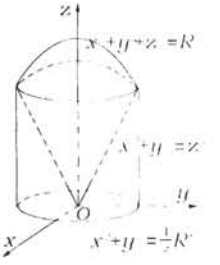


图 9.22

方法 2° 使用柱坐标系．

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}r\,\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{R^2-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,\mathrm{d}z.$$

方法 3° 使用球坐标系．

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\,\mathrm{d}\rho.$$

【例 9.13】 利用球坐标变换求三重积分 $I=\iiint_{\Omega}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5\,\mathrm{d}V$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$．

【解】 Ω 是球体 $:x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1$，在球坐标变换：$x=\rho\sin\varphi\cos\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta, z=\rho\cos\varphi$ 下，

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi\right\},$$

于是

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^5\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{8}\rho^8\Big|_0^{2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^8\cos^8\varphi\,\mathrm{d}(\cos\varphi)=\frac{64}{9}\pi.$$

www.TopSage.com

四、如何应用多元函数积分的计算公式及简化计算

(一) 选择积分顺序

计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$时是先对$x$积分还是先对$y$积分,既取决于积分区域$D$的类型,又取决于被积函数的特点.特别是区域具备两种类型的特点时,有时不同的积分顺序会影响计算的繁简,甚至关系到能否积出来.

【例 9.14】 求$I=\iint\limits_D\sqrt{1-y^2}\,dxdy$,其中$D$为$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=x$及$x=0$所围成区域.

【分析与求解】 区域D如图9.23.被积函数只含y,先对x积分,虽然积分区域要分块还是简单些.若先对y积分,则求积分$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}\,dy$要费点功夫.

先对x积分,将D分块:

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},0\leqslant x\leqslant y\right\}\cup\left\{(x,y)\mid\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}\right\},$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dy\int_0^{y}\sqrt{1-y^2}\,dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-y^2}\,y\,dy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(1-y^2)\,dy\\&=-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\left(y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

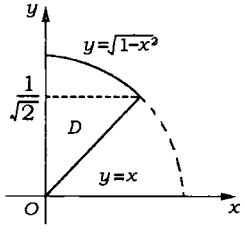


图 9.23

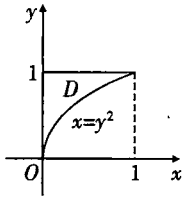


图 9.24

【例 9.15】 求$I=\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$,其中$D$是由抛物线$y^2=x$,直线$x=0$,$y=1$所围成.

【分析与求解】 $\int e^{\frac{x}{y}}dy$的原函数不是初等函数,故$\int e^{\frac{x}{y}}dy$积不出来,因此选先x后y的顺序.积分区域D如图9.24,于是

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}e^{\frac{x}{y}}dx=\int_0^1 ye^{\frac{x}{y}}\Big|_0^{y^2}dy=\int_0^1(ye^y-y)\,dy=\frac{1}{2}.$$

与计算二重积分类似,计算三重积分也有选择积分顺序的问题:是先一后二的顺序还是先二后一的顺序.

【例 9.16】 求$I=\iiint\limits_\Omega xy\,dV$,其中$\Omega$由$z=xy$,$z=0$,$x+y=1$围成.

【分析与求解】 区域Ω的图形不好画(可不必画出),但易求出Ω在xOy平面上的投影区域D(见

www.TopSage.com

图 9.25),D 的边界线是:$x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

因而易写出 Ω 的不等式表示 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant xy,(x,y)\in D\}$.

于是选择先一(先 z)后二(后 x,y)的积分顺序:$I=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy\mathrm{d}z=\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

再将二重积分化为定积分(先 x 后 y 或先 y 后 x 均可)

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1x^2(1-x)^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{12}\int_0^1x^2\mathrm{d}(1-x)^4$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1x(1-x)^4\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}\int_0^1x\mathrm{d}(1-x)^5=-\frac{1}{180}(1-x)^6\Big|_0^1=\frac{1}{180}.$$

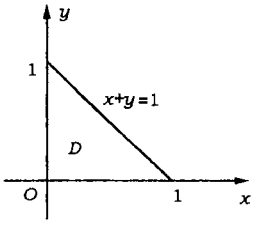


图 9.25

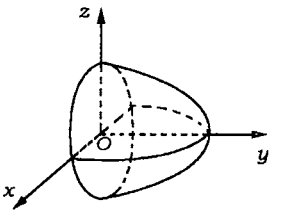


图 9.26

【例 9.17】 求 $I=\iiint\limits_\Omega y^2\mathrm{d}V$,其中 Ω 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(0\leqslant y\leqslant b)$ 及 $y=0$ 围成.

【分析与求解】 区域 Ω 由右半椭球面及 zx 平面围成的右半椭球体(如图 9.26 所示).它在 zx 平面的投影区域 D_{zx} 是:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$,于是

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}},(z,x)\in D_{zx}\right\}.$$

另一方面,过 y 轴上任意点 $y\in[0,b]$ 作垂直 y 轴的平面与 Ω 相交成区域 $D(y)$,则

$$D(y):\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1-\frac{y^2}{b^2},\ 0\leqslant y\leqslant b,$$

它的面积 $S(y)=\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$,于是 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant y\leqslant b,(z,x)\in D(y)\}$.

由于被积函数仅与 y 有关,而 $D(y)$ 面积已知,我们选择先二后一(先 zx 后 y)的积分顺序得

$$I=\int_0^b\mathrm{d}y\iint\limits_{D(y)}y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^by^2S(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^by^2\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=\pi ac\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{5}b^3\right)=\frac{2\pi ab^3c}{15}.$$

(二)注意利用区域的对称性与被积函数的奇偶性

▶1. 二重积分的情形

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续.

(1)若 D 关于 x 轴对称,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{对 }y\text{ 为奇函数,即}\\ & f(x,-y)=-f(x,y),\forall(x,y)\in D,\\ 2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{对 }y\text{ 为偶函数,即}\\ & f(x,-y)=f(x,y),\forall(x,y)\in D,\end{cases}$$

其中 $D_1=D\cap\{y\geqslant 0\}$.

www.TopSage.com

(2) 若 D 关于 y 轴对称,则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 对 } x \text{ 为奇函数}, \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y) \text{ 对 } x \text{ 为偶函数}, \end{cases}$$

其中 $D_1 = D \cap \{x \geqslant 0\}$.

(3) 若 D 关于原点对称($(x,y) \in D \Leftrightarrow (-x,-y) \in D$),则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{关于} (x,y) \text{ 为奇函数,即} \\ & f(-x,-y) = -f(x,y), \forall (x,y) \in D, \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y) \text{关于} (x,y) \text{ 为偶函数,即} \\ & f(-x,-y) = f(x,y), \forall (x,y) \in D, \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 的右半平面或上半平面部分.

(4) 若 D 关于直线 $y = x$ 对称(图 9.27),即 $(x,y) \in D \Leftrightarrow (y,x) \in D$,则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

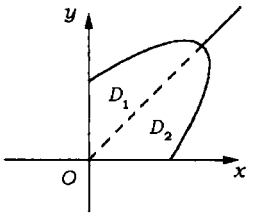


图 9.27

在这种情形下,若将 D 分成两部分 $D = D_1 \cup D_2$,D_1,D_2 分别为 D 在 $y = x$ 的上方与下方部分,则

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_2} f(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

▶2. 三重积分的情形

设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 连续. 若 Ω 关于 xy 平面对称($(x,y,z) \in \Omega \Leftrightarrow (x,y,-z) \in \Omega$),则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数,即} \\ & f(x,y,-z) = -f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \Omega, \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V, & \text{若 } f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数,即} \\ & f(x,y,-z) = f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega_1 = \Omega \cap \{z \geqslant 0\}$.

若 Ω 关于 yz 平面(zx 平面) 对称,$f(x,y,z)$ 关于 x(或 y) 为奇函数或偶函数有类似的结论.

▶3. 第一类曲线、曲面积分的情形

(1) 设 $f(x,y)$ 在分段光滑曲线 L 上连续.

若 L 关于 x 轴(或 y 轴) 对称,则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x,y) \text{ 关于 } y(\text{或 } x) \text{ 为奇函数}, \\ 2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s, & \text{若 } f(x,y) \text{ 关于 } y(\text{或 } x) \text{ 为偶函数}, \end{cases}$$

其中 L_1 为 L 的右半平面(或上半平面) 部分.

若 L 关于直线 $y = x$ 对称,则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_L f(y,x)\,\mathrm{d}s$.

(2) 设 $f(x,y,z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续. 若 S 关于 yz 平面对称,则

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x,y,z) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}, \\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S, & \text{若 } f(x,y,z) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}, \end{cases}$$

www.TopSage.com

其中 $S_1 = S \cap \{x \geqslant 0\}$.

若 S 关于 xy 平面(或 zx 平面)对称,$f(x,y,z)$ 关于 z(或 y)为奇函数或偶函数有类似的结论.

▶4. 第二类曲线、曲面积分的情形

对第二类曲线、曲面积分,则有与以上几种不同的情形,将在本章题型三中具体介绍.

【例 9.18】 设 D 是 Oxy 平面上以 $A(1,1)$,$B(-1,1)$ 和 $C(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域,则

$$I = \iint_D [\sqrt{1+2x^2+3y^2}\sin(xy)+4]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = _____.$$

【分析】 连 $\overline{OB}$ 将区域 D 分成 D_1(三角形 OAB),D_2(三角形 OBC)两个部分(见图 9.28),它们分别关于 y 轴与 x 轴对称. 由于 $\sqrt{1+2x^2+3y^2}\sin(xy)$ 对 x 与 y 均为奇函数,因此

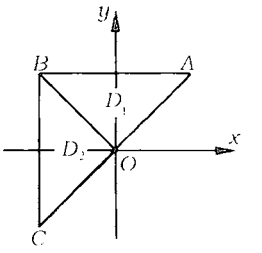


图 9.28

$$\iint_D \sqrt{1+2x^2+3y^2}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} \sqrt{1+2x^2+3y^2}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \sqrt{1+2x^2+3y^2}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

又由于 D 的面积 $= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$,所以 $\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\cdot 2 = 8$.

于是 $I = 0 + 8 = 8$.

【例 9.19】 设空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$ 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$,则下列等式成立的是

(A) $\iiint_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}V$.　　(B) $\iiint_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} y\mathrm{d}V$.

(C) $\iiint_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$.　　(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}V$.

【分析】 由 Ω_1 在 xy 平面上方,关于 yz 平面与 zx 平面均对称,Ω_2 是 Ω_1 的第一象限部分,两次利用对称性,可以看出等式成立的充分条件是被积函数关于 x 与 y 为偶函数,即 $f(-x,y,z) = f(x,y,z)$,$f(x,-y,z) = f(x,y,z)$. 在本题的四个选项中,只有(C)的被积函数 $f(x,y,z) = z$,关于 x 与 y 是偶函数,因为四个结论中只有一个正确,因此应选(C).

【例 9.20】 求 $I = \int_L |x|\mathrm{d}s$,其中 L 为 $|x| + |y| = 1$.

【解法一】 L 为正方形的边界如图 9.29. 因为 L 关于 x,y 轴均对称,被积函数 $|x|$ 关于 y 与 x 均为偶函数,于是

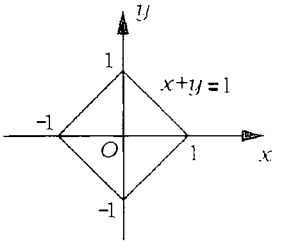


图 9.29

$$I = 4\int_{L_1} |x|\mathrm{d}s = 4\int_0^1 x\sqrt{1+1}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2},$$

其中 L_1 是 L 在第一象限部分.

【解法二】 因为 $\int_L |x|\mathrm{d}s = \int_L |y|\mathrm{d}s$,所以

$$I = \frac{1}{2}\int_L (|x|+|y|)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

【例 9.21】 计算曲面积分 $I = \iint_\Sigma (ax+by+cz+\gamma)^2\mathrm{d}S$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

【解】 $I = \iint_\Sigma (ax+by+cz+\gamma)^2\mathrm{d}S$

$$= \iint_\Sigma [(ax)^2+(by)^2+(cz)^2+\gamma^2+2abxy+2aczx+2bcyz+2a\gamma x+2b\gamma y+2c\gamma z]\mathrm{d}S.$$

www.TopSage.com

根据积分曲面的对称性及被积函数的奇偶性可知

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} xy\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}S = 0.$$

大家网 TopSage.com

又由坐标的轮换对称性知

$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S,$$

因此

$$\begin{aligned} I &= (a^2+b^2+c^2)\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S + \gamma^2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S + 4\pi R^2\gamma^2 \\ &= \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)R^2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S + 4\pi R^2\gamma^2 = 4\pi R^2\left[\frac{R^2}{3}(a^2+b^2+c^2)+\gamma^2\right]. \end{aligned}$$

（三）某些情形下要利用分块积分法

以二重积分为例，对以下情形要利用分块积分法：

$$\iint_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中区域 $D = D_1 \cup D_2$，区域 D_1 与 D_2 只有公共的边界.

■ 情形 Ⅰ　区域的边界线是分段表示的

如【例 9.14】中的区域 D，先对 x 积分时，D 的一条边界线是分段表示的，即

$$x = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{1-y^2}, & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

因此要用分块积分法.

■ 情形 Ⅱ　被积函数是分段表示的（如【例 9.22】）

若 $D = D_1 \cup D_2$，$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ h(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases}$ 则

$$\iint_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

■ 情形 Ⅲ　需要将区域分块才可应用重积分化为累次积分的公式（如【例 9.23】）

【注】　其他类型积分与二重积分的情形类似.

【例 9.22】　求 $I = \iint_{D} \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: |x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$.

【分析与求解】　在积分区域 D 上被积函数分块表示为

$$|y-x^2| = \begin{cases} y-x^2, & y \geqslant x^2, \\ x^2-y, & y \leqslant x^2, \end{cases} \quad (x,y) \in D,$$

因此要将 D 分块，用分块积分法. 又 D 关于 y 轴对称，被积函数关于 x 为偶函数，记

$$D_1 = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, x \geqslant 0, y \geqslant x^2\}, \quad D_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, x \geqslant 0, y \leqslant x^2\},$$

于是

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_{D_1}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint_{D_2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y + 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t} \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2^{\frac{3}{2}}\cos^3 t\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cos t\mathrm{d}t + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t\,dt + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}.$$

【例 9.23】 设 D 由抛物线 $y = x^2, y = 4x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成. 用先 x 后 y 的顺序,将 $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ 配置积分限化成累次积分.

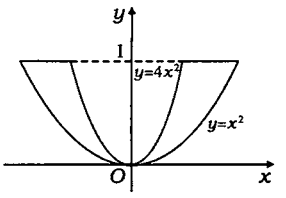


图 9.30

【解】 区域 D 如图 9.30 所示,将 D 分成两块($x \geqslant 0$ 与 $x \leqslant 0$ 两部分)才是先积 x 后积 y 的类型,于是用分块积分法得

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

(四) 选择变量替换

作变量替换是简化重积分计算的重要方法. 根据经验下面的选择可供参考.

坐标系	积分域的形状	被积函数的形式	积分元素
极坐标系	圆、环形域,扇形或扇形环域或者它们的一部分	$x^n y^m f(x^2+y^2)$ 或 $x^n y^m f\left(\frac{y}{x}\right)$	$rdrd\theta$
球面坐标系	球体、锥体或者它们的一部分	$x^n y^m z^l f(x^2+y^2+z^2)$	$\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$
柱面坐标系	旋转体,如柱体、锥体、旋转抛物体等	$x^n y^m z^l f(x^2+y^2)$(旋转体以 z 轴为旋转轴,其它坐标轴类似)	$rdrd\theta dz$

【注】 当圆心或球心不在原点时,有时可考虑作平移变换.

【例 9.24】 求 $I = \iint_D xy\,dxdy$, D 由曲线 $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1$ 所围成.

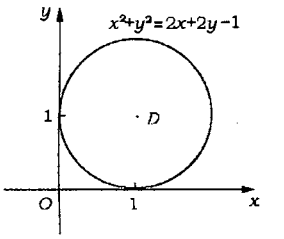


图 9.31

【解】 D 是圆域:$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$,见图 9.31. 作平移变换:$u = x - 1, v = y - 1$,则

$$I = \iint_{D'} (u+1)(v+1)\,dudv = \iint_{D'} (uv + u + v)\,dudv + \iint_{D'} 1\,dudv$$
$$= 0 + \pi = \pi,$$

其中 $D' = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leqslant 1\}$.

评注 ① 这里平移变换把圆心移至原点,利用对称性简化了计算.

② 如果直接作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,不会带来方便,还不如作平移变换和极坐标变换:$x - 1 = r\cos\theta$, $y - 1 = r\sin\theta$,则 $D: 0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,因此有

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r\cos\theta)(1 + r\sin\theta) r\,dr.$$

或在直角坐标系中直接化为累次积分 $I = \int_0^2 dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} xy\,dy$,当然计算复杂些.

【例 9.25】 计算三重积分 $I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$,其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4z\}$.

【分析与求解】 Ω 是两个球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4z$($x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leqslant 4$)的公共部分,两球面的交线是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ z = 1. \end{cases}$$

www.TopSage.com

图 9.32 是 Ω 在 yz 平面上的截面图.

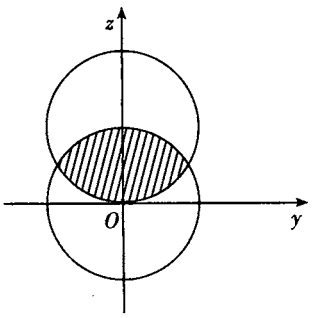


图 9.32

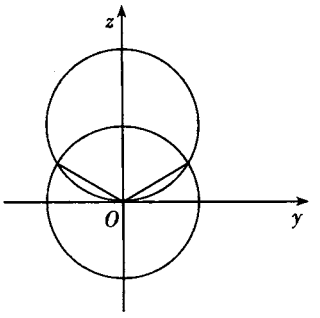


图 9.33

这里适宜用球坐标变换的情形. 这时要用锥面 $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ (以原点为顶点,通过两球的交线)将 Ω 分成 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$,其中

$$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 4,z\geqslant\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 4z,z\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}\right\},$$

见截面图 9.33. 用球坐标表示

$$\Omega_1:0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

$$\Omega_2:0\leqslant\rho\leqslant 4\cos\varphi,\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

其中球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 的球坐标方程是 $\rho=4\cos\varphi$,锥面 $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ 的方程是 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

因此
$$\begin{aligned}I&=\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V+\iiint_{\Omega_2}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi}\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{5}2^5\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi+2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}4^5\cos^5\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2^6}{5}\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+2\pi\cdot\frac{1}{5}\cdot 4^5\left(-\frac{1}{6}\cos^6\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{5}\pi+\frac{16}{15}\pi=\frac{112}{15}\pi.\end{aligned}$$

评注 这里用球坐标变换后,化为累次积分时要将积分区域 Ω 分块,因为从原点出发的射线与 Ω 的边界的交点在锥面 $\left(z^2=\frac{1}{3}(x^2+y^2)\right)$ 两边的表达式是不同的.

(五) 计算曲线、曲面积分时,注意利用曲线或曲面方程化简被积函数

【例 9.26】 设 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y+z=0,\end{cases}$ 常数 $a>0$,则 $I=\oint_L(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}s=$ _____.

【分析】 注意 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$,则

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}(x+y+z)^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2),$$

www.TopSage.com

因此 $$I=\oint_L(xy+yz+zx)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L(x+y+z)^2\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s.$$

由 L 的方程,其中 $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=a^2$,于是

$$I=0-\frac{1}{2}\oint_L a^2\mathrm{d}s=-\frac{1}{2}a^2\cdot 2\pi a=-\pi a^3,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,它是半径为 a 的圆周.

【例 9.27】 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,$a>0$.

【解】 注意 Σ 上 $x^2+y^2+z^2=a^2$,则 $I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Σ 在 xy 平面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant a^2$,且 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,于是

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}x\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标变换}}-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^2\cos^2\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{r=a\sin t}-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3\sin^3 t a\cos t}{a\cos t}\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}a^3\pi.$$

评注 我们也可添加辅助面 $\Sigma^*: x^2+y^2\leqslant a^2, z=0$,法向量朝下,在 Σ 与 Σ^* 围成的区域 Ω 上用高斯公式求这个积分,并注意 $\iint\limits_{\Sigma^*}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$,得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma^*}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=-\frac{2}{3}\pi a^3.$$

因为 Ω 的边界取内法向,故高斯公式中三重积分应带负号.

(六) 利用多元函数积分的几何意义或物理意义

【例 9.28】 (Ⅰ) 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$,取外侧,则 $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____;

(Ⅱ) 设 D 为平面区域:$x^2+y^2\leqslant 4$,则 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____;

(Ⅲ) 设 Ω 是球体:$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$,则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V=$ _____.

【分析】 (Ⅰ) S 围成的球体为 Ω,则由高斯公式得

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}1\mathrm{d}V=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=36\pi.\ (\text{球体的体积})$$

(Ⅱ) 由二重积分的几何意义知

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{柱体的体积}-\text{锥体的体积}$$

$$=\pi\cdot 2^2\times 2-\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\times 2=\frac{16}{3}\pi.$$

【注】 直接用极坐标变换计算也十分简单.

(Ⅲ) 由球的质心公式知

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\left(\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V,\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V,\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V\right),$$

www.TopSage.com

则 $$\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V=\frac{4}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

评注 也可作平移变换将球心移至原点，然后利用对称性，令

$u=x-a, v=y-b, w=z-c$，记 $\Omega': u^2+v^2+w^2\leqslant R^2$，则

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega'}(u+v+w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\iiint_{\Omega'}(a+b+c)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=0+\frac{4}{3}\pi R^3(a+b+c)=\frac{4}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

（七）计算第二类曲面积分选择投影方向

若 S 既可表为

$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$——S 在 xy 平面上的投影区域，

又可表为 $x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$——S 在 yz 平面上的投影区域，

则求 $\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 有计算公式

$$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad\begin{pmatrix}S\text{取上侧时取正号},\\ \text{否则取负号}\end{pmatrix}$$

及 $$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{yz}}R(x(y,z),y,z)\left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\quad\begin{pmatrix}S\text{取前侧时取正号},\\ \text{否则取负号}\end{pmatrix}$$

这里就有选择投影方向的问题，因为不同的投影方向可能影响计算的繁简.

【例 9.29】 求 $I=\iint_S(x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2=1(z\geqslant 0)$ 取上侧.

【解】 易求 S 在 xy 平面上的投影区域 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，于是

$$I=\iint_D\left[(x^2-y^2)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+(y^2-z^2)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+(z^2-x^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 $z^2=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{a^2z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{b^2z}$，因此

$$I=\iint_D\left[(x^2-y^2)\frac{x}{a^2z}+(y^2-z^2)\frac{y}{b^2z}+(z^2-x^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这里，D 关于 x,y 轴均对称，$\frac{(x^2-y^2)x}{z}$ 对 x 是奇函数，$\frac{(y^2-z^2)y}{z}$ 对 y 也是奇函数，就有

$$\iint_D\frac{(x^2-y^2)x}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad\iint_D\frac{(y^2-z^2)y}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

现归结为求

$$J=\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{D_1}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_1=D\cap\{x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

用极坐标变换：$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则

$$D_1:0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\xlongequal{\text{记}}\varphi(\theta),$$

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

于是 $$J = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) r^2 \cdot r dr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\varphi^2(\theta)} \left(\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^{\varphi(\theta)} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan\theta)}{\frac{1}{a^2} + \frac{\tan^2\theta}{b^2}}$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)^2} = ab\arctan\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\pi.$$

由对称性(将 x,y 互换,a,b 互换,D 不变)$\Rightarrow$ $\iint\limits_D \frac{x^2}{a^2}dxdy = \iint\limits_D \frac{y^2}{b^2}dxdy$

$\Rightarrow$ $$\iint\limits_D \frac{x^2}{a^2}dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \frac{1}{4}ab\pi$$

$\Rightarrow$ $$\iint\limits_D x^2 dxdy = \frac{1}{4}a^3 b\pi.$$

因此 $$I = ab\pi - \frac{ab}{2}\pi - \frac{1}{4}a^3 b\pi = \frac{ab}{4}\pi(2 - a^2).$$

评注 复习了高斯公式,请读者用高斯公式来求该曲面积分.

(八) 利用各类积分之间相互转化来简化积分计算

1. 利用格林公式将求复杂的第二类曲线积分转化为求二重积分或简单的第二类曲线积分;
2. 利用高斯公式将求复杂的曲面积分转化为求三重积分或简单的曲面积分;
3. 利用斯托克斯公式简化曲线积分计算;(注:以上方法可详见第十章)
4. 利用第一、二类曲线(曲面)积分的关系简化计算.

【例 9.30】 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma x^2 z\cos\gamma dS$,其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的下半部分,γ 是 Σ 向上的法向量与 z 轴正向的夹角.

【解】 根据两类曲面积分的关系,知 $\iint\limits_\Sigma x^2 z\cos\gamma dS = \iint\limits_\Sigma x^2 z dxdy$.

又根据 Σ 的表达式:$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,以及 γ 为锐角,因此

$$\text{原式} = \iint\limits_D x^2\left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)dxdy = -\iint\limits_D r^3\sqrt{a^2 - r^2}\cos^2\theta dr d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \int_0^a r^3\sqrt{a^2 - r^2}dr \xlongequal{r = a\sin t} -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^3 t a^2\cos^2 t dt$$

$$= -\pi a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t - \sin^5 t)dt = -\pi a^5\left(\frac{2}{3} - \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1}\right) = -\frac{2}{15}\pi a^5,$$

其中 D 为 Σ 在 xOy 平面上的投影,实际上 D 为圆:$x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

(九) 利用第二类曲线积分与路径无关的条件简化计算

(这部分内容可参见第十章四之(四))

www.TopSage.com

五、多元函数积分学的几何应用

(一) 空间图形的体积

▶1. **平行截面面积为已知的立体的体积**(见第三章七(四)1.)

▶2. **旋转体的体积**(见第三章七(四)2.)

▶3. **柱形长条区域的体积**

(1) 设 $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,$z_1(x,y) \leqslant z_2(x,y)$. Ω 是由曲面 $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ 及以 D 的边界为准线,母线平行于 z 轴的柱面所围成的空间区域(可称为柱形长条区域,如图 9.34),则 Ω 的体积为

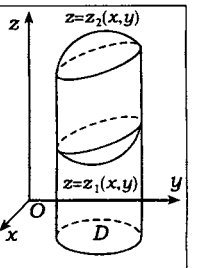


图 9.34

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \iint_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D}[z_2(x,y) - z_1(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 特别地,$z_1(x,y) = 0$, $z_2(x,y) = f(x,y)$,得曲顶柱体的体积为

$$V = \iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【例 9.31】 设 Ω 为曲面 $x^2 + y^2 = az$ 与 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的空间区域(如图 9.35),求它的体积,其中 $a > 0$.

【解法一】 用柱形长条区域的体积公式——求一个二重积分.

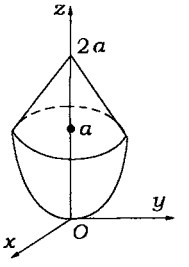


图 9.35

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = az, \\ z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ 消去 z,得投影柱面 $x^2 + y^2 = a^2$,于是,Ω 在 xy 平面上投影区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant a^2$. 该立体

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid \frac{x^2 + y^2}{a} \leqslant z \leqslant 2a - \sqrt{x^2 + y^2}, (x,y) \in D\right\}.$$

因此,Ω 的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D}\left(2a - \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\left(2a - r - \frac{r^2}{a}\right)r\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\left(ar^2 - \frac{1}{3}r^3 - \frac{r^4}{4a}\right)\Big|_0^{a} = \frac{5}{6}\pi a^3. \end{aligned}$$

【解法二】 用三重积分表示区域 Ω 的体积公式. 区域 Ω 的体积为 $V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

用先二后一的顺序求这个三重积分. 如【解法一】,求得曲面 $x^2 + y^2 = az$ 与 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ 的交线是 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = a. \end{cases}$ 过 z 轴上点 z 与 z 轴垂直的平面截 Ω 得平面区域 $D(z)$,则 $D(z)$ 的面积为

$$S(z) = \begin{cases} \pi az, & 0 \leqslant z \leqslant a, \\ (2a - z)^2\pi, & a \leqslant z \leqslant 2a. \end{cases}$$

因此,Ω 的体积为

$$V = \int_0^{2a}\left(\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \int_0^{a}\pi az\,\mathrm{d}z + \int_a^{2a}\pi(2a - z)^2\,\mathrm{d}z$$

www.TopSage.com

$$= \frac{1}{2}\pi a z^2 \Big|_0^a + \frac{1}{3}\pi(z-2a)^3 \Big|_a^{2a} = \frac{\pi}{2}a^3 + \frac{\pi}{3}a^3 = \frac{5}{6}\pi a^3.$$

【解法三】 直接用定积分求旋转体的体积. 求 Ω 的体积,即求由 yz 平面上的曲线

$$y = \sqrt{az}\ (0 \leqslant z \leqslant a), \quad y = 2a - z\ (a \leqslant z \leqslant 2a).$$

绕 z 轴旋转而成的旋转体的体积,按旋转体体积公式得

$$V = \pi\int_0^{2a} y^2(z)\,\mathrm{d}z = \pi\int_0^a az\,\mathrm{d}z + \pi\int_a^{2a}(2a-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{5}{6}\pi a^3.$$

(二) 曲面面积

▶1. **旋转面的面积**(见第三章七之(五))

▶2. **一般曲面的面积**

设空间某平面图形的面积为 A,该平面图形在 xy 平面上的投影的面积为 σ,则

$$A = \frac{\sigma}{|\cos\gamma|},$$

其中 γ 是平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向的夹角(图 9.36).

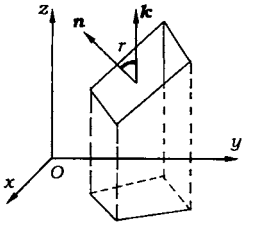


图 9.36

(1) 设曲面 S 由方程 $z = f(x,y)$ $((x,y) \in D)$ 给出,D 为 S 在 xy 平面上的投影区域,$f(x,y)$ 在有界闭区域 D 有连续的偏导数 f'_x, f'_y,S 上任意点处的单位法向量 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}(-f'_x,-f'_y,1)$,则 S 的面积为

$$A = \iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{|\cos\gamma|} = \iint_D \sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 γ 是曲面 S 的法向量与 z 轴正向的夹角.

(2) 若曲面 S 的方程为 $x = g(y,z)$ $((y,z) \in D_{yz})$ 或 $y = h(z,x)$ $((z,x) \in D_{zx})$,则可得类似的曲面面积计算公式.

(3) 柱面被曲面所截部分的面积:设有 Oxy 平面上的光滑曲线 L,以 L 为准线,母线平行于 z 轴作柱面,此柱面在 xy 平面与连续曲面 $z = f(x,y)$ $(\geqslant 0)$ 之间部分的面积为 $A = \int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$.

【例 9.32】 求曲面 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 介于 xOy 平面与曲面 $z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 之间的部分的面积(如图 9.37).

【分析与求解一】 记这部分曲面为 Σ,它关于 yz 平面对称,第一卦限部分曲面方程

$$x = \sqrt{2y-y^2}, \quad (y,z) \in D_{yz}.$$

于是 Σ 的面积 S 为

$$S = 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

先求曲面微元表达式:

$$x'_y = \frac{1-y}{\sqrt{2y-y^2}}, \quad x'_z = 0,$$

$$\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z} = \sqrt{\frac{2y-y^2+(1-y)^2}{2y-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}.$$

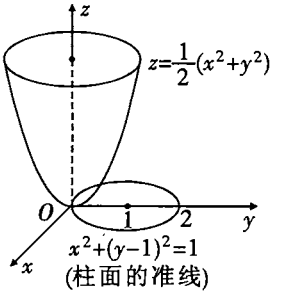


图 9.37

www.TopSage.com

再求投影区域D_{yz}. 由$\begin{cases} z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$消去$x$得$z = y$,这是$D_{yz}$的一条边界,另外的边界线是柱面$x^2 + (y-1)^2 = 1$与$yz$平面的交线,即$y = 2$以及$y$轴(如图9.38),于是

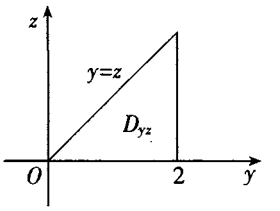


图 9.38

$$D_{yz}:\ 0 \leqslant z \leqslant y, 0 \leqslant y \leqslant 2.$$

最后可求
$$S = 2\iint_{D_{yz}} \frac{1}{\sqrt{1-(y-1)^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-(y-1)^2}}\mathrm{d}z$$
$$= 2\int_0^2 \frac{y}{\sqrt{1-(y-1)^2}}\mathrm{d}y \xlongequal{t = y-1} 2\int_{-1}^1 \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$
$$= 2\left(0 + \arcsin t \Big|_{-1}^{1}\right) = 2\pi.$$

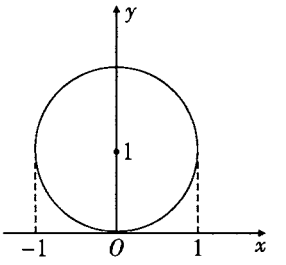


图 9.39

【分析与求解二】 柱面$x^2 + (y-1)^2 = 1$的准线是xOy平面上的圆周C:$x^2 + (y-1)^2 = 1$(如图9.39),按柱面介于坐标面与它的上方曲面之间部分的面积公式,有

$$S = \int_C \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\mathrm{d}s.$$

在C上,$x^2 + y^2 = 2y$,于是

$$S = \int_C \frac{1}{2} \cdot 2y\mathrm{d}s = \int_C y\mathrm{d}s.$$

曲线C的参数方程:$x = \cos t,\ \ y = 1 + \sin t, t \in [0, 2\pi]$,又$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 1$,因此

$$S = \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)\mathrm{d}t = 2\pi.$$

评注 ①设有Oxy平面上的光滑曲线L,以L为准线,母线平行于z轴作柱面,此柱面在xy平面与连续曲面$z = f(x,y)(\geqslant 0)$之间部分的面积为

$$S = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s.$$

本题中【分析与求解二】用的就是这个公式.

②我们也可用圆周C的显式方程$y - 1 = \pm\sqrt{1-x^2}$来计算曲线积分$\int_C y\mathrm{d}s$.此时将C分成$y = 1$上方与下方两部分,分别记为C_1与C_2,在C_1与C_2上$\sqrt{1 + y_x'^2}$相同,于是

$$S = \int_C y\mathrm{d}s = \int_C (y-1)\mathrm{d}s + \int_C \mathrm{d}s = \int_{C_1} (y-1)\mathrm{d}s + \int_{C_2} (y-1)\mathrm{d}s + 2\pi$$
$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1 + y_x'^2}\mathrm{d}x - \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1 + y_x'^2}\mathrm{d}x + 2\pi = 2\pi.$$

③【分析与求解一】中对曲面$\Sigma: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$,用的是面积计算公式

$$S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中关键的步骤是对具体的曲面Σ,求它在yz坐标面上的投影区域D_{yz}.

六、多元函数积分学的物理应用

利用各类积分可以解决相应类型的物体的质量、质心、形心、转动惯量,对质点的引力及功与流量等

www.TopSage.com

问题. 解决这类问题的基本步骤是：

第一步，首先知道 n 个质点组的质点系的质量，质心，惯动惯量，对质点的引力等；

第二步，把相应的物体分割，近似看成 n 个质点组成的质点系，求出这些量的近似值；

第三步，无限细分，令 $n\to\infty$ 就得到这些量的相应的积分表示．

【注】 上述步骤可用微元法代替．

（一）质量、质心、形心与转动惯量

▶1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，n 个质点组成的质点组 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，质量 $m_i,i=1,2,\cdots,n$，则质点组的

(1) 质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_im_i,\sum\limits_{i=1}^{n}y_im_i,\sum\limits_{i=1}^{n}z_im_i\right)/\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$；

(2) 关于直线 L 与点 P 的转动惯量分别为 $I_L=\sum\limits_{i=1}^{n}r_i^2m_i$，$I_P=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i^2m_i$，其中 r_i,d_i 分别是点 M_i 到直线 L 与点 P 的距离．

▶2. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，物体占据空间区域 Ω，体密度为 $\rho(x,y,z)$，则

(1) 质量 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$；

(2) 质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V,\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V,\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V\right)/\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}V$，

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 也叫做空间区域 Ω 的形心；

(3) 关于 x,y,z 轴及原点的转动惯量分别为

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V,\quad I_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V,$$

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V,\quad I_o=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V.$$

▶3. 对于平面薄片，若知其面密度，或曲面形物体知其面密度，或曲线形物体知其线密度，均可类似地得到质量、质心及转动惯量等相应的积分表达式．这时物体的质心也是相应的几何图形的形心．

（二）引力计算

▶1. 质点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$M_i(x_i,y_i,z_i)$ 的质量分别为 m_0 与 m_i，则 M_i 对 M_0 的引力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{km_0m_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i,$$

其中 k 为引力常数，$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{M_0M_i}=(x_i-x_0,y_i-y_0,z_i-z_0)$，

$$r_i=|\boldsymbol{r}_i|=[(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

▶2. 空间曲线 L 对 L 外点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处质量为 m_0 的质点的引力为

$$\boldsymbol{F}=\int_L km_0\rho(x,y,z)\frac{1}{r^3}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\rho(x,y,z)$ 是 L 的线密度．

▶3. 空间曲面 S 或空间区域 Ω 对其外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处质量为 m_0 的质点的引力分别有类似的曲面积分与三重积分表达式．（有关例子参见本章题型训练七之题 16.）

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

（三）功的计算

▶1. 点 M 在常力 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 作用下由 $A(x_A,y_A,z_A)$ 沿直线运动到 $B(x_B,y_B,z_B)$，则力 $\boldsymbol{F}$ 做的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=P\cdot(x_B-x_A)+Q\cdot(y_B-y_A)+R(z_B-z_A).$$

▶2. 质点 M 在变力 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 作用下由 A 点沿曲线 C 运动到 B 点，则 $\boldsymbol{F}$ 对质点 M 做的功为

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

▶3. 质点 M 在平面力 $\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 的作用下由 A 点沿平面曲线 C 运动到 B 点，则 $\boldsymbol{F}$ 对质点 M 做的功为

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

（四）流量计算

▶1. 流体在空间流动，流速 $\boldsymbol{v}$ 为常向量，则单位时间内流过定向平面上区域 D 的流体体积（即体积流量，简称流量）为

$$q=|\boldsymbol{v}|\cos\theta\cdot S=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是定向平面的单位法向量，θ 是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角，S 是 D 的面积（图 9.40）.

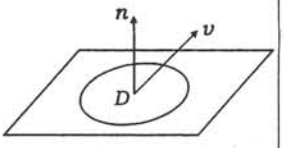


图 9.40

▶2. 流体在空间流动，流速为

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)),$$

则流体流过定向曲面 S 的流量为

$$q=\iint_S\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的单位向量，且 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

【例 9.33】 记 I_l 为物体对 l 轴的转动惯量，$I_{\bar{l}}$ 为对平行于 l 轴并通过物体质心的轴 $\bar{l}$ 的转动惯量，d 为两轴间的距离，M 为物体的质量，证明：$I_l=I_{\bar{l}}+Md^2$.

【证明】 取 l 轴为 Oz 轴，按右手系建立直角坐标系（如图 9.41）. 设物体占有空间区域 Ω，物体的质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则由已知条件有

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2=d^2,\quad \bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega\rho x\mathrm{d}V,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega\rho y\mathrm{d}V,$$

其中 ρ 为物体的体密度.

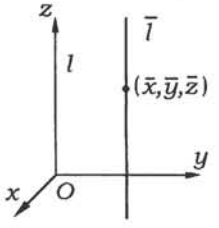


图 9.41

物体对 $\bar{l}$ 的转动惯量为

$$I_{\bar{l}}=\iiint_\Omega\rho[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]\mathrm{d}V$$

$$=\iiint_\Omega\rho(x^2+y^2)\mathrm{d}V+\iiint_\Omega\rho(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\mathrm{d}V-2\iiint_\Omega(x\bar{x}+y\bar{y})\rho\mathrm{d}V$$

$$=I_l+d^2M-2\bar{x}\iiint_\Omega x\rho\mathrm{d}V-2\bar{y}\iiint_\Omega y\rho\mathrm{d}V=I_l+d^2M-2M(\bar{x}^2+\bar{y}^2)=I_l-d^2M,$$

即 $$I_l=I_{\bar{l}}+Md^2.$$

【例 9.34】 设一均匀物体由两曲面 $x^2+y^2=az$，$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围成，求此物体质

www.TopSage.com

心.

【解】 根据质量分布的均匀性以及图形关于 z 轴的对称性可知,质心的坐标为 $(0,0,z^*)$,由质心坐标的计算公式得

$$z^* = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho \mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} \rho \mathrm{d}V} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V},$$

其中 Ω 是该物体占据的空间区域,ρ 是物体的体密度,它为常数.

在【例 9.31】中已经求得 $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = \frac{5}{6}\pi a^3$. 用先二后一的顺序求三重积分:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V &= \int_0^{2a}\Big(\iint\limits_{D(z)} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z = \int_0^a z\cdot \pi a z\mathrm{d}z + \int_a^{2a} z\pi(2a-z)^2\mathrm{d}z\\ &= \pi a\cdot\frac{1}{3}z^3\Big|_0^a + \pi\int_a^{2a}(z-2a)^3\mathrm{d}z + \pi\int_a^{2a}2a(z-2a)^2\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{3}\pi a^4 + \frac{\pi}{4}(z-2a)^4\Big|_a^{2a} + \frac{2\pi a}{3}(z-2a)^3\Big|_a^{2a}\\ &= \frac{1}{3}\pi a^4 - \frac{\pi}{4}a^4 + \frac{2}{3}\pi a^4 = \frac{3}{4}\pi a^4,\end{aligned}$$

因此 $z^* = \frac{3}{4}\pi a^4 / \frac{5}{6}\pi a^3 = \frac{9}{10}a$,所求质心为 $\Big(0,0,\frac{9}{10}a\Big)$.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 积分值的比较与估计

【例 9.35】 比较下列积分值的大小:

(Ⅰ) $I_1 = \iint\limits_D \ln^3(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_2 = \iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_3 = \iint\limits_D [\sin(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 D 由 $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}, x+y=1$ 围成,则 I_1, I_2, I_3 之间的大小顺序为

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$. (C) $I_1 < I_3 < I_2$. (D) $I_3 < I_1 < I_2$.

(Ⅱ) $J_i = \iint\limits_{D_i} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, i=1,2,3$,其中

$D_1 = \{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$, $D_2 = \{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant 2R^2\}$, $D_3 = \{(x,y)\mid |x|\leqslant R, |y|\leqslant R\}$.

则 J_1, J_2, J_3 之间的大小顺序为

(A) $J_1 < J_2 < J_3$. (B) $J_2 < J_3 < J_1$. (C) $J_1 < J_3 < J_2$. (D) $J_3 < J_2 < J_1$.

【分析】 题(Ⅰ)中,积分区域相同,被积函数连续,可通过比较被积函数来判断;题(Ⅱ)中被积函数相同,连续且是正的,可通过比较积分区域来判断积分值的大小.

(Ⅰ) 在区域 D 上,$\frac{1}{2} \leqslant x+y \leqslant 1$. 当 $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ 时, $\ln t \leqslant \sin t \leqslant t$,从而有 $(x,y)\in D$ 时,

$$\ln^3(x+y) \leqslant \sin^3(x+y) \leqslant (x+y)^3,$$

则

$$\iint\limits_D \ln^3(x+y)\mathrm{d}\sigma < \iint\limits_D \sin^3(x+y)\mathrm{d}\sigma < \iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma.$$

www.TopSage.com

因此选(C).

(Ⅱ)D_1, D_2 是以原点为圆心,半径分别为 $R, \sqrt{2}R$ 的圆,D_3 是正方形,显然有 $D_1 \subset D_3 \subset D_2$.因此(C) 成立 .

题型二　有关多元函数积分的概念与性质的命题

【例 9.36】　设 D 是有界闭区域,下列命题中错误的是

(A)　若 $f(x,y)$ 在 D 连续,对 D 的任何子区域 D_0 均有 $\iint\limits_{D_0} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$,则 $f(x,y) \equiv 0(\forall (x,y) \in D)$.

(B)　若 $f(x,y)$ 在 D 可积,$f(x,y) \geqslant 0$ 但不恒等于 0　$((x,y) \in D)$,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma > 0$.

(C)　若 $f(x,y)$ 在 D 连续,$\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$,则 $f(x,y) \equiv 0$　$((x,y) \in D)$.

(D)　若 $f(x,y)$ 在 D 连续,$f(x,y) > 0$　$((x,y) \in D)$,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma > 0$.

【分析】　直接指出其中某命题不正确 .

因为改变有限个点的函数值不改变函数的可积性及相应的积分值,因此命题(B) 不正确 .

设 (x_0,y_0) 是 D 中某点,令 $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in D\backslash\{(x_0,y_0)\}, \\ 1, & (x,y) = (x_0,y_0), \end{cases}$ 则在区域 D 上 $f(x,y) \geqslant 0$ 且不恒等于 0,但 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$. 因此选(B).

或直接证明其中三个是正确的 .

命题(A) 是正确的 .用反证法、连续函数的性质及二重积分的不等式性质可得证 .

若 $f(x,y)$ 在 D 不恒为零 $\Rightarrow \exists (x_0,y_0) \in D, f(x_0,y_0) \neq 0$,不妨设 $f(x_0,y_0) > 0$,由连续性 $\Rightarrow \exists$ 有界闭区域 $D_0 \subset D$,且当 $(x,y) \in D_0$ 时 $f(x,y) > 0 \Rightarrow \iint\limits_{D_0} f(x,y)\mathrm{d}\sigma > 0$,与已知条件矛盾. 因此,$f(x,y) \equiv 0$　$(\forall (x,y) \in D)$.

命题(D) 是正确的 .利用有界闭区域上连续函数达到最小值及重积分的不等式性质可得证 .

这是因为 $f(x,y) \geqslant \min\limits_D f(x,y) = f(x_0,y_0) > 0$,其中 (x_0,y_0) 是 D 中某点. 于是由二重积分的不等式性质得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \geqslant f(x_0,y_0)\sigma > 0,\text{其中 } \sigma \text{ 是 } D \text{ 的面积 .}$$

命题(C) 是正确的 .若 $f(x,y) \neq 0 \Rightarrow$ 在 $(x,y) \in D$ 上 $f^2(x,y) \geqslant 0$ 且不恒等于 0 . 由假设 $f^2(x,y)$ 在 D 连续 $\Rightarrow \iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma > 0$,与已知条件矛盾 . 于是 $f(x,y) \equiv 0$ 在 D 上成立 . 因此选(B).

注　对三重积分有类似的结论 如:设 Ω 是空间中的有界闭区域,$f(x,y,z)$ 在 Ω 连续.
① 若对 Ω 内任意子区域 Ω_0 均有 $\iiint\limits_{\Omega_0} f(x,y,z)\mathrm{d}V = 0$,则 $f(x,y,z) \equiv 0$ $(\forall (x,y,z) \in \Omega)$.
② 若 $f(x,y,z) \geqslant 0$ $(\forall (x,y,z) \in \Omega)$,$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = 0$,则 $f(x,y,z) \equiv 0$ $(\forall (x,y,z) \in \Omega)$.

www.TopSage.com

【例 9.37】 设 $f(x,y,z)$ 在 $\Omega_R=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$ 连续，又 $f(0,0,0)\neq 0$，则 $R\to 0$ 时，$\iiint\limits_{\Omega_R} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 是 R 的_____阶无穷小.

【分析】 本题就是确定 $n=?$ 使得 $\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{\iiint\limits_{\Omega_R} f(x,y,z)\mathrm{d}V}{R^n}=A\neq 0.$

由积分中值定理知，$\exists(x_0,y_0,z_0)\in\Omega_R$，使得 $\iiint\limits_{\Omega_R} f(x,y,z)\mathrm{d}V=f(x_0,y_0,z_0)\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3$，则

$$\lim_{R\to 0}\frac{\iiint\limits_{\Omega_R} f(x,y,z)\mathrm{d}V}{R^3}=\frac{4}{3}\pi f(0,0,0)\neq 0.$$

因此 $R\to 0$ 时，$\iiint\limits_{\Omega_R} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 是 R 的三阶无穷小.

题型三 对称性的应用

▶1. 三重积分的情形

【例 9.38】 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω：$x^2+y^2\leqslant 1$，$|z|\leqslant 1$.

【解】
$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\iiint\limits_{\Omega}(xy+xz+yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega\cap\{z\geqslant 0\}}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V,$$

这里 Ω 对三个坐标面均对称，$\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}V=0$ （被积函数对 x 为奇函数，Ω 关于 yz 平面对称；或被积函数对 y 为奇函数，Ω 关于 zx 平面对称）.

类似理由得 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V=0.$

最后作柱坐标变换得

$$I=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^1(r^2+z^2)r\mathrm{d}z=4\pi\int_0^1\left(r^3+\frac{1}{3}r\right)\mathrm{d}r=4\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{3}\pi.$$

▶2. 第一类曲面积分的情形

【例 9.39】 设 S 与 S_0 分别为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=R^2$，又 $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，求证：

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_0} f(x+a,y+b,z+c)\mathrm{d}S.$$

【分析与证明】 我们将证 $\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 的二重积分表示即是 $\iint\limits_{S_0} f(x+a,y+b,z+c)\mathrm{d}S$ 的二重积分表示.

球面 S 的方程可写成：

$$z=c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\xlongequal{\text{记为}}z_1(x,y),$$
$$z=c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\xlongequal{\text{记为}}z_2(x,y),$$

并分别记为 S_1 与 S_2. 它们在 xy 平面上的投影区域为 D_{xy}：$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$，且

www.TopSage.com

$$dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}}dxdy,$$

则 $\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{f(x,y,z_1(x,y)) + f(x,y,z_2(x,y))}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}}Rdxdy$.

对二重积分作平移变换:$u = x - a, v = y - b$,可得

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D'_{uv}} \frac{f(u+a,v+b,\tilde{z}_1(u,v)) + f(u+a,v+b,\tilde{z}_2(u,v))}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}Rdudv,$$

其中 $D'_{uv}: u^2 + v^2 \leqslant R^2$, $\tilde{z}_1(u,v) = c + \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$, $\tilde{z}_2 = c - \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$. 将 u,v 换成 x,y,上述二重积分也是 $\iint\limits_{S_0} f(x+a,y+b,z+c)dS$ 的二重积分表示. 因此结论成立.

注 ① 该例实质上就是对 $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$ 作平移变换:$u = x - a, v = y - b, w = z - c$,得

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_0} f(u+a,v+b,w+c)dS,$$

其中 $S_0: u^2 + v^2 + w^2 = R^2$.

② 有时为了利用对称性,需要对 $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$ 作平移变换.

【例 9.40】 求 $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dS$,其中

(Ⅰ)$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$; (Ⅱ)$S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

【解】 (Ⅰ)S 的方程可改写成 $(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$,是以 $(R,0,0)$ 为心,R 为半径的球面,其面积为 $4\pi R^2$,于是

$$I = \iint\limits_S 2Rxds = \iint\limits_S 2R(x-R)dS + \iint\limits_S 2R^2 dS = 0 + 8\pi R^4 = 8\pi R^4.$$

$$(Ⅱ) I = \iint\limits_S [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]dS + 2\iint\limits_S [a(x-a) + b(y-b) + c(z-c)]dS$$

$$+ \iint\limits_S (a^2 + b^2 + c^2)dS$$

$$= \iint\limits_S R^2 dS + 0 + (a^2 + b^2 + c^2)\iint\limits_S dS = 4\pi R^4 + (a^2 + b^2 + c^2)4\pi R^2.$$

注 这里,实质上关于利用对称性,对面积分等于平移变换:题(Ⅰ)中,$u = x - a, v = y, w = z$,则 $\iint\limits_S (x-R)dS = \iint\limits_{u^2+v^2+w^2=R^2} udS = 0$.

题(Ⅱ)中,$u = x - a, v = y - b, w = z - c$,则

$$\iint\limits_S [a(x-a) + b(y-b) + c(z-c)]dS = \iint\limits_{u^2+v^2+w^2=R^2} (au + bv + cw)dS = 0.$$

▶3. 第二类曲线积分与第二类曲面积分的情形

关于第二类曲面积分与曲线积分,在利用对称性时与第一类积分有所不同,参见下面的例题.

【例 9.41】 设 L 为平面上分段光滑的定向曲线,$P(x,y)$,$Q(x,y)$ 连续.

(Ⅰ)L 关于 y 轴对称(图 9.42),则

www.TopSage.com

$$\int_L P\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{若 } P \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数},\\ 2\int_{L_1} P\mathrm{d}x, & \text{若 } P \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数},\end{cases}\quad \int_L Q\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & \text{若 } Q \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数},\\ 2\int_{L_1} Q\mathrm{d}y, & \text{若 } Q \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数},\end{cases}$$

其中 L_1 是 L 在右半平面部分.

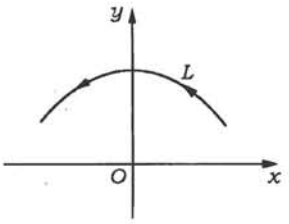


图 9.42

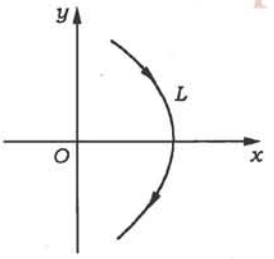


图 9.43

(Ⅱ)L 关于 x 轴对称(图 9.43),则

$$\int_L P\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{若 } P \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数},\\ 2\int_{L_1} P\mathrm{d}x, & \text{若 } P \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数},\end{cases}\quad \int_L Q\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & \text{若 } Q \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数},\\ 2\int_{L_1} Q\mathrm{d}y, & \text{若 } Q \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数},\end{cases}$$

其中 L_1 是 L 在上半平面部分.

【证明】 (Ⅰ)记 $L=L_1\cup L_2$,L_1,L_2 分别是 L 在右半平面与左半平面部分,则

$$\int_L Q\mathrm{d}y=\int_{L_1} Q\mathrm{d}y+\int_{L_2} Q\mathrm{d}y.$$

记 L_1 的参数方程为 $x=x(t)$,$y=y(t)$,t 从 a 到 b,则 L_2 是:$x=-x(t)$,$y=y(t)$,t 从 b 到 a,于是

$$\int_{L_1} Q\mathrm{d}y=\int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_{L_2} Q\mathrm{d}y=\int_b^a Q(-x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}-\int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t, & \text{若 } Q \text{ 对 } x \text{ 为偶函数},\\ \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t, & \text{若 } Q \text{ 对 } x \text{ 为奇函数}.\end{cases}$$

则有

$$\int_L Q\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & \text{若 } Q \text{ 对 } x \text{ 为偶函数},\\ 2\int_{L_1} Q\mathrm{d}y, & \text{若 } Q \text{ 对 } x \text{ 为奇函数}.\end{cases}$$

其余类似.

(Ⅱ)类似可得证.

评注 类似证明:设空间中的光滑曲线 L 关于 $x-y=0$ 平面对称,$f(x)$,$f(y)$ 在 L 上连续,则

$$\int_L f(x)\mathrm{d}s=\int_L f(y)\mathrm{d}s.$$

【例 9.42】 设 L 为 $|x|+|y|=1$,取逆时针方向,则曲线积分 $\int_L \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|+x^2}=$ _____.

【分析】 由于曲线 L 关于 x 轴与 y 轴均对称(见图 9.29),且被积函数 $P=Q=\dfrac{1}{1+x^2}$ 关于 x,y 均为偶函数,则 $I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

评注 ① 该例也可用格林公式求解.记 L 围成的区域为 D,由格林公式得

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\ (D\text{ 关于 }y\text{ 轴对称,被积函数对 }x\text{ 为奇函数.})$$

② 关于第二类曲面积分有类似情形,参见下面的例题.

www.TopSage.com

【例 9.43】 设分块光滑定向曲面 S 关于 xy 平面对称，S 在 xy 平面上方部分记为 S_1（方程为 $z = z(x,y)$，$(x,y) \in D_{xy}$），下方部分记为 S_2，又设 $R(x,y,z)$ 在 S 连续，求证：

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = \begin{cases} 0, & \text{若 } R \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数}, \\ 2\iint_{S_1} R(x,y,z)\,dxdy, & \text{若 } R \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

【证明】 $\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{S_1} R(x,y,z)\,dxdy + \iint_{S_2} R(x,y,z)\,dxdy$.

注意，由 S_1 的方程可得 S_2 的方程：$z = -z(x,y)$ $((x,y) \in D_{xy})$. 不妨设 S_1 的法向量与 z 轴正向成锐角，于是 S_2 的法向量与 z 轴正向成钝角. 将曲面积分化为二重积分得

$$\iint_{S_1} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy,$$

$$\iint_{S_2} R(x,y,z)\,dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,-z(x,y))\,dxdy$$

$$= \begin{cases} -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy, & \text{若 } R \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数}, \\ \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy, & \text{若 } R \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

将两式相加即得结论.

▶4. 变量轮换对称性的情形

【例 9.44】 计算 $\oint_L (x^2 + y^2)\,ds$，其中 L 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x + y + z = 1$ 的交线.

【解】 由于积分弧段关于 x,y,z 是对称的，所以由坐标的轮换对称性（坐标轴名称互换时，曲线 L 的方程不变）得

$$\oint_L x^2\,ds = \oint_L y^2\,ds = \oint_L z^2\,ds, \quad \oint_L (x^2 + y^2)\,ds = \frac{2}{3}\oint_L (x^2 + y^2 + z^2)\,ds = \frac{2}{3}\oint_L ds.$$

这样，所要计算的就是 L 的长度.

L 为球面与平面的交线，所以它是圆，现求它的半径 r. 原点 O 到平面 $x + y + z = 1$ 的距离是 $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$，因此 L 的半径为 $r = \sqrt{1 - d^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$，于是

$$\oint_L (x^2 + y^2)\,ds = \frac{2}{3} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{6}\pi.$$

题型四　交换积分顺序与计算累次积分

【解题思路】 解此类题型的具体步骤为：第一步，由累次积分的上、下限给出积分域所满足的不等式组；第二步，画出积分域的草图；第三步，给出新的累次积分的上下限.

【例 9.45】 交换累次积分的积分顺序：$I = \int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$.

【分析】 将累次积分表为 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$，累次积分的表示式表明：积分区域 D 由两部分构成，当 $0 \leqslant x$

www.TopSage.com

$\leqslant 1$ 时，区域 D 的下侧边界为 $y=-\sqrt{x}$，上侧边界为 $y=\sqrt{x}$；当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，D 的下侧边界为 $y=x-2$，上侧边界为 $y=\sqrt{x}$. 由此可见

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}\cup\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 4, x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}.$$

其图形为图 9.44 所示，改变积分顺序，先对 x 求积分，就要把区域 D 的边界表成 y 的函数，即 D 的左侧边界为 $x=y^2$，右侧边界为 $x=y+2$，最后再求出 $x=y^2$ 与 $x=y+2$ 的两个交点，即可将新的累次积分写出.

【解】 先对 x 积分，就是从区域 D 的左侧边界 $x=y^2$ 到右侧边界 $x=y+2$. 两边界线的交点为 $(1,-1)$ 与 $(4,2)$，于是由 (9.8) 式得

$$I=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\,dx.$$

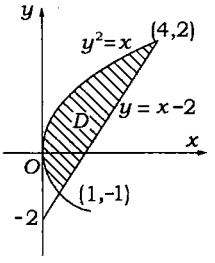


图 9.44

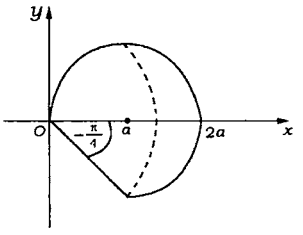


图 9.45

【例 9.46】 将极坐标变换后的二重积分 $\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta$ 的如下累次积分交换积分顺序：

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2a\cos\theta}F(r,\theta)\,dr,\text{其中 }F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r.$$

【分析】 在直角坐标系中画出 D 的图形，然后交换积分顺序确定积分限. 或在 $O\theta r$ 直角坐标系中画出 D' 的图形，然后交换积分顺序.

【解】 $r=2a\cos\theta$ 是圆周 $x^2+y^2=2ax$，即 $(x-a)^2+y^2=a^2$，因此 D 的图形如图 9.45 所示. 为了先 θ 后 r 的积分顺序，将 D 分成两块，如图 9.45 虚线所示，$D=D_1\cup D_2$，且

$$D_1=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}a,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\arccos\frac{r}{2a}\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\mid\sqrt{2}a\leqslant r\leqslant 2a,\ -\arccos\frac{r}{2a}\leqslant\theta\leqslant\arccos\frac{r}{2a}\right\}.$$

因此

$$I=\int_0^{\sqrt{2}a}dr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}}F(r,\theta)\,d\theta+\int_{\sqrt{2}a}^{2a}dr\int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}F(r,\theta)\,d\theta.\qquad(*)$$

评注 先对 θ 的 $O\theta r$ 直角坐标系中画出积分区域 D' 的图形，如图 9.46 所示，为改换积分顺序，将 D' 分成两块：

$$D'_1:0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}a,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\arccos\frac{r}{2a};$$

$$\sqrt{2}a\leqslant r\leqslant 2a,\ -\arccos\frac{r}{2a}\leqslant\theta\leqslant\arccos\frac{r}{2a}$$

于是得 $(*)$ 式.

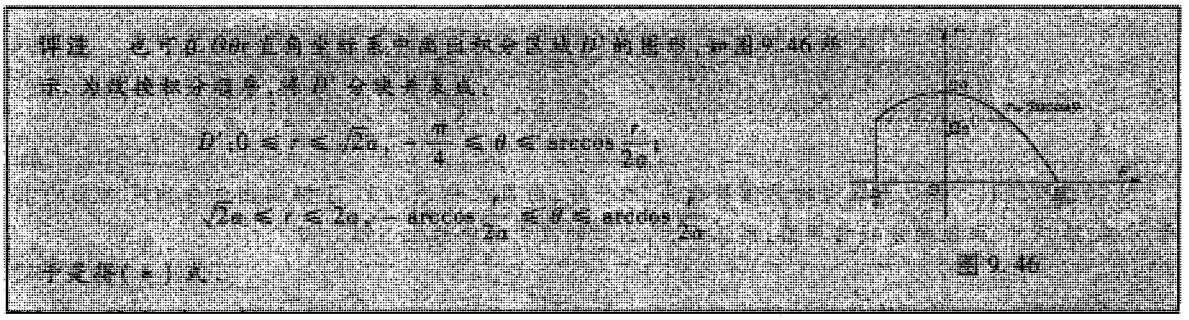


图 9.46

【例 9.47】 计算累次积分：$I=\int_0^1dx\int_1^{x+1}ydy+\int_1^2dx\int_x^{x+1}ydy+\int_2^3dx\int_x^3ydy.$

【分析】 本题实质上是二重积分的计算，而且已经化成了累次积分，但由于这里项数较多，计算起

www.TopSage.com

来较复杂,所以不宜先对 y 积分,必须先确定积分区域 D,然后再交换积分顺序.

【解】 由累次积分限知:$0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $1 \leqslant y \leqslant x+1$;$1 \leqslant x \leqslant 2$ 时 $x \leqslant y \leqslant x+1$;$2 \leqslant x \leqslant 3$ 时 $x \leqslant y \leqslant 3$,于是积分区域 D 如图 9.47 所示,因此 D 可表示为 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 3, y-1 \leqslant x \leqslant y\}$,则

$$\text{原式} = \iint_D y\mathrm{d}\sigma = \int_1^3 \mathrm{d}y \int_{y-1}^{y} y\mathrm{d}x = \int_1^3 y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2 \Big|_1^3 = 4.$$

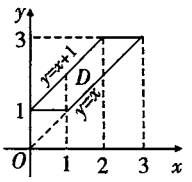


图 9.47

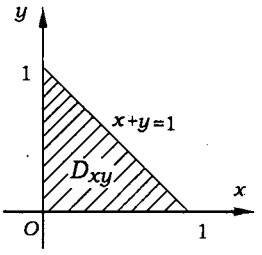


图 9.48

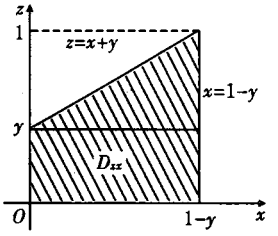


图 9.49

【例 9.48】 交换累次积分的积分顺序:

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z,\text{改换成先 } x \text{ 最后 } y \text{ 的顺序}.$$

【分析】 这是对已化成累次积分的三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$ 交换积分顺序的问题. 这时可不必画出 Ω 的图形(一般也很难画),只要把它看成是一次定积分加一次二重积分化成的,对其中的二重积分交换积分顺序,因而有时需分两步走,其中的每一步均是二重积分交换积分顺序问题. 如本题:第一步,交换 x 与 y 的次序;第二步,交换 x 与 z 的次序,就会得到以 x,z,y 的顺序的累次积分. 这种顺序交换可如同二重积分一样进行,关键步骤是画出二重积分区域的图形. 有了图形,积分限就容易写出了.

【解】 据以上分析,把该累次积分看成是三重积分按先一(z) 后二的顺序化成的,则

$$I = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

$D_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}$ 如图 9.48,交换 x 与 y 的顺序得

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}x \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

再把它看成三重积分按先二后一(y) 的顺序化成的,则

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \iint_{D_{zx}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

$D_{zx} = \{(z,x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1-y, 0 \leqslant z \leqslant x+y\}$ 如图 9.49. (对 z、x 积分时 y 是参数,z、x 变动时 y 是不变的),交换 x 与 z 的积分顺序(先对 x 积分要分块积分) 得

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}z \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x.$$

【例 9.49】 求 $I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_y^1 y\sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}z$.

【分析与求解】 希望通过交换积分顺序,比较容易地算出这个累次积分. 把它看成是三重积分 $\iiint_\Omega y\sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}V$ 按先一后二的顺序化成的. 于是

$$I = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_y^1 y\sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}z,$$

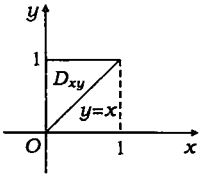


图 9.50

$D_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$. (图 9.50)

对外层积分按先 x 后 y 的顺序得

www.TopSage.com

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y dx\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}dz=\int_0^1 dy\int_y^1 y^2\sqrt{1+z^4}dz=\iint_D y^2\sqrt{1+z^4}dz,$$

其中 D 如图 9.51，按先 y 后 z 的顺序配限得

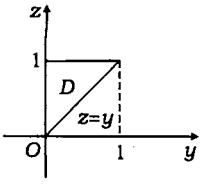


图 9.51

$$I=\int_0^1 dz\int_0^z y^2\sqrt{1+z^4}dy=\frac{1}{3}\int_0^1 z^3\sqrt{1+z^4}dz$$

$$=\frac{1}{18}(1+z^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{18}(2\sqrt{2}-1).$$

题型五　两种坐标系中累次积分的转换

【例 9.50】 将极坐标系中的累次积分转换成直角坐标系中的累次积分或相反：

(Ⅰ) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 写成直角坐标系下先对 y 后对 x 积分的累次积分；

(Ⅱ) 计算 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-x^2}dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}e^{-x^2}dx$.

【分析】 题(Ⅰ)是极坐标变换下的累次积分，先写成 $\iint_D f(x,y)dxdy$，确定积分区域 D，再化成累次积分．题(Ⅱ)中无论是先对 x，还是先对 y 积分都很难进行，这是因为 e^{-x^2}，e^{-y^2} 的原函数不是初等函数，所以必须改用其他坐标系．又由于被积函数属 $f(x^2+y^2)$ 的形式，因此选用极坐标系较方便．

【解】 (Ⅰ) D 的极坐标表示：$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant\sin\theta$，即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi,r^2\leqslant r\sin\theta$，即 $x^2+y^2\leqslant y$，$x\leqslant 0$，则 D 为左半圆域：$x^2+y^2\leqslant y,x\leqslant 0$，即 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,x\leqslant 0$．

先对 y 后对 x 积分，D：$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0,\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$，于是

$$\text{原式}=\int_{-\frac{1}{2}}^0 dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f(x,y)dy.$$

(Ⅱ) 积分区域 D 为扇形 $\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}R,0\leqslant x\leqslant y\right\}\cup\left\{(x,y)\mid\frac{\sqrt{2}}{2}R\leqslant y\leqslant R,0\leqslant x\leqslant\sqrt{R^2-y^2}\right\}$，即 $\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}R,x\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\right\}=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant R,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，

所以　$\text{原式}=\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-R^2})=\frac{\pi}{8}(1-e^{-R^2})$.

题型六　二重积分的计算

▶1. 求适宜于直角坐标系的二重积分

积分域不是圆，被积函数中不含平方和时，一般使用直角坐标系．特别地，若积分域为矩形更宜用直角坐标系．

【例 9.51】 计算 $\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{2a-x}}(a>0)$，其中 D 是由圆心在点 (a,a)、半径为 a 且与坐标轴相切的圆周的较短一段弧和坐标轴所围成的区域．

www.TopSage.com

【解】 由于圆的方程为：$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$，区域 D 的边界所涉及的圆弧为 $y=a-\sqrt{2ax-x^2}$，所以

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dy=\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2a-x}}(a-\sqrt{2ax-x^2})\,dx$$

$$=\int_0^a\left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}}-\sqrt{x}\right)dx=\left(-2a\sqrt{2a-x}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^a=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a^{\frac{3}{2}}.$$

评注 本题的积分域涉及圆，本可以考虑使用极坐标系，然而这段圆弧的极坐标表达式并不简单，同时被积函数化为极坐标后也会增加难度，所以使用直角坐标系比较简单.

【例 9.52】 计算二重积分 $\iint_D \big||x+y|-2\big|\,dxdy$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant 2,-2\leqslant y\leqslant 2$.

【解】 因 $\big||x+y|-2\big|=\begin{cases}|x+y-2|, & y\geqslant -x,\\ |x+y+2|, & y\leqslant -x\end{cases}$

$$=\begin{cases}x+y-2, & y\geqslant -x+2,\\ 2-x-y, & -x\leqslant y\leqslant -x+2,\\ x+y+2, & -x-2\leqslant y\leqslant -x,\end{cases}$$

如图 9.52，用直线 $y=-x+2$，$y=-x$ 将 D 分成 D_1，D_2 与 D_3. 于是

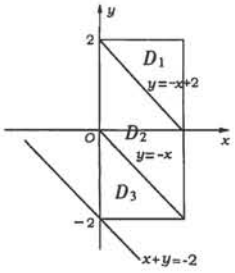


图 9.52

$$I=\iint_{D_1}(x+y-2)\,dxdy+\iint_{D_2}(2-x-y)\,dxdy+\iint_{D_3}(x+y+2)\,dxdy$$

$$=\iint_{D_1\cup D_2\cup D_3}(x+y)\,dxdy-2\iint_{D_2}(x+y)\,dxdy-2\iint_{D_1}dxdy+2\iint_{D_2}dxdy+2\iint_{D_3}dxdy$$

$$=\iint_D(x+y)\,dxdy-2\iint_{D_2}(x+y)\,dxdy+2\iint_{D_2}dxdy$$

$$=\iint_D(x-1)\,dxdy+\iint_D dxdy-2\iint_{D_2}(x-1+y)\,dxdy-2\iint_{D_2}dxdy+8$$

$$=0+8-0-8+8=8.$$

评注 ① 本例用的是分块积分法，因为被积函数是多元分段函数.

② 在解题过程中最后几步用到了平移变换，平移的目的是为了利用对称性来简化计算：

$$\iint_D(x-1)\,dxdy\xrightarrow{\substack{u=x-1\\ v=y}}\iint_{\substack{-1\leqslant u\leqslant 1\\ -2\leqslant v\leqslant 2}}u\,dudv=0,$$

$$\iint_{D_2}(x-1+y)\,dxdy\xrightarrow{\substack{u=x-1\\ v=y}}\iint_{\substack{-1\leqslant u\leqslant 1\\ -1\leqslant u+v\leqslant 1}}(u+v)\,dudv=0.$$

（积分区域关于原点对称，被积函数对 (u,v) 为奇函数.）

►2. 求适宜于极坐标系的二重积分

【例 9.53】 计算下列二重积分：

（Ⅰ）$\iint_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由曲线 $r=\sin 2\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 围成的区域；

（Ⅱ）$\iint_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x^2+(y-1)^2=1$ 与 y 轴围成的在右上方的部分.

【分析】 第（Ⅱ）小题的积分域涉及两个圆，自然应该用极坐标系. 第（Ⅰ）小题尽管与圆无关，但是，若改用直角坐标系，则边界曲线的表达式很复杂，所以也应该用极坐标系.

www.TopSage.com

【解】 （Ⅰ）积分域 D 见图 9.53. D 的极坐标表示是：$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \sin 2\theta$，于是

$$\text{原式} = \iint_D r^2 \cos\theta \sin\theta \cdot r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin 2\theta} r^3 \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\sin 2\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \frac{1}{4} \sin^4 2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 2\theta \mathrm{d}\theta \xlongequal{t = 2\theta} \frac{1}{16} \int_0^{\pi} \sin^5 t \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \mathrm{d}t = \frac{1}{8} \cdot \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{1}{15}.$$

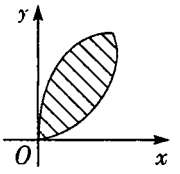


图 9.53

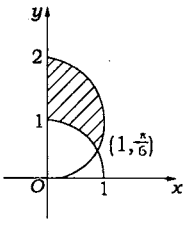


图 9.54

（Ⅱ）选用极坐标系，所涉及两个圆的极坐标方程为 $r = 1$ 与 $r = 2\sin\theta$，交点的极坐标为 $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$（见图 9.54），于是积分域 D 的极坐标表示为 $D = \left\{(r,\theta) \mid \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 1 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta\right\}$，则

$$\iint_D xy \mathrm{d}\sigma = \iint_D r^3 \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta \int_1^{2\sin\theta} r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \cdot r^4 \Big|_1^{2\sin\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin^5\theta \cos\theta - \frac{1}{4} \sin\theta \cos\theta\right) \mathrm{d}\theta = \left(\frac{2}{3} \sin^6\theta - \frac{1}{8} \sin^2\theta\right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{16}.$$

▶3. 用适当方法求二重积分

【例 9.54】 求下列二重积分：

（Ⅰ）$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$，其中 D 为正方形域：$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$；

（Ⅱ）$I = \iint_D |3x + 4y| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$；

（Ⅲ）$I = \iint_D y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成.

【解】 考察积分区域与被积函数的特点，选择适当方法求解.

（Ⅰ）尽管 D 的边界不是圆弧，但由被积函数的特点知选用极坐标比较方便.

D 的边界线 $x = 1$ 及 $y = 1$ 的极坐标方程分别为

$$r = \frac{1}{\cos\theta} \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right), \quad r = \frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \frac{r\mathrm{d}r}{(1 + r^2)^{3/2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \frac{r\mathrm{d}r}{(1 + r^2)^{3/2}}$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} \Big|_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \mathrm{d}\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} \Big|_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 + \cos^2\theta}}\right) \mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + \sin^2\theta}}\right) \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 + \cos^2\theta}}\right) \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\sqrt{2 - \sin^2\theta}}\right]$$

www.TopSage.com

$$= \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

评注　本题积分区域 D 关于直线 $y = x$ 对称，$D = D_1 \cup D_2$，其中

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}, \quad D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}.$$

记 $f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $f(x,y) = f(y,x)$，于是 $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(y,x)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，

从而 $I = \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta} \frac{r\mathrm{d}r}{(1+r^2)\sqrt{r^2}}$

这样计算更简单

（Ⅱ）在积分区域 D 上被积函数分块表示，若用分块积分法较复杂．因 D 是圆域，可用极坐标变换，转化为考虑定积分的被积函数是分段表示的情形．这时可利用周期函数的积分性质．

作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则 $D: 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1$．从而

$$I = \int_0^{2\pi} |3\cos\theta + 4\sin\theta| \,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r \cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{5}{3}\int_0^{2\pi} \left|\frac{3}{5}\cos\theta + \frac{4}{5}\sin\theta\right| \mathrm{d}\theta = \frac{5}{3}\int_0^{2\pi} |\sin(\theta + \theta_0)| \,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\sin\theta_0 = \frac{3}{5}, \cos\theta_0 = \frac{4}{5}$．由周期函数的积分性质，令 $t = \theta + \theta_0$ 就有

$$I = \frac{5}{3}\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \frac{5}{3}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \frac{10}{3}\int_0^{\pi} \sin t\mathrm{d}t = \frac{20}{3}.$$

（Ⅲ）D 的图形如图 9.55 所示．若把 D 看成正方形区域挖去半圆 D_1，则计算 D_1 上的积分自然选用极坐标变换．若只考虑区域 D，则自然考虑先 x 后 y 的积分顺序化为累次积分．若注意 D 关于直线 $y = 1$ 对称，选择平移变换则最为方便．

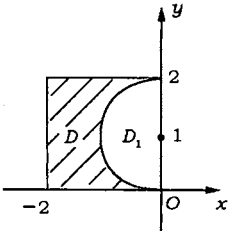


图 9.55

方法 1° 作平移变换 $u = x, v = y - 1$，注意曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 即 $x^2 + (y-1)^2 = 1, x \leqslant 0$，则 D 变成 D'．D' 由 $u = -2, v = -1, v = 1, u^2 + v^2 = 1$ $(u \leqslant 0)$ 围成，则

$$I = \iint\limits_{D'} (v+1)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0 + \iint\limits_{D'} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = S_{D'} = 4 - \frac{\pi}{2}.$$

（在 uv 平面上，D' 关于 u 轴对称）

方法 2° $\iint\limits_{D\cup D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y = 4.$

在极坐标变换下，$D_1: \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta$，从而

$$\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta \cdot r\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\theta = \pi - t} \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

于是　　$I = 4 - \frac{\pi}{2}.$

方法 3° 选择先 x 后 y 的积分顺序，D 表为 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2, -2 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2y - y^2}\}$，则

$$I = \int_0^2\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} y\mathrm{d}x = \int_0^2 y(2 - \sqrt{2y - y^2})\,\mathrm{d}y$$

www.TopSage.com

$$= \int_0^2 y[2-\sqrt{1-(y-1)^2}]\,dy \xrightarrow{y-1=t} \int_{-1}^1 (1+t)(2-\sqrt{1-t^2})\,dt$$

$$= \int_{-1}^1 (2-\sqrt{1-t^2})\,dt = 4-\frac{\pi}{2}.$$

题型七　三重积分的计算

▶1. 求适宜于直角坐标系的三重积分

【例 9.55】 求下列三重积分：

(Ⅰ) $I=\iiint_\Omega xy^2z^3\,dV$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy, y=x, z=0, x=1$ 所围成的区域；

(Ⅱ) $I=\iiint_\Omega \frac{y\sin x}{x}\,dV$，其中 Ω 由 $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$ 围成；

(Ⅲ) $I=\iiint_\Omega (1+x^4)\,dV$，其中 Ω 由曲面 $x^2=y^2+z^2, x=1, x=2$ 围成.

【分析与求解】 (Ⅰ) 空间区域 Ω 的图形不太直观，但是，它在 xOy 平面上的投影区域 D_{xy} 为由 $y=0, y=x$ 及 $x=1$ 所围成的三角形，即图 9.56 所示，并且 Ω 的下侧边界是 $z=0$，上侧边界为 $z=xy$. 这些条件对确定积分限已足够. $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant xy,(x,y)\in D_{xy}\}$，$D_{xy}: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x$.

$$\iiint_\Omega xy^2z^3\,dV=\iint_{D_{xy}} dxdy\int_0^{xy} xy^2z^3\,dz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3\,dz=\frac{1}{4}\int_0^1 xdx\int_0^x y^2z^4\Big|_0^{xy}dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364}.$$

(Ⅱ) Ω 是柱形长条区域，上顶是平面 $x+z=\frac{\pi}{2}$，下底是 Oxy 平面，即 $z=0$，侧面是柱面 $y=0, y=\sqrt{x}$，注意，$x+z=\frac{\pi}{2}$ 与 Oxy 平面交于直线 $x=\frac{\pi}{2}$，于是

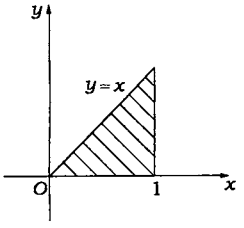


图 9.56

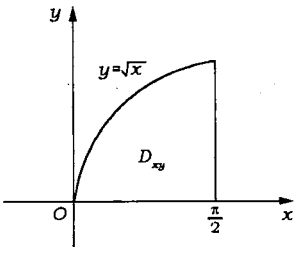


图 9.57

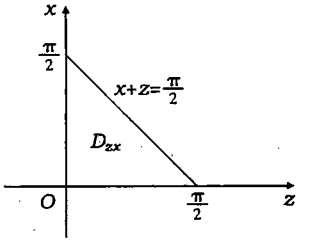


图 9.58

$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant \frac{\pi}{2}-x,(x,y)\in D_{xy}\}$，$D_{xy}$ 如图 9.57.

也可看成 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x},(x,y)\in D_{zx}\}$. 注意 $y=\sqrt{x}$ 与 Ozx 平面交于 $x=0$，D_{zx} 如图 9.58. 因此有

方法 1° $I=\iint_{D_{xy}} dxdy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\frac{y\sin x}{x}dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin x}{x}ydy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

方法 2° $I=\iint_{D_{zx}} dzdx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y\sin x}{x}dy=\iint_{D_{zx}}\frac{1}{2}\sin x\,dzdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dz\int_0^{\frac{\pi}{2}-z}\sin x\,dx$

www.TopSage.com

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-z} dz = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin z)\, dz = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

(Ⅲ)Ω是锥体(顶点是原点,对称轴是x轴)被平面$x = 1, x = 2$所截部分,被积函数只与x有关,$x \in [1,2]$,与x轴垂直平面截Ω得圆域$D(x)$,半径为x,面积为πx^2,于是用先二后一(先yz后x)的积分顺序得

$$I = \int_1^2 dx \iint_{D(x)} (1 + x^4)\, dydz = \int_1^2 (1 + x^4)\pi x^2 dx = \pi\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7\right)\Big|_1^2 = \frac{430}{21}\pi.$$

评注 若$\Omega = \{(x,y,z) \mid \alpha \le x \le \beta, (y,z) \in D_x\}$,$D_x$的面积已知为$S(x)$,又被积函数只与$x$有关,则

$$\iiint_\Omega f(x)\, dV = \int_\alpha^\beta dx \iint_{D(x)} f(x)\, dydz = \int_\alpha^\beta f(x) S(x)\, dx.$$

类似情形可表$\iiint_\Omega f(y)\, dV$,$\iiint_\Omega f(z)\, dV$.

▶2. 求适宜于球坐标系或柱坐标系的三重积分

【例 9.56】 求下列三重积分:

(Ⅰ)$I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dV$,其中$\Omega$由$z = 16(x^2 + y^2)$,$z = 4(x^2 + y^2)$,$z = 16$围成;

(Ⅱ)$I = \iiint_\Omega (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5\, dV$,其中$\Omega$由$x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$所确定;

(Ⅲ)$I = \iiint_\Omega xyz\, dV$,其中$\Omega$: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$位于第一卦限的部分.

【分析与求解】 (Ⅰ)Ω由两旋转抛物面与平面$z = 16$所围,被积函数为r^2($r = \sqrt{x^2 + y^2}$),故选用柱坐标变换.过z轴,极角为θ的半平面交Ω得平面区域$D(\theta)$为已知(图 9.59),于是用先二后一(先r,z后θ)的积分顺序化为累次积分,则有

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{D(\theta)} r^2 \cdot r\, dzdr = 2\pi\int_0^{16} dz \int_{\frac{1}{4}\sqrt{z}}^{\frac{1}{2}\sqrt{z}} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\int_0^{16} \frac{15}{2^8} z^2 dz = 40\pi.$$

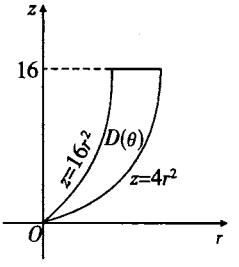


图 9.59

(Ⅱ)被积函数为$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$的函数,$\Omega$是球体: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1^2$,故选用球坐标变换.在球坐标变换下,$\Omega$: $0 \le \theta \le 2\pi$,$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$,$0 \le \rho \le 2\cos\varphi$,于是

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^5 \cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \frac{1}{8}\rho^8 \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= -\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^8 \cos^8\varphi\, d\cos\varphi = -\frac{\pi}{4}2^8 \cdot \frac{1}{9}\cos^9\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{9}\pi.$$

(Ⅲ)积分域Ω是球的一部分,球也可以看成是旋转体,所以使用球坐标系与柱坐标系都可以.

方法 1° 利用球坐标系.

$$\iiint_\Omega xyz\, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{1}{2}\sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4}\sin^4\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{6}\rho^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{48}.$$

方法 2° 利用柱坐标系.

$$\iiint_\Omega xyz\, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^3(1 - r^2)\, dr$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{48}.$$

www.TopSage.com

评注　积分域为球或球的一部分，一般不宜使用直角坐标系，因为那样常常要出现根式. 不过，由于题(Ⅲ)被积函数的特殊性，使用直角坐标系还是可以的，即

$$\text{原式}=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{(1-x^2)^2}{2}-\frac{(1-x^2)^2}{4}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^1(1-x^2)^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.$$

▶3. 用适当方法求三重积分

【例 9.57】　求下列三重积分：

(Ⅰ) $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}\mathrm{d}V$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2(h>R)$；

(Ⅱ) $I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}V$，其中 Ω：$1\leqslant x+y\leqslant 2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, 0\leqslant z\leqslant 3$；

(Ⅲ) $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}V$，其中 Ω 由半球面 $x^2+y^2+z^2=2z(z\geqslant 1)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成.

【分析与求解】　(Ⅰ) 积分区域 Ω 是球体，也是旋转体，结合被积函数特点，还是选用柱坐标变换，并选用先 r,z 的积分顺序. 极角为 θ 的半平面交 Ω 得平面区域 $D(\theta)$ 为已知(图 9.60)，于是

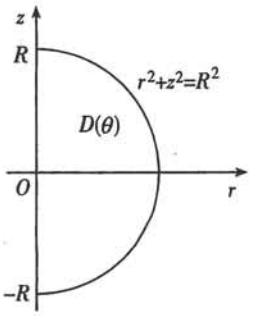


图 9.60

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{r^2+(z-h)^2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}[\sqrt{R^2+h^2-2hz}-(h-z)]\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\left[-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2h}(R^2+h^2-2hz)^{\frac{3}{2}}+\frac{(z-h)^2}{2}\right]\Big|_{-R}^{R}=\frac{4\pi R^3}{3h}.$$

(Ⅱ) Ω 可表成：Ω：$0\leqslant z\leqslant 3$，$(x,y)\in D_{xy}$，其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, 1\leqslant x+y\leqslant 2\}$，$D_{xy}$ 如图 9.61. 于是 $I=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^3 z\mathrm{d}z=\frac{9}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

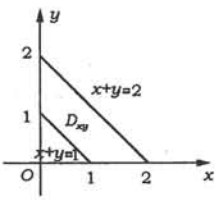


图 9.61

这里先 x 后 y 和先 y 后 x 的积分顺序均不可行. 作极坐标变换，则 D_{xy} 的极坐标表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\leqslant r\leqslant\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}.$$

于是

$$I=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r\mathrm{d}r=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\Big|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{9}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{9}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$=\frac{9}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\left(-\frac{1}{\tan\theta+1}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\mathrm{e}(\mathrm{e}^3-1).$$

(Ⅲ) 首先由对称性及奇偶性得 $I=\iiint\limits_{\Omega}z^3\mathrm{d}V$.

方法 1° Ω 由半球面及锥面围成. 用球坐标变换方便，此时 Ω 表为：

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi,$$

www.TopSage.com

则
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^3\cos^3\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\sin\varphi\frac{1}{6}\rho^6\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=-\frac{\pi}{30}2^6\cos^{10}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{31}{15}\pi.$$

方法2° 被积函数只与z有关,与z轴垂直的截面区域$D(z)$为已知,但要分段求它的面积.球与锥的交线是$z=1,x^2+y^2=1$,于是
$$I=\int_0^1dz\iint_{D(z)}z^3dxdy+\int_1^2dz\iint_{D(z)}z^3dxdy$$
$$=\int_0^1z^3\pi z^2dz+\int_1^2z^3\pi(2z-z^2)dz=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{5}\pi z^5\Big|_1^2-\frac{\pi}{6}z^6\Big|_1^2=\frac{31}{15}\pi.$$

题型八 曲线积分的计算

对于曲线积分将按两种方法(即参数法与辅助线法)予以归纳,其中参数法对两类曲线积分都适用,辅助线法则只适用于第二类曲线积分.使用辅助线法要涉及格林公式,而格林公式,以及积分与路径无关等问题在下一章将详细介绍,这里不重点说明.对于沿空间曲线的第二类曲线积分,有时还要涉及斯托克斯公式,这一部分内容将完全留在下一章.其他方法也在下一章介绍.

▶1. 利用参数法求曲线积分(先求曲线的参数方程,然后套公式)

【例9.58】 求下列曲线积分:

(Ⅰ)$I=\oint_L|xy|ds$,其中$L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$;

(Ⅱ)$I=\int_L y^2ds$,其中平面曲线L为旋轮线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一拱;

(Ⅲ)$I=\int_L(x+y)ds$,其中L为双纽线$r^2=a^2\cos2\theta$(极坐标方程)的右面一瓣.

【解】 (Ⅰ)由于积分弧段的对称性与被积函数为偶函数,所以能够只在第一象限求积分.又由于椭圆的参数方程为$x=a\cos t,y=b\sin t$,因此
$$\oint_L|xy|ds=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2t}dt$$
$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2t}d(\sin^2t)=\frac{2ab}{a^2-b^2}\cdot\frac{2}{3}[b^2+(a^2-b^2)\sin^2t]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{4ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3)=\frac{4ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

(Ⅱ)$\int_L y^2ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2t}dt=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-\cos t}dt$
$$=8a^3\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^5dt=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5udu$$
$$=32a^3\cdot\frac{4\cdot2}{5\cdot3}=\frac{256a^3}{15}.$$

(Ⅲ)L是双纽线的右瓣:$r^2=a^2\cos2\theta,-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$.$L$关于$x$轴对称,$y$关于$y$为奇函数,于是有$\int_L yds=0$.从而$I=\int_L xds$.由极坐标方程下曲线积分的计算公式得

www.TopSage.com

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r(\theta)\cos\theta\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

由于 $2r(\theta)r'(\theta) = -2a^2\sin 2\theta \Rightarrow r'(\theta) = -\dfrac{a^2\sin 2\theta}{r(\theta)} \Rightarrow r^2(\theta) + r'^2(\theta) = \dfrac{a^4}{r^2(\theta)} \Rightarrow$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r(\theta)\cos\theta\frac{a^2}{r(\theta)}d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta = \sqrt{2}a^2.$$

【例 9.59】 求曲线积分 $I = \int_C (x+y)dx + (3x+y)dy + zdz$，其中 C 为闭曲线 $x = a\sin^2 t, y = 2a\cos t\sin t, z = a\cos^2 t (0 \leqslant t \leqslant \pi)$，$C$ 的方向按 t 从 0 到 π 的方向.

【分析与求解】 曲线 C 的参数方程已给出

$$x = x(t) = a\sin^2 t,\ y = y(t) = a\sin 2t,\ z = a\cos^2 t, t \in [0,\pi],$$

于是直接化成定积分

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} x(t)dx(t) + y(t)dx(t) + x(t)dy(t) + 2x(t)dy(t) + y(t)dy(t) + z(t)dz(t) \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2(t) + x(t)y(t) + \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}z^2(t)\right]\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2a\sin^2 t d(a\sin 2t) \\ &= 0 + 2a^2\sin^2 t\sin 2t\Big|_0^{\pi} - 2a^2\int_0^{\pi}\sin^2 2t dt = -a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt = -\pi a^2. \end{aligned}$$

▶2. 利用辅助线法求曲线积分

引入辅助线的目的就是将原来复杂的曲线积分化为较简单的曲线积分，其理论根据就是格林公式或斯托克斯公式，详见下一章.

题型九 曲面积分的计算

与曲线积分相类似，这里也将题型主要归纳为两类，只是由于对曲面积分不要求引入一般的参数，只要求将积分曲面表为坐标变量的函数，即 $z = z(x,y)$（或 $y = y(z,x), x = x(y,z)$）的形式，因此，这里将称之为坐标法，另一种方法即为辅助曲面法. 辅助曲面法及其他方法参见第十章.

坐标法对两类曲面积分都适用，具体办法是公式(9.13)，(9.14) 与(9.15). 这里要特别注意的是：对面积的曲面积分的面积元素 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$（或 $dS = \sqrt{1 + y_z^2 + y_x^2}\,dzdx$ 等）；而对坐标的曲面积分则是正负号的确定.

【例 9.60】 求下列曲面积分：

(Ⅰ) $I = \iint_{\Sigma} ydS$，其中 Σ 是平面 $x + y + z = 1$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 截出的有限部分；

(Ⅱ) $I = \iint_{\Sigma} zdS$，其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ 内的部分.

【解】 (Ⅰ) 积分曲面的表达式为 $z = 1 - x - y$，Σ 在 xy 平面上的投影为圆 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$，所以

$$I = \iint_{\Sigma} ydS = \iint_D y\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{3}\iint_D ydxdy = 0.$$

(Ⅱ) 利用锥面的表示式 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$，可知

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

又锥面 Σ 在 Oxy 平面的投影区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 2x$，极坐标表示是：$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta$，

www.TopSage.com

因此 $$I=\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{32\sqrt{2}}{9}.$$

【例 9.61】 求下列曲面积分：

(Ⅰ) $I=\iint_{\Sigma}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是 $x^2+z^2=a^2$ 在 $x\geqslant 0$ 的一半中被 $y=0$ 和 $y=h(h>0)$ 所截下部分的外侧(见图 9.62)；

(Ⅱ) $I=\iint_{S}xy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 S 是由曲线 $x=\mathrm{e}^{y^2}(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转成的旋转面，取外侧.

【解】 (Ⅰ) 本题实际上可以分三个积分计算，即 $I=I_1+I_2+I_3$.

将 Σ 在 yz 平面上的投影记为 D_{yz}，则 D_{yz}：$0\leqslant y\leqslant h$，$-a\leqslant z\leqslant a$. 注意到 Σ 的法线方向与 x 轴正方向夹锐角，则 $I_2=\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}z\sqrt{a^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

此时已化成了二重积分，注意到 D_{yz} 关于 y 轴对称，而被积函数为 z 的奇函数，故 $I_2=0$.

由于 Σ 垂直于 zx 平面(它在 zx 平面上的投影域面积为零)，故 $I_3=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，而

$$I_1=\iint_{D_{yz}}xyz\left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}xyz\cdot\frac{z}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h y\mathrm{d}y\cdot 2\int_0^a z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{3}h^2a^3,$$

所以，$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{1}{3}h^2a^3.$$

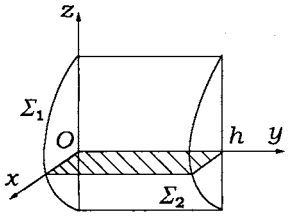


图 9.62

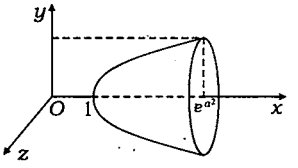


图 9.63

(Ⅱ) 曲面 S 的方程是：$x=\mathrm{e}^{y^2+z^2}(y^2+z^2\leqslant a^2)$，见图 9.63. S 在 yz 平面上的投影区域 D_{yz} 易求，

$$D_{yz}:y^2+z^2\leqslant a^2,x=0,\text{又}\frac{\partial x}{\partial y}=2y\mathrm{e}^{y^2+z^2},$$

S 的法向量与 x 轴正向成钝角，于是

$$I=-\iint_{D_{yz}}y\mathrm{e}^{y^2+z^2}\left(-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}2y^2\mathrm{e}^{2(y^2+z^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\xrightarrow[\text{变换}]{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a 2r^2\cos^2\theta\mathrm{e}^{2r^2}r\,\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{e}^{2r^2}\mathrm{d}r^2$$

$$=\pi\int_0^{a^2}t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_0^{a^2}t\mathrm{d}\mathrm{e}^{2t}=\frac{\pi}{2}a^2\mathrm{e}^{2a^2}-\frac{\pi}{2}\int_0^{a^2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}[(2a^2-1)\mathrm{e}^{2a^2}+1].$$

评注 ① 题(Ⅰ)中求 I_1 时若投影到 xy 平面上，要将 Σ 分为 xy 平面上方与下方两部分，不如投影到 yz 平面上简捷.

② 第二类曲面积分有与重积分不同的对称性质，如 Σ 为单位球面的外侧时，计算 $\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，这

www.TopSage.com

积分曲面Σ关于yz平面对称，被积函数对x为奇函数，即$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$，且$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Sigma_1$是$\Sigma$的前半部，在题(Ⅰ)中，类$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$时，因$\Sigma$关于$xy$平面对称，被积函数对$z$为奇函数，于是可直接写成$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma_2$是$\Sigma$在$xy$平面的上方部分.

③ 请读者用高斯公式求解题(Ⅱ).

题型十　多元函数积分学的几何应用

▶1. 求曲顶曲底柱体的体积

【例 9.62】 求区域Ω的体积V，其中Ω：由$z = xy, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$围成.

【分析】 区域Ω由曲面$z = z(x,y)$及它在Oxy平面上的投影区域D及以D的边界为准线，母线平行于z轴的柱面所围成，则$V = \iint\limits_D |z(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 关键是由所给条件得出曲顶的曲面方程与底面的区域D.

【解】 如图 9.64，注意曲面$z = xy$，第一、三象限时位于Oxy平面的上方，第二、四象限时位于Oxy平面的下方，区域Ω由曲面$z = xy$，柱面$x^2 + y^2 = a^2$及xy平面所围成. $z = xy$在Oxy平面的投影区域$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$. 因此$\Omega$的体积

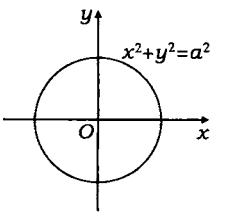


图 9.64

$$V = \iint\limits_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\sin\theta\cos\theta r\mathrm{d}r$$

$$= 4\cdot\frac{a^4}{4}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}(\sin\theta) = \frac{a^4}{2}.$$

【例 9.63】 求区域Ω的体积V，其中Ω是半球面$z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$及旋转抛物面$x^2 + y^2 = 2az$所围成.

【分析】 区域Ω是由上、下两张曲面$z = z_2(x,y) \geqslant z = z_1(x,y)$所围成，这时关键要求出它在$xy$平面上的投影区域$D$. 常用的方法是：由$\begin{cases} z = z_1(x,y), \\ z = z_2(x,y) \end{cases}$消去$z$得某方程$F(x,y) = 0$，$D$就是$xy$平面上由曲线$F(x,y) = 0$所围的区域.

【解】 先解方程组$\begin{cases} z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}, \\ 2az = x^2 + y^2, \end{cases}$得两曲面的交线为$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2, \\ z = a. \end{cases}$

由立体的形状可知，它在Oxy平面上的投影为圆域$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2a^2\}$，如图 9.65. 因此$\Omega$的体积为

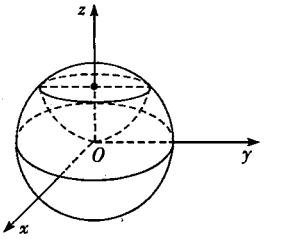


图 9.65

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\left(\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a}\right)r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(3a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{8a}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}a} = \pi a^3\left(2\sqrt{3} - \frac{5}{3}\right).$$

www.TopSage.com

评注 Ω 由半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=2az$ 所围成，与 z 轴垂直的平面截 Ω 所得截面区域 $D(z)$ 均为圆域，它的面积易求，因此可用公式

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\sqrt{3}a}\left(\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

来计算.

当 $0\leqslant z\leqslant a$ 时，圆域 $D(z)$ 的半径的平方为 $2az$，当 $a\leqslant z\leqslant\sqrt{3}a$ 时 $D(z)$ 的半径的平方为 $3a^2-z^2$，因此

$$V=\int_0^a\left(\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z+\int_a^{\sqrt{3}a}\left(\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^a\pi 2az\mathrm{d}z+\int_a^{\sqrt{3}a}\pi(3a^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\pi az^2\Big|_0^a+\pi\left(3a^2z-\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_a^{\sqrt{3}a}=\pi a^3\left(2\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right).$$

【例 9.64】 求区域 Ω 的体积，其中 Ω 是由曲面 $z=y^2(y\geqslant 0)$，$z=4y^2(y\geqslant 0)$，$z=x$，$z=2x$，$z=4$ 所围成.

【分析】 这是侧面是柱面的曲顶、曲底柱体区域. 对这类问题要由所给条件确定出侧面——柱面，然后再定出上、下底曲面. 确定了侧面（柱面）也就确定了 Ω 的投影区域.

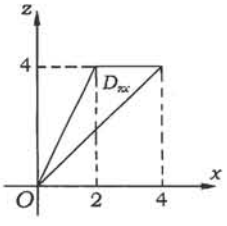


图 9.66

【解】 如图 9.66，$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\frac{\sqrt{z}}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z},(z,x)\in D_{zx}\right\}$，

$$D_{zx}=\left\{(z,x)\mid\frac{z}{2}\leqslant x\leqslant z,0\leqslant z\leqslant 4\right\}.$$

Ω 的体积为

$$V=\iint_{D_{zx}}\left(\sqrt{z}-\frac{\sqrt{z}}{2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint_{D_{zx}}\sqrt{z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^4\mathrm{d}z\int_{\frac{z}{2}}^{z}\sqrt{z}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{1}{2}z^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z=\frac{16}{5}.$$

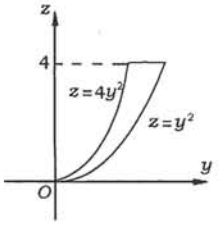


图 9.67

或 Ω 也可表成（如图 9.67）：$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\frac{z}{2}\leqslant x\leqslant z,(y,z)\in D_{yz}\right\}$，

$$D_{yz}=\left\{(y,z)\mid\frac{\sqrt{z}}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z},0\leqslant z\leqslant 4\right\},$$

于是

$$V=\iint_{D_{yz}}\left(z-\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^4\mathrm{d}z\int_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}}\frac{z}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^4 z^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z=\frac{16}{5}.$$

▶2. 求曲面面积

【例 9.65】 求下列曲面的面积：

（Ⅰ）半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 及旋转抛物面 $2az=x^2+y^2$ 所围立体的表面 S；

（Ⅱ）锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面 S.

【分析】 在用公式 $\iint_D\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 求曲面 $S:z=f(x,y)$（$(x,y)\in D$）的面积时，关键之一是确定 S 在 Oxy 平面的投影区域 D. 因为题目中往往不是直接给出这个投影区域.

若曲面是由垂直于 Oxy 平面的柱面所截，则它在 Oxy 平面上的投影区域就是柱面截下 Oxy 平面部分. 若曲面是由两张相交曲面组成，则须求它们的交线才可求得投影区域如题（Ⅰ）. 对于题（Ⅱ），求投影区域的方法本质上与题（Ⅰ）相同.

【解】 （Ⅰ）两曲面的交线及在 Oxy 平面上的投影区域 D 如【例 9.63】所求. 曲面 S 分成两块. 对曲面 $S_1:z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 来说，$z'_x=-\frac{x}{z}$，$z'_y=-\frac{y}{z}$. 它的面积

www.TopSage.com

$$A_1 = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标变换}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\sqrt{3}ar}{\sqrt{3a^2 - r^2}}\,\mathrm{d}r = 2\sqrt{3}\pi a^2(\sqrt{3} - 1).$$

对于曲面 $S_2: z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$ 来说，$z'_x = \dfrac{x}{a}$，$z'_y = \dfrac{y}{a}$. 它的面积

$$A_2 = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{1}{a}\sqrt{a^2 + r^2}\,r\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}a^2(3\sqrt{3} - 1).$$

因此，整个曲面的面积 $A = A_1 + A_2 = \dfrac{16}{3}\pi a^2$.

（Ⅱ）先解方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x, \end{cases}$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 2x$. 这就是两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影，也就是曲面 S 在 Oxy 平面上投影区域 D 的边界曲线，因而

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2x\} = \{(x,y) \mid (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

在锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上，$z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$，$z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$，因此曲面 S 的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi.\ （D 是半径为 1 的圆，面积为 \pi）$$

题型十一　多元函数积分学的物理应用

▶1. 利用多元函数的积分求质量、质心及转动惯量

【例 9.66】　求八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ 的边界曲线的质心，设曲线线密度 $\rho = 1$.

【解】　设边界曲线在 Oxy, Oyz, Ozx 坐标平面内的弧段分别记为 L_1, L_2, L_3（图 9.68）.

设曲线的质心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，直接按质心计算公式知：

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_L x\mathrm{d}s,\quad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_L y\mathrm{d}s,\quad \bar{z} = \frac{1}{m}\int_L z\mathrm{d}s,$$

其中 $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$，$m = \int_L \rho\mathrm{d}s = \int_L \mathrm{d}s$ 为曲线 L 的质量.

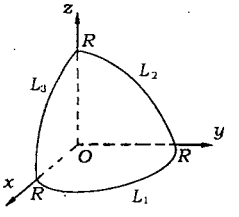


图 9.68

由于 $\rho = 1$，则质量 $m = L$ 的长度 $= 3 \times \dfrac{1}{4} \times 2\pi R = \dfrac{3}{2}\pi R$. 又因

$$\int_{L_1} x\mathrm{d}s \xlongequal[0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}]{\substack{x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta\sqrt{R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta = R^2,$$

同理 $\int_{L_3} x\mathrm{d}s = R^2$，$\int_{L_2} x\mathrm{d}s = 0$，则 $\int_L x\mathrm{d}s = 2R^2$，所以 $\bar{x} = \dfrac{1}{m}\int_L x\mathrm{d}s = \dfrac{2R^2}{\frac{3}{2}\pi R} = \dfrac{4R}{3\pi}$.

由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$，即质心为 $\left(\dfrac{4R}{3\pi}, \dfrac{4R}{3\pi}, \dfrac{4R}{3\pi}\right)$.

【例 9.67】　求密度为 1 的均匀圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant a^2, |z| \leqslant h$ 对直线 $L: x = y = z$ 的转动惯量.

www.TopSage.com

【分析】 这里不是求物体对坐标轴的转动惯量，因此不能套用已有的公式，要学会求转动惯量的方法. 质量为 m 的质点对 L 的转动惯量是 md^2，d 是质点到 L 的距离. 因此，这里必须先求点 (x,y,z) 到直线 L 的距离.

【解】 先求圆柱体上任意点 (x,y,z) 到直线 L 的距离的平方

$$d^2 = \frac{|(1,1,1)\times(x,y,z)|^2}{3} = \frac{1}{3}\left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}\right\|^2$$

$$= \frac{1}{3}[(z-y)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2].$$

再求圆柱体对 L 的转动惯量

$$I = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}[(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2]\mathrm{d}V$$

$$= \frac{2}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V - \frac{2}{3}\iiint_{\Omega}(yz+zx+xy)\mathrm{d}V$$

$$= \frac{2}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V + \frac{2}{3}\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}V \quad (\text{奇偶函数积分性质})$$

$$= \frac{4}{3}h\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{4}{3}\pi a^2\int_0^h z^2\mathrm{d}z$$

$$= \frac{4}{3}h\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2 r\mathrm{d}r + \frac{4}{9}\pi a^2h^3 = \frac{2}{3}\pi a^4h + \frac{4}{9}\pi a^2h^3.$$

▶2. 利用多元函数的积分求功

【例 9.68】 平面上质点 $M(x,y)$ 在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 运动，力 $\boldsymbol{F}$ 指向点 $C(c,0)(c=\sqrt{a^2-b^2})$，$\boldsymbol{F}$ 的大小与点 M,C 之间的距离 r 的平方成反比，比例系数 $k>0$ 为常数，分别求下列情形力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功(如图 9.69).

(Ⅰ) 质点 M 由 $A(a,0)$ 点沿 Γ 运动到 $B(0,b)$ 点；

(Ⅱ) 质点 M 由 B 点逆时针方向沿 Γ 回到 B 点.

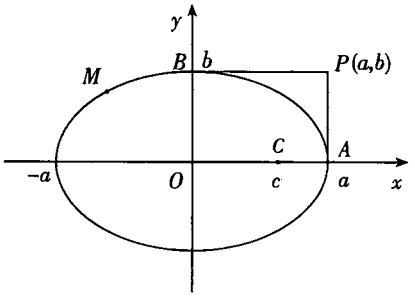


图 9.69

【分析】 首先求出点 M 受的力 $\boldsymbol{F}$.

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{k}{r^2}, \quad r = |\overrightarrow{MC}|,$$

$\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{MC}$ 同向，$\dfrac{\overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{MC}|} = \dfrac{(c-x,-y)}{r}$，$r = [(c-x)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$，

于是 $$\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}|\cdot\frac{\overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{MC}|} = \frac{k}{r^3}(c-x,-y).$$

再写出力 $\boldsymbol{F}$ 所做功的积分表达式.

题(Ⅰ)中力 $\boldsymbol{F}$ 做的功 $W_{\mathrm{I}} = \int_{\overset{\frown}{AB}}P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$,

题(Ⅱ)中力 $\boldsymbol{F}$ 做的功 $W_{\mathrm{II}} = \oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$,

其中 $P = \dfrac{k}{r^3}(c-x)$，$Q = \dfrac{-k}{r^3}y$.

【解法一】 易求出被积表达式的原函数

www.TopSage.com

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{k}{r^3}[(c-x)\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y]=\frac{-k}{2r^3}\mathrm{d}[(c-x)^2+y^2]$$

$$=-\frac{k}{2r^3}\mathrm{d}r^2=-\frac{k}{r^2}\mathrm{d}r=\mathrm{d}\left(\frac{k}{r}\right),$$

于是
$$W_{\mathrm{I}}=\int_{\overset{\frown}{AB}}\mathrm{d}\left(\frac{k}{r}\right)=\frac{k}{r}\Big|_A^B=\frac{k}{[(c-x)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}\Big|_A^B$$

$$=\frac{k}{\sqrt{c^2+b^2}}-\frac{k}{\sqrt{(c-a)^2}}=\frac{k}{a}-\frac{k}{a-c}=-\frac{kc}{a(a-c)}.$$

求出了原函数,积分与路径无关,沿闭路积分是零,即 $W_{\mathrm{II}}=0$.

【解法二】 验证$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 易算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-ky}{r^3}\right)=\frac{-3ky(c-x)}{r^5}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k(c-x)}{r^3}\right]=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

对于题(Ⅰ),在所考虑的区域内是单连通区域,积分与路径无关,取 A 到 B 的折线路径$\overline{AP},\overline{PB}$,其中 $P(a,b)$(图 9.69),于是

$$W_{\mathrm{I}}=\int_{\overline{AP}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{\overline{PB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^b\frac{-ky\mathrm{d}y}{[(c-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}+\int_a^0\frac{k(c-x)\mathrm{d}x}{[(c-x)^2+b^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{k}{[(c-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}\Big|_0^b+\frac{k}{[(c-x)^2+b^2]^{\frac{1}{2}}}\Big|_a^0$$

$$=\frac{k}{[(c-a)^2+b^2]^{\frac{1}{2}}}-\frac{k}{a-c}+\frac{k}{\sqrt{c^2+b^2}}-\frac{k}{[(c-a)^2+b^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{k}{a-c}+\frac{k}{a}=\frac{-kc}{a(a-c)}.$$

对于题(Ⅱ),椭圆 Γ 所围区域内含点 $C(c,0)$,由$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}((x,y)\neq(c,0))$,不能判断积分与路径无关,因为不是单连通区域.

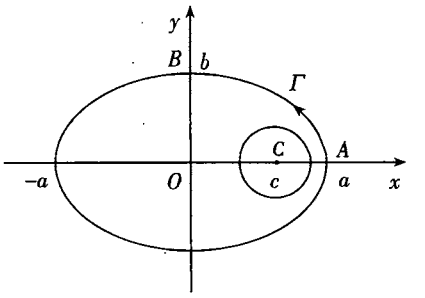


图 9.70

以 C 为中心(如图 9.70),$\varepsilon>0$ 为半径作小圆周 C_ε(顺时针方向),椭圆 Γ(按题意是逆时针方向)与 C_ε 围成 D_ε,则

$$0=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Gamma\cup C_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

从而
$$W_{\mathrm{II}}=\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{C_\varepsilon^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{k}{\varepsilon^3}\int_{C_\varepsilon^+}(c-x)\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y\overset{\text{格林公式}}{=\!=\!=}0,$$

这里 C_ε^+ 取逆时针方向.

评注 ①由曲线积分求功时,首先要求出变力 $\boldsymbol{F}$ 的表达式,若知力 $\boldsymbol{F}$ 的大小 $|\boldsymbol{F}|$,它的方向与某向量 $\boldsymbol{l}$ 同向,则 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}$.

②求功的积分表达式 $W=\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 时,或由曲线 C 的参数方程求 W,或由该积分与路径无关,通过求原函数或取特殊路径来求 W.

www.TopSage.com

▶3. 利用多元函数的积分求流量

【例 9.69】 设流速 $\boldsymbol{v}=(x^2+y^2)\boldsymbol{j}+(z-1)\boldsymbol{k}$,求下列情形流体穿过曲面 Σ 的体积流量 Q(如图 9.71):

(I) Σ 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant 1)$,取下侧;

(II) Σ 为圆锥体($z^2\geqslant x^2+y^2,0\leqslant z\leqslant 1$) 的底面,法向量朝上.

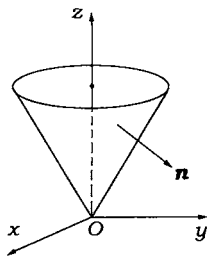


图 9.71

【解】 (I) 首先,用曲面积分表示流量,即

$$Q=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

直接投影到 xy 平面上代公式求 Q.

由 Σ 的方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,$\Sigma$ 在 xy 平面上的投影区域 D:

$x^2+y^2\leqslant 1(z=0)\Rightarrow$

$$Q=-\iint_{D}\left[(x^2+y^2)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\sqrt{x^2+y^2}-1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D}(\sqrt{x^2+y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}.$$

(II) 圆锥体($z^2\geqslant x^2+y^2,0\leqslant z\leqslant 1$) 的底面 Σ 即 $x^2+y^2\leqslant 1,z=1$,它垂直于 zx 平面,在 Σ 上 $z-1=0$,因此

$$Q=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0=0.$$

评注 求题(I)转化为先求题(II),然后用高斯公式更简单.

题型十二 综合题

这里所谓综合题就是指除了重积分、曲线积分、曲面积分之外,还含有其他运算,如:求导、求极限、切平面计算等.

【例 9.70】 设 $f(u)$ 连续,$f(0)=1$,区域 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-x^2-y^2},t>0$,又设 $F(t)=\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$,求 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{F(t)}{t^3}$.

【分析】 本题需要先将 $F(t)$ 化为定积分,由于 Ω 由球面与锥面围成,又被积函数只与 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 有关,故应选用球坐标系.

【解】
$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(\rho^2)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t\rho^2f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t\rho^2f(\rho^2)\mathrm{d}\rho,$$

因此
$$\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)}{t^3}=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to 0+}\frac{t^2f(t^2)}{3t^2}=\frac{1}{3}\pi(2-\sqrt{2})f(0)=\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})\pi.$$

【例 9.71】 求 $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x^2+xy+y^2)^2}$,其中 $L:x^2+y^2=R^2$ 的正方向.

【解】 将 L 表成参数方程的形式,即 $x=R\cos\theta,y=R\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,于是

www.TopSage.com

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x^2+xy+y^2)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta}{(R^2\cos^2\theta + R^2\cos\theta\sin\theta + R^2\sin^2\theta)^2} = \frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2},$$

大学网 TopSage.com

注意到右端积分存在且为一常数，所以 $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0$.

【例 9.72】 （Ⅰ）记 $\Omega(R) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$，求 $\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{\Omega(R)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（Ⅱ）证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

【求解与证明】 （Ⅰ）首先用极坐标变换求出 $I(R) = \iint\limits_{\Omega(R)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，然后求极限 $\lim\limits_{R\to+\infty} I(R)$.

作极坐标变换 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 得

$$I(R) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^R = \pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}).$$

因此，$\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{\Omega(R)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi$.

（Ⅱ）因为 e^{-x^2} 在 $(-\infty, +\infty)$ 可积，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

通过求 $\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 再求极限的方法行不通，因为 $\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 积不出来（不是初等函数）. 但可以估计这个积分值. 为了利用 $\iint\limits_{\Omega(R)}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，我们仍把一元函数的积分问题转化为二元函数的重积分问题.

$$\left(\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \iint\limits_{D(R)}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D(R) = \{(x,y) \mid |x| \leqslant R, |y| \leqslant R\}$. 显然 $I(R) \leqslant \iint\limits_{D(R)}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant I(\sqrt{2}R)$.

（见【例 9.35】-（Ⅱ）），又 $\lim\limits_{R\to+\infty} I(R) = \lim\limits_{R\to+\infty} I(\sqrt{2}R) = \pi$，于是

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \pi.$$

题型训练

一、填空题

1. 设 D 为两个圆 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 及 $(x-2)^2+y^2 \leqslant 4$ 的公共部分，则 $I = \iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma =$ _____.

2. 设 D 为 $y = x^3$ 及 $x = -1$，$y = 1$ 所围成的区域，则 $I = \iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma =$ _____.

3. $I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ _____.

4. 设 D：$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$，则 $I = \iint\limits_D \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{y^2}}\mathrm{d}\sigma =$ _____.

5. 设 $I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^4+y^4)\mathrm{d}\sigma$，$I_2 = \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}}(x^4+y^4)\mathrm{d}\sigma$，$I_3 = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} 2x^2y^2\mathrm{d}\sigma$，则这三个积分的大小顺序是

_____ < _____ < _____.

www.TopSage.com

6. 设 D 为圆域 $x^2+y^2\leqslant x$，则 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=$ _____.

7. 设 L 是正方形边界：$|x|+|y|=a(a>0)$，则 $I=\int_L xyds=$ _____，$J=\int_L|x|ds=$ _____.

8. 设 Σ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分，则曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma(x+y+z)dS=$ _____.

二、求下列二重积分

1. 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{x}dxdy$，其中 D 为曲线 $y=\ln x$ 与二直线 $y=0,y=(e+1)-x$ 所围成的平面区域.

2. 计算 $I=\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以 $O(0,0),A(1,1),B(-1,1)$ 为顶点的三角形区域.

3. 计算 $I=\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}d\sigma$，其中 $D:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9,\frac{x}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x$.

4. 计算 $I=\iint\limits_D|\sin(x-y)|dxdy$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2\pi$；

5. 计算 $I=\iint\limits_D(x+y)^2dxdy$，其中 $D:|x|+|y|\leqslant 1$；

6. 计算 $I=\iint\limits_D\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$，其中 $D:x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1$；

7. 设 $a>0$ 为常数，求积分 $I=\iint\limits_D xy^2d\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant ax$.

三、改变二重积分的累次积分的顺序

1. $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^3dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)}f(x,y)dy$；　2. $\int_{-1}^0dx\int_{-x}^{2-x^2}f(x,y)dy+\int_0^1dx\int_x^{2-x^2}f(x,y)dy$；

3. $\int_0^{t^2}dx\int_t^{\sqrt{x}}f(x,y)dy(t>0)$；　4. 极坐标系下的累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

四、求下列二重积分的累次积分

1. $I=\int_0^1dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$；　　2. $I=\int_0^Rdx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy\quad(R>0)$.

五、计算下列三重积分

1. $I=\iiint\limits_\Omega x^3y^2zdV$，其中 Ω 是由 $x=1,x=2,y=0,y=x^2,z=0$ 及 $z=\frac{1}{x}$ 所围成的区域.

2. $I=\iiint\limits_\Omega(lx^2+my^2+nz^2)dV$，其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,l,m,n$ 为常数.

3. $I=\iiint\limits_\Omega zdV$，其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 2,x^2+y^2\leqslant z$.

4. $I=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)dV$，其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 2az,\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z(a>0)$.

www.TopSage.com

六、改变三重积分的累次积分的顺序或转换三重积分的累次积分

1. $\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^a \mathrm{d}x \int_{\frac{a-x}{2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$，变成由 z 到 y 再到 x 的顺序.

2. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$，改换成先 y 最后 x 的顺序.

3. 考虑柱坐标系下的三重累次积分 $I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_r^{\sqrt{4-r^2}} 3r\,\mathrm{d}z$.（Ⅰ）将 I 用直角坐标 $(Oxyz)$ 化为累次积分；（Ⅱ）将 I 用球坐标化为累次积分；（Ⅲ）求 I 的值.

4. 求 $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

七、计算曲线积分与曲面积分及多元函数积分学的应用

1. 设 L 为抛物线 $y = x^2$ 上，从点 $A(-1,1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段，求 $I = \int_L (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$.

2. 求积分 $I = \int_C \frac{1}{y}\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\mathrm{d}y$，其中 $C: y = 1, x = 4, y = \sqrt{x}$ 逆时针一周.

3. 计算曲面积分 $I = \iint_\Sigma (x + y + z)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为左半球：$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \leqslant 0$.

4. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{r^2}$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 界于 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的部分，r 为曲面上的点到原点的距离 $(H > 0)$.

5. 设 S 为柱面 $x^2 + y^2 = a^2 (0 \leqslant z \leqslant h)$ 的外侧，满足 $x \geqslant 0$ 的一半，求 $I = \int_S z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6. 求曲面积分 $I = \iint_S (x + \cos y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y + \cos z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z + \cos x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为 $x + y + z = \pi$ 在第一卦限部分，取上侧.

7. 求曲线积分 $I = \int_C xy\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}z$，$C$ 为椭圆周：$x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1$，逆时针方向.

8. 求下列区域 Ω 的体积：

（Ⅰ）Ω：$x^2 + y^2 \leqslant a^2, z \geqslant 0, z \leqslant mx (m > 0)$；

（Ⅱ）Ω：由 $y^2 = a^2 - az, x^2 + y^2 = ax, z = 0 (a > 0)$ 围成；

（Ⅲ）Ω：由 $z = x^2 + y^2, x + y + z = 1$ 所围成.

9. 设曲面 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0, a > 0)$ 被柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 所割下部分，求 S 的面积.

10. 设曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，其面密度 μ 为常数，求该曲面在 $0 \leqslant z \leqslant \frac{3}{2}$ 部分 S 的质量与质心.

11. 设质点 P 沿以 $\overline{AB}$ 为直径的下半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到 $B(3,4)$ 的过程中，受变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 到原点 O 之距离，方向垂直于线段 $\overline{OP}$，与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$，求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 做的功.

12. 设有平面光滑曲线 $l: x = x(t), y = y(t), z = 0, t \in [\alpha,\beta]$，以及空间光滑曲线 $L: x = x(t), y = y(t), z = f(x(t), y(t)), t \in [\alpha,\beta], t = \alpha, t = \beta$ 分别是起点与终点的参数.

（Ⅰ）试说明 l, L 及曲面 $S: z = f(x,y)$ 的关系；

（Ⅱ）若 P, Q, R 连续，$f(x,y)$ 有连续的偏导数，求证：

$$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

www.TopSage.com

$$= \int_l \left[P(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} R(x,y,f(x,y)) \right] dx + \left[Q(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} R(x,y,f(x,y)) \right] dy.$$

13. 设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在区域 Ω 连续, $\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 是 Ω 中一条光滑曲线, 起点 A, 终点 B 分别对应参数 t_A 与 t_B, 又设在 Ω 上存在函数 $u(x,y,z)$, 使得

$$du = P dx + Q dy + R dz \quad (\text{称为 } P dx + Q dy + R dz \text{ 在 } \Omega \text{ 的原函数}).$$

求证: $I = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = u \Big|_A^B$.

14. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2$.

15. 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 上, 问 R 为何值时球面 Σ 在定球面内部的那部分面积最大?

16. 求一段均匀圆柱面 $S: x^2 + y^2 = R^2 (0 \leqslant z \leqslant h)$ 对原点处单位质点的引力. 假设该圆柱面的面密度为 1.

17. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且恒大于零, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant (b-a)^2.$$

18. (Ⅰ) 记 $\Omega(R) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, $I(R) = \iint_{\Omega(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 求 $\lim\limits_{R \to +\infty} I(R)$;

(Ⅱ) 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

www.TopSage.com

第十章　多元函数积分学中的基本公式及其应用

内容概要与重难点提示

多元函数积分学中三个基本公式是:格林公式、高斯公式及斯托克斯公式,它们分别建立了曲线积分与二重积分、曲面积分与三重积分、曲线积分与曲面积分等的联系.它们有很强的物理意义即建立了向量的散度与通量、旋度与环量之间的关系,它们有许多重要的应用,主要是:简化某些多元函数积分的计算,用格林公式讨论平面曲线积分与路径无关问题,掌握有关的判断方法和求全微分的原函数的方法等.

考核知识要点讲解

一、多元函数积分学中的基本公式——格林公式、高斯公式与斯托克斯公式

(一) 平面上的单连通区域与区域的正向边界

【定义 10.1】 设 D 为平面区域,如果 D 内任一闭曲线所围部分都属于 D,则称 D 为**平面单连通区域**,否则称为**复连通区域**.通俗地说,平面单连通区域就是不含有"洞"(包括点"洞")的区域.复连通区域是含有"洞"(包括点"洞")的区域.

【定义 10.2】 设 D 为平面区域,L 是 D 的边界,我们规定 L 的正向如下:当观察者沿这个方向行进时 D 内在他近处的那一部分总在他的左边.

设 D 是复连通区域,外边界为闭曲线 C,内边界是闭曲线:$C_1, C_2, \cdots, C_n$,则 C 的正向是逆时针方向,$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的正向是顺时针方向.见图 10.1.

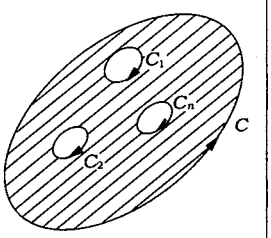


图 10.1

(二) 格林公式

【定理 10.1】 设平面上的有界闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成,函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 有连续的一阶偏导数,则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \tag{10.1}$$

或

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x, \tag{10.2}$$

其中 L 是 D 取正向的边界曲线.

【注】 ①(10.1)式中将 Q 换成 P,P 换成 $-Q$ 即得(10.2)式.

② 公式(10.1)与(10.2)叫做**格林公式**.

③ 对于复连通区域 D,边界曲线不止一条闭曲线,格林公式中的右端积分应包含沿区域 D 的全部边界的曲线积分.若 D 是如图 10.1 的复连通区域,则有

www.TopSage.com

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

其中 C 取逆时针方向，$C_k(k = 1, \cdots, n)$ 取顺时针方向．若 $C_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 与 C 都取逆时针方向，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

（三）高斯公式

【定理 10.2】 设 Ω 是空间中的有界闭区域，由分块光滑的曲面 S 所围成．函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V = \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{10.3}$$

或

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S, \tag{10.4}$$

这里 S 是 Ω 的整个边界的外侧（即取外法向），$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 S 上点 (x,y,z) 处的外法向量的方向余弦．

【注】 ① 公式(10.3)与(10.4)叫做**高斯公式**．

② 若 Ω 的边界不止一张曲面，高斯公式中的右端积分应包括沿区域 Ω 的全部边界上的曲面积分．与图 10.1 类似，若 Ω 的外边界为闭曲面 Σ，内边界是闭曲面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$，则高斯公式为

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V$$

$$= \iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Sigma_k} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

或

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V$$

$$= \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S + \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Sigma_k} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

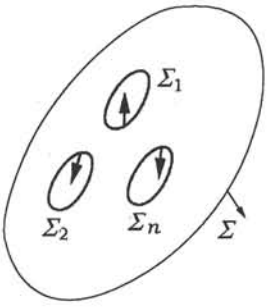


图 10.2

这里 Ω 的边界取外侧，即取 Ω 的外法向量，对外边界 Σ 来说，Ω 的外法向也是 Σ 所围区域的外法向；对内边界 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ 来说，Ω 的外法向即是 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ 所围区域的内法向，见示意图 10.2.

（四）斯托克斯公式

【定理 10.3】 设 Γ 为分段光滑的有向闭曲线，S 是以 Γ 为边界的分块光滑有向曲面，Γ 的正向与 S 的侧（即法向量的指向）符合右手法则，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在包含 S 的一个空间区域内有连续的一阶偏导数，则有

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z. \tag{10.5}$$

$$\left(\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \right)$$

www.TopSage.com

或 $$\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS=\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{10.6}$$

$$\left(\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz\right)$$

【注】 ① 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，S 是以 Γ 为边界的分块光滑的曲面，当右手除姆指外的四指依 Γ 的绕行方向时，姆指所指的方向与 S 上的法向量的指向相同．这时称 Γ 是有向曲面 S 的正向边界曲线．

② 公式(10.5)与(10.6)叫做**斯托克斯公式**．

（五）高斯公式，斯托克斯公式与格林公式的关系

▶1. 从各种类型的多元函数的积分之间的关系来看：**格林公式**建立了平面上曲线积分与二重积分的联系；**高斯公式**建立了曲面积分与三重积分之间的联系；**斯托克斯公式**建立了空间曲线积分与曲面积分之间的联系．

▶2. 斯托克斯公式与高斯公式退化成二维情形，分别是两种不同形式的格林公式，即(10.1)与(10.2)．

二、向量场的通量与散度，环流量与旋度

（一）向量场的通量与散度

▶1. 向量场的通量

【定义 10.3】 设有向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{F}$ 沿分块光滑定向曲面 S 的通量为

$$\iint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 S 上任意点 (x,y,z) 处的单位法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$．

▶2. 向量场的散度

【定理 10.4】 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在 Ω 有连续的一阶偏导数，则 $\forall M(x,y,z)\in\Omega$，$\boldsymbol{F}$ 在点 M 的散度是如下的数量：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\triangleq\nabla\cdot\boldsymbol{F},\quad\text{其中}\ \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\text{为梯度算符}.$$

▶3. 通量与散度的关系

高斯公式表述了向量场的散度与通量的关系：设 Ω 是空间中有界闭区域，边界是分块光滑的有向闭曲面 S，取外法向，$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在 Ω 有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_\Omega\operatorname{div}\boldsymbol{F}dV=\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS.$$

（二）向量场的环流量与旋度

▶1. 向量场的环流量

【定义 10.4】 设有向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{F}$ 沿分段光滑

www.TopSage.com

定向闭曲线 Γ 的环流量(或环量)为

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s=\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\oint_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

其中 $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Γ 上任意点 (x,y,z) 处单位切向量(指向曲线方向).

▶2. 旋度及其计算公式

【定理 10.5】 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在 Ω 有连续的一阶偏导数,则 $\forall M(x,y,z)\in\Omega$,$\boldsymbol{F}$ 在点 M 的旋度是如下的向量:

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\triangleq\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}\triangleq\nabla\times\boldsymbol{F}.$$

▶3. 环流量与旋度的关系

斯托克斯公式表述了向量场的旋度与环流量的关系.即【定理 10.3】中的斯托克斯公式(10.5)可改写成

$$\iint_S \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是曲线 Γ 沿它的方向的单位切向量.

【例 10.1】 设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,$r=|\boldsymbol{r}|$,$r\neq0$ 时 $f(r)$ 有连续的导数,求下列各量:

(Ⅰ)$\mathbf{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$;　(Ⅱ)$\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,f(r)$($r\neq0$ 时 $f(r)$ 有二阶连续导数).

【解】 (Ⅰ)

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ xf(r)&yf(r)&zf(r)\end{vmatrix}\\&=\left[\frac{\partial}{\partial y}(f(r)z)-\frac{\partial}{\partial z}(f(r)y)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(f(r)x)-\frac{\partial}{\partial x}(f(r)z)\right]\boldsymbol{j}\\&\quad+\left[\frac{\partial}{\partial x}(f(r)y)-\frac{\partial}{\partial y}(f(r)x)\right]\boldsymbol{k}\\&=\left[f'(r)\frac{zy}{r}-f'(r)\frac{yz}{r}\right]\boldsymbol{i}+\left[f'(r)\frac{xz}{r}-f'(r)\frac{zx}{r}\right]\boldsymbol{j}+\left[f'(r)\frac{xy}{r}-f'(r)\frac{xy}{r}\right]\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

(Ⅱ)直接由梯度与散度的计算公式得

$$\mathbf{grad}\,f(r)=\left(\frac{\partial}{\partial x}f(r),\frac{\partial}{\partial y}f(r),\frac{\partial}{\partial z}f(r)\right)=f'(r)\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,f(r)&=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[f'(r)\frac{y}{r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[f'(r)\frac{z}{r}\right]\\&=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\frac{x}{r}\right)+f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{y}{r^2}\frac{y}{r}\right)\\&\quad+f''(r)\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{z}{r^2}\frac{z}{r}\right)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r).\end{aligned}$$

三、格林公式,高斯公式与斯托克斯公式的一个应用——简化多元函数积分的计算

简化多元函数积分计算的一种方法是,利用多元函数积分学中的基本公式将求某种类型的积分转化

www.TopSage.com

为求另一种类型的积分，如利用格林公式可把计算曲线积分转化为计算二重积分，利用高斯公式可把计算曲面积分转化为计算三重积分，或者将求复杂的曲线（曲面）积分转化为求简单的曲线（曲面）积分．

（一）应用格林公式计算曲线积分

由格林公式 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，若其中之一易算，另一也就求出．

若平面区域 D 由分段光滑曲线 C 和 C_0 围成（如图 10.3），其中 C_0 与 C 均取逆时针方向，由格林公式得 $\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{C_0} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是将求 $\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 转化为求 $\int_{C_0} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

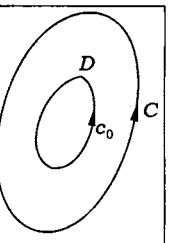


图 10.3

若在 D 上 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$，则有 $\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{C_0} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$．

于是将求 $\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 转化为求 $\int_{C_0} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$．

【例 10.2】 求 $I = \int_L \frac{y^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\mathrm{d}x + [ax + 2y\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})]\mathrm{d}y$，其中 L 为由点 $A(0,R)$ 依逆时针方向到点 $B(0,-R)$ 的半圆周：$x^2 + y^2 = R^2 (x \leqslant 0)$，$a > 0$ 为常数．

【分析】 如果先写出 L 的参数方程再代公式计算不是很简单．一个有效的方法是利用格林公式，但曲线 L 不是封闭曲线，所以要添加辅助线 $\overline{BA}$ 使之构成封闭曲线，以便用格林公式化为二重积分，再减去辅助线上的曲线积分（它容易计算）即得结果（见图 10.4）．

【解】 作定向辅助线 $\overline{BA}$：$x = 0\ (-R \leqslant y \leqslant R)$，由 L 与 $\overline{BA}$ 围成的区域记为 D，它是半径为 R，圆心为 $(0,0)$ 的左半圆，记 $P = \frac{y^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$，$Q = [ax + 2y\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})]$，在 D 上用格林公式得

$$I = \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{\overline{BA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到，在 $\overline{BA}$ 上，$x = 0$，$\mathrm{d}x = 0$，在 D 上

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = a + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{2y}{\sqrt{a^2 + x^2}} = a,$$

于是

$$I = \int_{-R}^{R} 2y\ln a\mathrm{d}y + \iint_D a\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 + a \cdot \frac{\pi}{2}R^2 = \frac{1}{2}\pi aR^2.$$

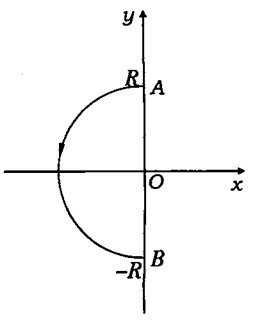


图 10.4

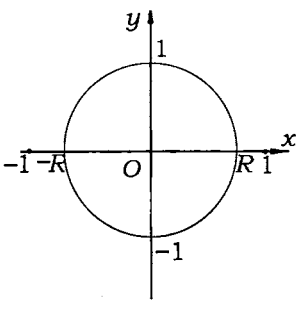


图 10.5

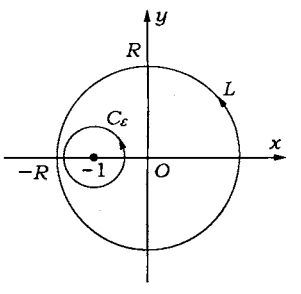


图 10.6

www.TopSage.com

【例 10.3】 求 $I=\int_L \frac{-y}{(x+1)^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 L 是以原点为圆心，R 为半径的圆周，取逆时针方向，$R\neq 1$.

【分析与求解】 令 $P=-\frac{y}{(x+1)^2+y^2}$，$Q=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$，易计算得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad((x+1)^2+y^2\neq 0).$$

若 $R<1$（见图 10.5），在 L 所围的有界闭区域 D 上，P,Q 有连续的一阶偏导数且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则

$$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

若 $R>1$（见图 10.6），在 L 所围的有界闭区域 D 内含点 $(-1,0)$，P,Q 在此点无定义，不能在 D 上用格林公式.

若以 $(-1,0)$ 为圆心，$\varepsilon>0$ 充分小为半径作圆周 $C_\varepsilon((x+1)^2+y^2=\varepsilon^2)$，使得 C_ε 在 L 所围的圆内. 在 L 与 C_ε 所围的区域 D_ε 上利用格林公式得

$$0=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{C_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中 L 与 C_ε 均是逆时针方向. 因此

$$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{C_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon}-y\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\ (\text{在 } C_\varepsilon \text{ 所围区域上用格林公式}).$$

评注 在应用格林公式计算曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 时应注意两个条件：

①L 必须是封闭曲线，若不封闭，要添加辅助线使之成为封闭的，再减去添加部分的线积分必须易算出，如【例 10.2】；

②$P(x,y),Q(x,y)$ 在考虑的区域上应有连续的偏导数，若存在奇点（即 P 或 Q 无定义或偏导数不存在或偏导数不连续的点）则不能直接用格林公式，必须挖掉奇点. 这时，若除去奇点外，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

则求 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 可转化为求特殊的曲线积分 $\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，如【例 10.3】.

（二）应用高斯公式计算曲面积分

由高斯公式

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

若其中之一易求出，则另一也就随之求出.

若闭曲面 Σ 与 Σ_0 围成区域 Ω，Σ 为 Ω 的外边界，Σ_0 为 Ω 的内边界，则

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V+\iint_{\Sigma_0}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 的法向指向 Ω 的外部，Σ_0 的法向指向 Ω 的内部，于是求 $\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为求 $\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$ 与 $\iint_{\Sigma_0}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 若在 Ω，有

www.TopSage.com

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0,$$

则求 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为求 $\iint\limits_{\Sigma_0} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

大家网 TopSage.com

【例 10.4】 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中 Σ 为上半球 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，$a>0$ 为常数.

【分析】 首先 $(x,y,z)\in\Sigma$，$x^2+y^2+z^2=a^2$，被积函数简化为

$$P(x,y,z)=\frac{1}{a}xz^2,\quad Q(x,y,z)=\frac{x^2y-z^3}{a},\quad R(x,y,z)=\frac{2xy+y^2z}{a},$$

于是 $$I=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

直接化第二类曲面积分为二重积分，再化为定积分的公式稍微复杂些. 这里

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{a}(z^2+x^2+y^2)$$

相对于半球域来说较简单，若用高斯公式求曲面积分 I 则较为简单. 因为 Σ 不是封闭曲面，所以要添加辅助曲面.

【解】 添加一块有向曲面 S：$z=0$ $(x^2+y^2\leqslant a^2)$，法向量朝下，S 与 Σ 所围区域为 Ω（见图 10.7），则由高斯公式得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma\cup S}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{a}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+\iint\limits_{D}\frac{2xy}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

（这里 Ω 边界取外法向，S 在 xy 平面上投影区域 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$，$z=0$，S 与 yz 平面，zx 平面均垂直，$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，$\iint\limits_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$）.

因 $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{a}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V\xlongequal{\text{球坐标}\atop\text{变换}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{1}{a}\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{2\pi}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{2}{5}\pi a^4,$$

$$\iint\limits_D\frac{2xy}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\quad(D\text{ 关于 }x,y\text{ 轴对称}),$$

所以 $$I=\frac{2}{5}\pi a^4.$$

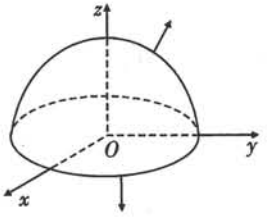


图 10.7

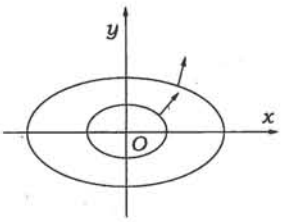


图 10.8

【例 10.5】 求 $I=\iint\limits_S\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，取外侧.

www.TopSage.com

【分析】 直接计算较复杂，若把积分记为 $I=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0 \qquad (\forall (x,y,z)\neq(0,0,0)).$$

因此想到应用高斯公式. 若椭球面 S 围成的区域记为 Ω，它含原点(0,0,0)，而 P,Q,R 在(0,0,0) 无定义，因而不能在 Ω 上直接应用高斯公式. 如果我们作以原点为心的小球面 S_ε 位于 Ω 内，在 S 与 S_ε 所围的区域 Ω_ε 上就可用高斯公式，把求 S 上的曲面积分转化为 S_ε 上的曲面积分.

【解】 作以原点为心，$\varepsilon>0$ 为半径的小球面 S_ε，$\varepsilon>0$ 充分小使 S_ε 位于 S 所围的椭球内. 记 S 与 S_ε 所围的区域为 Ω_ε，S_ε 取 Ω_ε 的内法向(即小球的外法向)，见示意图 10.8(用平面图示意立体图)，在 Ω_ε 上用高斯公式得

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_\varepsilon} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

由于在 Ω_ε 上，P,Q,R 有连续的一阶偏导数且 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

于是 $I=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_\varepsilon}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\dfrac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_\varepsilon} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_\varepsilon^*}3\mathrm{d}V=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi .$$ (在 $\Omega_\varepsilon^*: x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2$ 上用高斯公式)

(三) 应用斯托克斯公式计算曲线积分

常用斯托克斯公式来简化某些空间曲线积分的计算. 特别是，空间曲线是空间中的平面曲线或空间中某些特殊曲面(如球面) 上的曲线.

【例 10.6】 求曲线积分 $I=\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$ 的交线($z\geqslant 0$). L 的方向规定为沿 L 的方向运动时，从 z 轴正向往下看，曲线 L 所围球面部分总在左边(如图 10.9).

【分析与求解】 若写出 L 的参数方程直接计算比较复杂，可考虑用斯托克斯公式来计算.

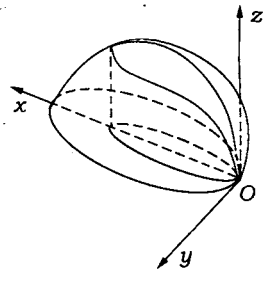


图 10.9

记 L 所围的球面部分为 Σ，按 L 的方向与右手法则，取 Σ 的法向量朝上，先利用曲线方程简化被积函数，然后用斯托克斯公式，得

$$I=\int_L(2bx-x^2)\mathrm{d}x+(2bx-y^2)\mathrm{d}y+2ax\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2bx-x^2 & 2bx-y^2 & 2ax\end{vmatrix}$$

$$=-2a\iint_\Sigma\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2b\iint_\Sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

注意，Σ 关于 zx 平面对称，被积函数 1 对 y 为偶函数，于是 $\iint_\Sigma\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$. 记 Σ 在 xy 平面的投影区域为 $D_{xy}:(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$. 因此 $I=2b\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2b\pi a^2$.

www.TopSage.com

四、平面上曲线积分与路径无关问题及微分式的原函数问题

(一) 相关基本定义

【定义 10.5】 设 D 是平面上的一个区域,若对 D 内任意两点 A,B 及 D 内从 A 点到 B 点的任意两条分段光滑曲线 L_1,L_2,等式

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

恒成立,称曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

【定义 10.6】 若在区域 D 内 $\exists$ 函数 $u(x,y)$,使得 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$,则称 $u(x,y)$ 是 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在区域 D 的原函数.

关于原函数有如下两个简单的结论:

(1) 设 $u(x,y)$ 是 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的原函数,则 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的全体原函数为 $u(x,y) + C$,其中 C 为 $\forall$ 常数.

(2) 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 上连续,则

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y((x,y) \in D) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q((x,y) \in D).$$

(二) $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关时的特征

【定理 10.6】 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 上连续,则

$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关

$\Leftrightarrow$ 对 D 内任意分段光滑闭曲线 C,$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$

$\Leftrightarrow$ 在 D 内存在函数 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ $\left(\text{即}\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q\right)$.

此时 $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + C$,其中 C 为常数.

【定理 10.7】 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 有连续的一阶偏导数.

(1) 若 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关,则 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ $((x,y) \in D)$;

(2) 若 D 是单连通区域,又 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ $((x,y) \in D)$,则 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

【例 10.7】 设 D_0 是单连通区域,点 $M_0 \in D_0, D = D_0 \backslash \{M_0\}$(即 D 是单连通区域 D_0 除去一个点 M_0),若 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 有连续的一阶偏导数且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ $((x,y) \in D)$,问:

(Ⅰ) $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是否一定在 D 上与路径无关;

(Ⅱ) 若又存在一条环绕 M_0 的分段光滑闭曲线 C_0 使得 $\int_{C_0} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$,$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是否一定在 D 上与路径无关.

【解】 (Ⅰ) 这里 D 不是单连通区域,所以不能肯定积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 上与路径无关.例如:

www.TopSage.com

积分$\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$，由于 $P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad(\forall(x,y)\neq(0,0)),$$

即在全平面除原点外 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 均有连续的一阶偏导数，且$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

但若取 L 为 C^+ 即逆时针方向的以原点为圆心的单位圆周，则

$$\int_{C^+}Pdx+Qdy\xrightarrow{\substack{x=\cos\theta\\ y=\sin\theta}}\int_0^{2\pi}[-\sin\theta(\cos\theta)'+\cos\theta(\sin\theta)']d\theta=2\pi\neq 0,$$

因此，该积分不是与路径无关.

（Ⅱ）能肯定积分在 D 上与路径无关. 按挖去奇点的思路，我们作以 M_0 为心，$\varepsilon>0$ 为半径的圆周 C_ε，使 C_ε 在 C_0 所围区域内. C_ε 和 C_0 所围区域记为 D_ε（见图 10.10）. 在 D_ε 上用格林公式得

$$0=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{C_0}Pdx+Qdy-\int_{C_\varepsilon}Pdx+Qdy,$$

其中 C_0，C_ε 均是逆时针方向. 所以

$$\int_{C_\varepsilon}Pdx+Qdy=\int_{C_0}Pdx+Qdy=0.$$

因此，$\varepsilon>0$ 充分小，只要 C_ε 在 C_0 所围区域内，均有

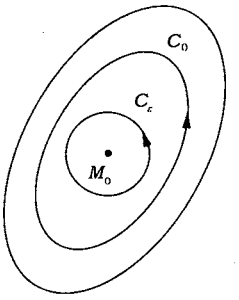


图 10.10

$$\int_{C_\varepsilon}Pdx+Qdy=0.\qquad①$$

现在我们可证：对 D 内任意分段光滑闭曲线 C，均有

$$\oint_C Pdx+Qdy=0.\qquad②$$

若 C 不包围 M_0，在 C 所围的区域上用格林公式，立即可得 ② 式成立. 若 C 包围 M_0 点，则可作以 M_0 为心，$\varepsilon>0$ 为半径的小圆周 C_ε，使得 C_ε 在 C 所围区域内且 ① 成立. 在 C 与 C_ε 所围的区域上用格林公式同理可证

$$\int_C Pdx+Qdy=\int_{C_\varepsilon}Pdx+Qdy=0.$$

（三）如何判断曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$是否与路径无关

假设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 D 连续或有连续的一阶偏导数.

▶1. 由以下方法之一均可断定$\int_L Pdx+Qdy$在区域 D 不是与路径无关：

方法 1° 存在分段光滑闭曲线 $C\subset D$，$\oint_C Pdx+Qdy\neq 0$；

方法 2° $\exists(x,y)\in D$，$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\neq\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$.

▶2. 由以下方法之一均可断定积分$\int_L Pdx+Qdy$在区域 D 内与路径无关：

方法 1° 求得 $u(x,y)$ 使得 $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ $(\forall(x,y)\in D)$；

方法 2° 若 D 是单连通区域，又$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $((x,y)\in D)$；

方法 3° $D=D_0\setminus\{M_0\}$，D_0 是单连通区域，点 $M_0\in D_0$（即 D 是单连通区域除去一个点）. 若$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $(\forall(x,y)\in D)$，又存在一条分段光滑闭曲线 C_0，它包围点 M_0，$\oint_{C_0}Pdx+Qdy=0$.

【例 10.8】 问下列曲线积分在指定区域上是否与路径无关：

$$(\mathrm{I})\int_L \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\ln^2\sqrt{x^2+y^2}+1},\quad \text{区域 } D:\ y>0;\ (\mathrm{II})\int_L \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\ln^2\sqrt{x^2+y^2}+1},\text{区域 } D:\ x^2+y^2>0.$$

【解法一】 (Ⅰ) 这是单连通区域，只需验证 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 是否成立. 依题设有

$$P=\frac{x}{\ln^2 r+1},\quad Q=\frac{y}{\ln^2 r+1},\quad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

又

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2x}{(\ln^2 r+1)^2}\ln r\frac{\partial}{\partial y}(r)=-\frac{2xy}{r(\ln^2 r+1)^2}\ln r=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (y>0),$$

则积分在 D 上与路径无关.

(Ⅱ) 这里 $D:\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 是非单连通区域，由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $(\forall (x,y)\neq(0,0))$ 得不出积分与路径无关. 但可以计算

$$\int_{x^2+y^2=1}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\ln^2 r+1}=\int_{x^2+y^2=1}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\ln^2 1+1}=\int_{x^2+y^2=1}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0.\quad (\text{在 } x^2+y^2\leqslant 1 \text{ 上用格林公式})$$

因此，积分与路径无关.

【解法二】 通过求原函数的方法来证明. 由于

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\ln^2 r+1}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{\ln^2 r+1}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{\ln^2 r+1}=\frac{r\mathrm{d}r}{\ln^2 r+1}$$

$$=\mathrm{d}\left(\int_1^r\frac{t\mathrm{d}t}{\ln^2 t+1}\right)=\mathrm{d}\left(\int_1^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{t\mathrm{d}t}{\ln^2 t+1}\right),$$

即两种情形在 D 上均存在原函数 $u(x,y)=\int_1^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{t\mathrm{d}t}{\ln^2 t+1}$，$\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\ln^2\sqrt{x^2+y^2}+1}$，所以两种情形的积分均在 D 上与路径无关.

【例 10.9】 设 $(P(x,y),Q(x,y))=\left(\frac{x-y}{(x^2+y^2)^n},\frac{x+y}{(x^2+y^2)^n}\right)$，$n$ 为常数，问 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid (x,y)\in\mathbf{R}^2,(x,y)\neq(0,0)\}$ 是否与路径无关.

【解】 先验证 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 是否成立.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{(x^2+y^2)^n}-\frac{2ny(x-y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}=\frac{-x^2-y^2-2nxy+2ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{(x^2+y^2)^n}-\frac{2nx(x+y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}=\frac{x^2+y^2-2nx^2-2nxy}{(x^2+y^2)^{n+1}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\Leftrightarrow\quad -x^2-y^2+2ny^2=x^2+y^2-2nx^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (1-n)(x^2+y^2)=0\quad\Leftrightarrow\quad n=1.$$

因此，当 $n\neq 1$ 时积分不是与路径无关.

当 $n=1$ 时虽有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ $(\forall (x,y)\in D)$，但 D 不是单连通区域，还需进一步讨论.

取 C 为以 $(0,0)$ 为心的单位圆周，逆时针方向，则

$$\int_C\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_C(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y\overset{\text{格林公式}}{=\!=}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi,$$

所以积分也不是与路径无关.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

（四）积分与路径无关时如何求 $I=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 及求原函数的方法

►1. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在平面区域 D 内连续，又设积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关，则可按如下方法求曲线积分 $I=\int_{\overset{\frown}{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ $(\overset{\frown}{AB}\subset D)$：

方法 1° 此时一定 $\exists u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y(\forall(x,y)\in D)$，若求得这种 u，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=u(x,y)\Big|_A^B=u(B)-u(A).$$

方法 2° 选取特殊的路径代替 $\overset{\frown}{AB}$.

►2. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 连续，判断 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 是否存在原函数等同于判断 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 是否与路径无关，可用以下方法求原函数：

方法 1° 不定积分法. 由 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$，对 x 积分得 $u=\int P(x,y)\mathrm{d}x+C(y)$，由 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\mathrm{d}x\right)+C'(y)=Q(x,y)$，求出 $C'(y)$（只是 y 的函数才行），再求 $C(y)$ 即可.

方法 2° 特殊路径积分法. 要先判断，若在单连通区域 D 内 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则积分与路径无关.

于是 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是一个原函数，(x_0,y_0) 是 D 中的定点，(x,y) 是 D 中的动点，适当选取从 (x_0,y_0) 到 (x,y) 的路径来求这个积分. 若在非单连通区域内 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则不能保证积分与路径无关，仍可取特殊路径求出 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$. 但需进一步验证，若 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$ 在 D 成立，则 $u(x,y)$ 就是 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 的一个原函数. 否则 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 就不 $\exists$ 原函数.

方法 3° 观察法（凑微分法）.

【例 10.10】 设 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\mathrm{d}y$，求 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

【解法一】 不定积分法. 由 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}$，对 y 积分，得 $u=\frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}+C(x)$（注意代替积分常数是 x 的任意函数 $C(x)$）. 由 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\mathrm{e}^y}{(1+x^2)^2}+C'(x)=\frac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}$，得 $C'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，进而 $C(x)=-\frac{1}{1+x^2}+C$. 因此，原函数 $u(x,y)=\frac{\mathrm{e}^y-1}{1+x^2}+C$.

【解法二】 特殊路径积分法. 先判断积分是否与路径无关，由

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2x\mathrm{e}^y}{(1+x^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad(\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2),$$

得在全平面积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

这里取折线 OAM 为积分路径，$O(0,0)$，$A(x,0)$，$M(x,y)$（见图 10.11）.

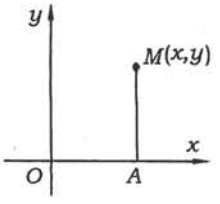


图 10.11

沿 $\overline{OA}$：$y=0,\mathrm{d}y=0$，得 $\int_{\overline{OA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x$；

沿 $\overline{AM}$：$\mathrm{d}x=0$，得 $\int_{\overline{AM}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y$.

www.TopSage.com

代入 P,Q 表达式得

$$u(x,y) = \int_0^x 0\,dx + \int_0^y \frac{e^y}{1+x^2}dy = \frac{e^y}{1+x^2}\Big|_0^y = \frac{e^y-1}{1+x^2}.$$

这是一个原函数,全体原函数是 $u(x,y) = \dfrac{e^y-1}{1+x^2} + C$.

【解法三】 观察法 —— 凑微分法. 由微分运算法则倒写回去,则有

$$du = \frac{(1-e^y)d(x^2+1) + (1+x^2)de^y}{(1+x^2)^2} = -\frac{(1+x^2)d(1-e^y) - (1-e^y)d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= d\left(-\frac{1-e^y}{1+x^2}\right) = d\left(\frac{e^y-1}{1+x^2}\right),$$

因此,$u = \dfrac{e^y-1}{1+x^2} + C$.

注 ① 若 $du_1(x,y) = P_1dx + Q_1dy$, $du_2(x,y) = P_2dx + Q_2dy$, 且 $P_1 = P_2$, $Q_1 = Q_2$, 则 $u_1(x,y) = u_2(x,y) + C$, C 为某常数,即此时一个原函数总要加上一个任意常数才得全体原函数.

② 仅当你很有把握凑出全微分表达式时才用此法,不可花费很多时间去观察凑,因为有的时候"观察法"或"凑法"一定是行不通的.

【例 10.11】 设 $f(s)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续的导数,计算

$$I = \int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx + \frac{x}{y^2}[y^2f(xy) - 1]dy,$$

其中 L 为从点 $A\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$ 到 $B(1,2)$ 的直线段.

【解法一】 先验算积分是否与路径无关. 若是,便可选择适当的积分路径,使积分化简.

令 $P(x,y) = \dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)]$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$,易验证:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2f(xy) + xy^3f'(xy) - 1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (y>0)$$

这是单连通区域,故积分与路径无关,可以选择从 A 到 B 的任何一条位于 x 轴上方的曲线作为积分路径.

为了简化计算,我们选择积分路径为折线 ACB,其中 $C\left(1,\dfrac{2}{3}\right)$(见图 10.12).

注意到,$\overline{AC}$: $y = \dfrac{2}{3}$, x 从 3 到 1, $dy = 0$;

$\overline{CB}$: $x = 1$, y 从 2/3 到 2, $dx = 0$.

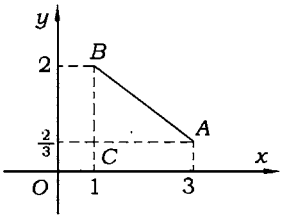


图 10.12

则 $I = \int_3^1 \dfrac{1+\frac{4}{9}f\left(\frac{2}{3}x\right)}{\frac{2}{3}}dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{y^2}[y^2f(y) - 1]dy$

$$= -\int_1^3 \frac{3}{2}dx - \int_1^3 \frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}x\right)dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y)dy - \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{dy}{y^2}$$

$$= -3 - \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y)dy + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y)dy + \frac{1}{y}\Big|_{\frac{2}{3}}^2 = -3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -4.$$

【解法二】 求出被积表达式的原函数,然后求原函数的改变量. 因为

$$\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx + \frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy = \frac{ydx - xdy}{y^2} + f(xy)(ydx + xdy)$$

www.TopSage.com

$$= \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\,\mathrm{d}(xy) = \mathrm{d}\left[\frac{x}{y} + \int_1^{xy} f(s)\,\mathrm{d}s\right],$$

所以 $I = \left[\frac{x}{y} + \int_1^{xy} f(s)\,\mathrm{d}s\right]\Big|_{(3,\frac{2}{3})}^{(1,2)} = \frac{1}{2} + \int_1^2 f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{9}{2} - \int_1^2 f(s)\,\mathrm{d}s = -4$.

评注 本例中若只能设 $f(s)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，而没有假定它有连续的导数，则【解法一】中通过验证 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 是证明积分与路径无关的方法失效，因为这时 P,Q 不一定有偏导数，如【解法二】用原函数的方法证明积分与路径无关并求积分值仍然有效.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 格林公式、高斯公式与斯托克斯公式在计算多元函数积分中的应用

▶1. 直接用格林公式计算第二类曲线积分或估计第二类曲线积分

【例 10.12】 求 $I = \oint_{C^+} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,\mathrm{d}y$，其中 C^+ 是以 $A(1,1)$，$B(2,2)$ 和 $E(1,3)$ 为顶点的三角形的正向边界线.

【分析】 直接用格林公式

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求左端的曲线积分转化为求右端的二重积分，若这个二重积分容易计算则达目的. D 是闭曲线 C 所围成的区域(见图 10.13).

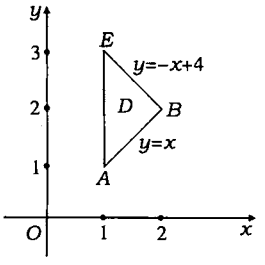


图 10.13

【解】 记 $I = \oint_{C^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = y^2.$$

记 D 为三角形区域 ABE，则直接由格林公式得

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用先 y 后 x 的积分顺序，$D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, x \leqslant y \leqslant -x+4\}$，则

$$I = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^{-x+4} y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_1^2 y^3\Big|_x^{-x+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 [(-x+4)^3 - x^3]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_2^3 t^3\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}x^4\Big|_1^2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}t^4\Big|_2^3 - \frac{1}{4}\times 15\right)$$

$$= \frac{1}{12}(65-15) = \frac{25}{6}.$$

【例 10.13】 设 C 是圆周 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$，取逆时针方向，$f(x)$ 是连续正值函数，证明：

$$\oint_C xf(y)\,\mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi.$$

【分析与证明】 记 C 围成的圆域为 $D:(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$，用格林公式将 C 上的曲线积分转化为 D 上的二重积分，然后利用对称性并估计二重积分.

www.TopSage.com

$$I \overset{\text{记}}{=\!=\!=} \int_C -\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x + xf(y)\mathrm{d}y = \iint_D \left[f(y) + \frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}\sigma \text{（格林公式）}.$$

因为 D 关于 $y = x$ 对称，即 $\iint_D f(y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x)\mathrm{d}\sigma$，所以

$$I = \iint_D \left[f(x) + \frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_D 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

评注 给出本题上述三种重积分的方法，即用格林公式转化为曲线二重积分之后为定参分析化方法计算积分.

▶2. 用格林公式求非闭曲线的第二类曲线积分

【例 10.14】 设 $\varphi(y)$ 有连续导数，L 为半圆周：$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}(y \geqslant x)$，从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,\pi)$ 方向，求曲线积分

$$I = \int_L [\varphi(y)\cos x - y]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\sin x - 1]\mathrm{d}y.$$

【分析与求解】 若要用格林公式求非闭曲线 L 上的线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 时，先要添加定向辅助线 L_1 使 $L \cup L_1$ 构成闭曲线，所围区域为 D，若是正向边界，则 $\int_{L\cup L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．若是负向边界，则

$$\int_{L\cup L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 转化为求 L_1 上的线积分和一个二重积分，如果它们都容易计算的话，则达目的.

如图 10.14 所示，L 是非闭曲线，再加直线段 $\overline{AO}$，使它们构成沿顺时针方向的闭曲线，并把它们围成的区域记为 D.

记 $P(x,y) = \varphi(y)\cos x - y$，$Q(x,y) = \varphi'(y)\sin x - 1$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

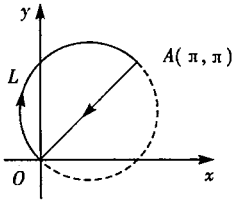


图 10.14

又

$$\int_{\overline{AO}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\overline{AO}} [\varphi(y)\cos x - y]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\sin x - 1]\mathrm{d}y$$

$$\overset{y=x}{=\!=\!=} \int_{\pi}^{0} [(\varphi(x)\cos x - x) + (\varphi'(x)\sin x - 1)]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\varphi(x)\sin x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]\Big|_{\pi}^{0} = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi,$$

因此，在 D 上用格林公式得

$$\left(\int_L + \int_{\overline{AO}}\right)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2.$$

于是

$$I = -\frac{1}{4}\pi^3 - \int_{\overline{AO}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi^2 - \pi.$$

▶3. 用格林公式把难求的曲线积分转化为易求的曲线积分

【例 10.15】 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周（$R \neq 1$），取逆时针方向.

【分析】 记 $P = \frac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q = \frac{x}{4x^2+y^2}$，当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时，

www.TopSage.com

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2}.$$

记 L 围成的区域为 D,若 D 不含原点($R < 1$),则可在 D 上用格林公式.若 D 含原点($R > 1$),则不能在 D 上用格林公式,要在 D 内挖去含原点的某区域后再用格林公式(见图 10.15).

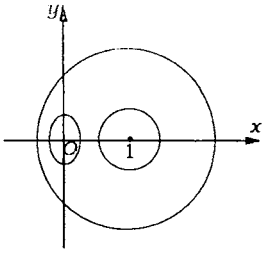


图 10.15

【解】 设 $R < 1$,则 $I = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$

设 $R > 1$,取 $\varepsilon > 0$ 充分小使椭圆 C_ε(取逆时针方向)

$$4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$$

含于 L 所围区域 D 内,记 L 与 C_ε 围成区域为 D_ε,在 D_ε 上用格林公式得

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \int_{C_\varepsilon} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \pi.$$

评注 由格林公式知,$\int_{C_\varepsilon} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2 \times$ 椭圆面积 $= 2 \cdot \pi \frac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon = \pi\varepsilon^2$.

▶4. 用高斯公式求曲面积分

【例 10.16】 求曲面积分 $I = \iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是长方体 Ω: $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c$ 的表面外侧.

【解】 直接用高斯公式 $I = \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_\Omega (x + y + z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

化三重积分为累次积分:记长方体分别在 yz 平面,zx 平面与 xy 平面上的投影区域为 D_{yz}, D_{zx}, D_{xy},则

$$I = 2\left(\iint_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_0^a x\mathrm{d}x + \iint_{D_{zx}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\int_0^b y\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^c z\mathrm{d}z\right) = abc(a + b + c).$$

评注 ① 这题是直接用高斯公式计算曲面积分.因为 S 是分块光滑闭曲面,被积函数在 S 围成的闭区域 Ω 上有连续的一阶偏导数,满足应用高斯公式的条件,又计算相应的三重积分较简单.

② 可利用平移变换与对称性计算题中的三重积分.即

$$2\iiint_\Omega (x + y + z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_\Omega \left[\left(x - \frac{a}{2}\right) + \left(y - \frac{b}{2}\right) + \left(z - \frac{c}{2}\right)\right]\mathrm{d}V + \iiint_\Omega (a + b + c)\,\mathrm{d}V$$

$$= 0 + (a + b + c)abc.$$

因为 $\iiint_\Omega \left[\left(x - \frac{a}{2}\right) + \left(y - \frac{b}{2}\right) + \left(z - \frac{c}{2}\right)\right]\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega'} (u + v + w)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = 0,$

其中 $\Omega' = \left\{(u,v,w) \mid -\frac{a}{2} \leqslant u \leqslant \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leqslant v \leqslant \frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \leqslant w \leqslant \frac{c}{2}\right\}$.

③ 均匀立体 Ω 的质心是 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.由质心公式可得

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{abc}\left(\iiint_\Omega x\mathrm{d}V, \iiint_\Omega y\mathrm{d}V, \iiint_\Omega z\mathrm{d}V\right),$$

于是,$\iiint_\Omega (x + y + z)\,\mathrm{d}V = \frac{abc(a + b + c)}{2}.$

【例 10.17】 求曲面积分 $I = \iint_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{1 + z^2}, (1 \leqslant z \leqslant 2) \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转面,其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

【分析】 首先求出曲面 S 的方程:$x^2 + y^2 = 1 + z^2$ $(1 \leqslant z \leqslant 2)$,法向量朝上.

www.TopSage.com

记 $P = xz^2, Q = 0, R = -\sin x$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = z^2$ 较简单，但 S 不是封闭曲面，为了用高斯公式，添加辅助面 $S_1: z = 2\ (x^2 + y^2 \leqslant 5)$，法向量朝下；$S_2: z = 1 (x^2 + y^2 \leqslant 2)$，法向量朝上．在 $S \cup S_1 \cup S_2$ 围成的区域 Ω 上可用高斯公式来计算．

TopSage.com

【解】 在 $S \cup S_1 \cup S_2$ 围成的区域 Ω 上应用高斯公式，因边界取内法向，故

$$\iint\limits_{S \cup S_1 \cup S_2} xz^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \sin x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}V = -\int_1^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D(z)} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_1^2 z^2 \pi (1 + z^2) \mathrm{d}z$$

$$= -\pi \left(\frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_1^2 = -\frac{128}{15} \pi,$$

其中 Ω 为 $z^2 + 1 = x^2 + y^2$ 与 $z = 1, z = 2$ 所围，圆 $D(z)$ 的半径为 $\sqrt{1 + z^2}$．又

$$\iint\limits_{S_i} xz^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \sin x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{S_i} -\sin x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \mp \iint\limits_{D_i} -\sin x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 (i = 1 \text{ 时公式取“}-\text{”}, i = 2 \text{ 时公式取“}+\text{”}),$$

其中 S_i 与 yz 平面垂直 $(i = 1, 2)$，D_i 为 S_i 在 xy 平面上的投影区域分别是圆域 $x^2 + y^2 \leqslant 5, x^2 + y^2 \leqslant 2$.

因此 $I = -\dfrac{128}{15}\pi - 0 - 0 = -\dfrac{128}{15}\pi.$

▶5. 用斯托克斯公式计算曲线积分

【例 10.18】 求曲线积分 $I = \int_L 2yz\mathrm{d}x + (2z - z^2)\mathrm{d}y + (y^2 + 2xy + 3y)\mathrm{d}z$，其中 L 为闭曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 3/2, \end{cases}$ 从原点向 L 看去，L 沿顺时针方向．

【分析与求解】 用斯托克斯公式．平面 $x + y + z = \dfrac{3}{2}$ 上 L 围成的平面区域记为 Σ，按右手法则，法向量 $\boldsymbol{n}$ 朝上，且 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，于是

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & 2z - z^2 & y^2 + 2xy + 3y \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} [(2y + 2x + 3 - 2 + 2z) + (2y - 2y) + (-2z)] \mathrm{d}S$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \left(x + y + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}S = \frac{2}{3\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \left(3x + 3y + \frac{3}{2} \right) \mathrm{d}S$$

$$\xlongequal[\text{对称性}]{\text{变量轮换}} \frac{2}{3\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \left[2(x + y + z) + \frac{3}{2} \right] \mathrm{d}S \xlongequal[2(x + y + z) = 3]{\Sigma \text{ 的方程}} \frac{2}{3\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \left(3 + \frac{3}{2} \right) \mathrm{d}S$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S = \sqrt{3}\sigma,$$

其中 σ 是 Σ 的面积．

这里把坐标轴的名称互换，Σ 的方程不变，于是

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S \Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} (3x + 3y)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} 2(x + y + z)\mathrm{d}S.$$

L 是平面 $\left(x + y + z = \dfrac{3}{2} \right)$ 与球面 $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ 的交线，它是圆周．现求它的半径 r，原点 O 到平

www.TopSage.com

面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 的距离 $d=\frac{3}{2}\Big/\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，于是 $r=\sqrt{1-d^2}=\frac{1}{2}$，$\sigma=\pi r^2=\frac{\pi}{4}$.

因此 $I=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$.

题型二　平面上第二类曲线积分与路径无关问题与原函数的求法

▶1. $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 存在原函数问题与求解

【例 10.19】 下面连续可微的向量函数 $\{P(x,y),Q(x,y)\}$ 在指定的区域 D 上是否有原函数 $u(x,y)$（$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 或 $\mathbf{grad}u=\{P,Q\}$）. 若有，求出原函数.

$$\{P,Q\}=\left\{\frac{3y-x}{(x+y)^3},\frac{y-3x}{(x+y)^3}\right\},\quad D=\{(x,y)\mid y>-x\}.$$

【解】 先验算 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上是否恒成立.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-3}{(x+y)^3}-\frac{3(y-3x)}{(x+y)^4}=\frac{6(x-y)}{(x+y)^4},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3}{(x+y)^3}-\frac{3(3y-x)}{(x+y)^4}=\frac{6(x-y)}{(x+y)^4},$$

则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$. 因 D 是单连通区域，则存在原函数.

现用求不定积分的方法求原函数：

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3y-x}{(x+y)^3}=\frac{4y}{(x+y)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}$（恒等变形，便于积分）对 x 积分，得

$$u(x,y)=-\frac{2y}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}+C(y)=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C(y),$$

则
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}+C'(y)=\frac{-3x+y}{(x+y)^3}+C'(y)=\frac{y-3x}{(x+y)^3},$$

所以
$$C'(y)=0,\quad C(y)=C.$$

因此，原函数 $u(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$.

【例 10.20】 问 λ 取何值，可使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并确定函数 $u(x,y)$ 的表达式.

【分析与求解】 记 $\boldsymbol{A}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j},x>0$ 是单连通区域，先由 (P,Q) 为某二元函数 u 的梯度的充要条件 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 定出参数 λ.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^{\lambda}+\lambda 4xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^{\lambda}-\lambda 4x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Leftrightarrow 4x(x^4+y^2)^{\lambda}+4\lambda x(x^4+y^2)^{\lambda}=0\quad(\forall x>0)\Leftrightarrow\lambda=-1.$$

现求 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y)=\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y$.

方法 1° 凑微分法.

$$\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=\frac{-\frac{x^2\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x^2}{(x^2)^2}}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}=-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}=-\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x^2}\right),\qquad(*)$$

www.TopSage.com

则　　$u(x,y) = -\arctan\frac{y}{x^2} + C$.

方法 2° 不定积分法.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow u = \int\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x = \int\frac{-y\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{y^2}{x^4}} \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow \quad u = -\arctan\frac{y}{x^2} + C(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^4}}\cdot\frac{1}{x^2} + C'(y) = -\frac{x^2}{x^4+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad C'(y) = 0, \text{即 } C(y) = C(C\text{为任意常数}).$$

同样求得　$u(x,y) = -\arctan\frac{y}{x^2} + C$.

方法 3° 特殊路径积分法. 在右半平面取点(1,0)为积分路径的起点,积分路径取折线,则有

$$\int_{(1,0)}^{(x,y)}\left(\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y\right) = \int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0^2}\mathrm{d}x - \int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^y\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x^2}\right) = -\arctan\frac{y}{x^2}.$$

于是,全体原函数 $u(x,y) = -\arctan\frac{y}{x^2} + C$.

评注　① 在用凑微分法求原函数时,要非常熟悉微分运算法则,如这里用到商的微分公式:

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

② 在用凑微分法时,我们作了如(*)式的变形,而不作如下变形:

$$\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y = \frac{\frac{y\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}y}{y^2}}{1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y}\right)}{1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x^2}{y}\right).$$

此公式虽正确,但要限制 $y\neq 0$. 该题目只限制 $x>0$,可允许 $y=0$. 对(**)式的变形也有类似的问题.

▶2. 判断曲线积分与路径无关并求积分

【例 10.21】　计算曲线积分 $I = \int_L\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$,其中 L 是从点 $A(-a,0)$ 经上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1(y\geqslant 0)$ 到点 $B(a,0)$ 的弧段.

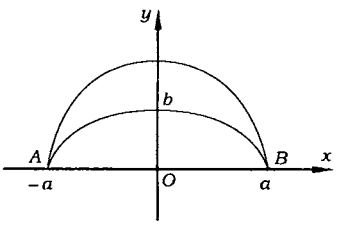


图 10.16

【分析】　记 $P = \frac{x-y}{x^2+y^2}$,　$Q = \frac{x+y}{x^2+y^2}$,易算

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

在上半平面(含 x 轴但不含原点为单连通区域)曲线积分与路径无关,因此求沿椭圆的曲线积分可以转化为求沿半圆周的曲线积分.

【解】　设 C 是从点 $A(-a,0)$ 经上半圆 $x^2+y^2 = a^2(y\geqslant 0)$ 到点 $B(a,0)$ 的弧段(图 10.16). 因在上半平面(含 x 轴但不含原点)积分与路径无关,于是得

www.TopSage.com

$$I = \int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = \int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_C (x-y)dx + (x+y)dy .$$

对右端的线积分,可直接用 C 的参数方程 $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $(\pi \geqslant t \geqslant 0)$,来计算:

$$I = \int_{\pi}^{0} [(\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t]dt = -\pi .$$

求曲线积分 $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$,有时通过观察可将积分分解成

$$I = I_1 + I_2 = \int_{\overset{\frown}{AB}} P_1 dx + Q_1 dy + \int_{\overset{\frown}{AB}} P_2 dx + Q_2 dy,$$

其中易由凑微分法求得 $P_1dx + Q_1dy$ 的原函数 $u(x,y)\left(\int_{\overset{\frown}{AB}} P_1dx + Q_1dy \text{ 与路径无关}\right)$,于是

$$I_1 = \int_{\overset{\frown}{AB}} du = u\Big|_A^B .$$

而对 I_2 可直接化为定积分,下面的例子就是这样.

【例 10.22】 求曲线积分 $J = \int_L (e^x\sin y - my - y)dx + (e^x\cos y - mx)dy$,其中 L: $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ t 从 0 到 π,$a > 0$.

【分析与求解】 将积分 J 分解成 $J = J_1 + J_2$,其中

$$J_1 = \int_L \sin y de^x + e^x d(\sin y) - m(ydx + xdy), \quad J_2 = \int_L -ydx .$$

J_1 易通过求原函数而求得,J_2 容易直接计算:

$$J_1 = \int_L d(e^x\sin y - mxy) = (e^x\sin y - mxy)\Big|_{(0,0)}^{(\pi a, 2a)} = e^{\pi a}\sin 2a - 2m\pi a^2,$$

$$J_2 = -\int_L ydx = -\int_0^{\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$$

$$= -4a^2\int_0^{\pi} \sin^4\frac{t}{2}dt = -8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 s ds = -8a^2\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi a^2,$$

因此 $$J = J_1 + J_2 = e^{\pi a}\sin 2a - 2ma^2\pi - \frac{3}{2}a^2\pi.$$

▶3. 由曲线积分与路径无关条件确定被积表达式中某些待定函数

【例 10.23】 设 $Q(x,y)$ 在 Oxy 平面有一阶连续偏导数,积分 $\int_L 2xydx + Q(x,y)dy$ 与路径无关. $\forall t$ 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x,y)dy, \qquad (*)$$

求 $Q(x,y)$.

【分析与求解】 首先由单连通区域上曲线与路径无关的充要条件得 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$. 对 x 积分得 $Q(x,y) = x^2 + \varphi(y)$,下面由(*)定出 $\varphi(y)$,为此就要求(*)中的曲线积分,得到 $\varphi(y)$ 满足的关系式,再求 $\varphi(y)$.

方法 1° 通过求原函数计算积分:

$$2xydx + [x^2 + \varphi(y)]dy = d\left[x^2y + \int_0^y \varphi(s)ds\right].$$

由(*)式,得 $\left[x^2y + \int_0^y \varphi(s)ds\right]\Big|_{(0,0)}^{(t,1)} = \left[x^2y + \int_0^y \varphi(s)ds\right]\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}$,

www.TopSage.com

即 $$t^2+\int_0^1\varphi(s)\,ds=t+\int_0^t\varphi(s)\,ds\quad(\forall t).$$

求导得 $2t=1+\varphi(t)\quad(\forall t)$,即 $\varphi(t)=2t-1$,易验证它满足上式.

因此 $$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)=x^2+2y-1.$$

方法 2° 取特殊路径计算曲线积分(图 10.17):

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,dx+[x^2+\varphi(y)]\,dy\quad\left(=\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AM}}\right)$$

$$=0+\int_0^1[t^2+\varphi(y)]\,dy=t^2+\int_0^1\varphi(y)\,dy,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,dx+[x^2+\varphi(y)]\,dy\quad\left(=\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AM}}\right)$$

$$=0+\int_0^t[1+\varphi(y)]\,dy=t+\int_0^t\varphi(y)\,dy.$$

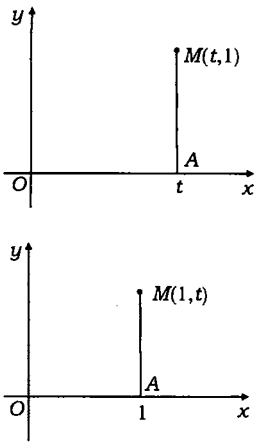


图 10.17

由(*)式得 $t^2+\int_0^1\varphi(y)\,dy=t+\int_0^t\varphi(y)\,dy$.

同样可求得 $\varphi(y)=2y-1$. 故 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

【例 10.24】 设曲线积分 $\oint_L 2[x\varphi(y)+\psi(y)]\,dx+[x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)]\,dy=0$,其中 L 为任意一条平面分段光滑闭曲线,$\varphi(y)$,$\psi(y)$ 是连续可微的函数.

(Ⅰ) 若 $\varphi(0)=-2$,$\psi(0)=1$,试确定函数 $\varphi(y)$ 与 $\psi(y)$;

(Ⅱ) 计算沿 L 从点 $O(0,0)$ 到 $M\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ 的曲线积分.

【解】 (Ⅰ) 由假设条件,该曲线积分与路径无关,将曲线积分记为 $\oint_L P\,dx+Q\,dy$,由单连通区域上曲线积分与路径无关的充要条件知,$\varphi(y)$,$\psi(y)$ 满足 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,即

$$2[x\varphi'(y)+\psi'(y)]=2x\psi(y)+2y^2-2\varphi(y).$$

由此得 $$x[\varphi'(y)-\psi(y)]=y^2-\varphi(y)-\psi'(y).$$

由于 x,y 是独立变量,若令 $x=0$,则 $y^2-\varphi(y)-\psi'(y)=0$. 将之代回上式又得

$$\varphi'(y)-\psi(y)=0.$$

因此,$\varphi(y)$,$\psi(y)$ 满足 $\begin{cases}\varphi'(y)=\psi(y),\\ \psi'(y)=y^2-\varphi(y).\end{cases}$

将第一个方程 $\psi(y)=\varphi'(y)$ 代入第二个方程得 $\varphi''(y)+\varphi(y)=y^2$. 这是二阶线性常系数非齐次方程,它的通解是 $\varphi(y)=c_1\cos y+c_2\sin y+y^2-2$. 由条件 $\varphi(0)=-2$,$\varphi'(0)=\psi(0)=1$,得 $c_1=0$,$c_2=1$,于是求得 $\varphi(y)=\sin y+y^2-2$,$\psi(y)=\varphi'(y)=\cos y+2y$.

(Ⅱ) **方法 1°** 求 u 使得 $du=P\,dx+Q\,dy$. 把 φ,ψ 的关系式代入并整理得

$$\begin{aligned}P\,dx+Q\,dy&=\varphi(y)\,dx^2+x^2\,d\varphi(y)+\psi(y)\,d(2x)+2x[y^2-\varphi(y)]\,dy\\&=d[x^2\varphi(y)]+\psi(y)\,d(2x)+2x\,d\psi(y)\\&=d[x^2\varphi(y)+2x\psi(y)].\end{aligned}$$

因此 $$\int_{\overset{\frown}{OM}}P\,dx+Q\,dy=[x^2\varphi(y)+2x\psi(y)]\Big|_{(0,0)}^{(\pi,\frac{\pi}{2})}$$

$$=\pi^2\left(1+\frac{\pi^2}{4}-2\right)+2\pi\cdot\pi=\pi^2+\frac{\pi^4}{4}.$$

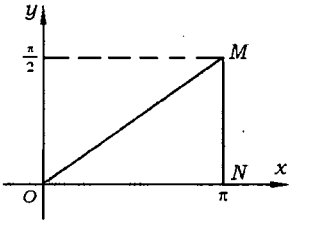


图 10.18

方法 2° 取特殊路径求积分. 取折线 ONM 为积分路径,见图 10.18,则

$$\int_{\overset{\frown}{OM}}P\,dx+Q\,dy=\int_{\overline{ON}}P(x,0)\,dx+\int_{\overline{NM}}Q(\pi,y)\,dy$$

www.TopSage.com

$$= \int_0^{\pi}(2-4x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\pi^2(\cos y + 2y) - 2\pi(\sin y - 2)]\,dy$$

$$= 2\pi - 2\pi^2 + \pi^2\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) + 2\pi^2 - 2\pi = \pi^2\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right).$$

大家网 TopSage.com

题型三　散度与旋度的计算

【例 10.25】 设有数量函数 $u(x,y,z)$ 及向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$，其中 P, Q, R, u 在 Ω 上有连续的二阶偏导数，证明：

(Ⅰ) $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \xlongequal{\text{记}} \Delta u$；

(Ⅱ) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F}) = 0$；

(Ⅲ) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u) = \boldsymbol{\theta}$.

【证明】 由梯度，散度及旋度的计算公式得到：

(Ⅰ) $\mathbf{grad}u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{grad}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \xlongequal{\text{记}} \Delta u.$$

(Ⅱ) $$\mathbf{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0.$$

(Ⅲ) $\mathbf{grad}u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$，

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\theta}.$$

题型四　综合题

【例 10.26】 设 S 是上半空间 $z > 0$ 中任意光滑闭曲面，S 围成区域 Ω，函数 $u = \rho w(\rho)$ $(\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 在上半空间有连续的二阶偏导数，满足

$$\oint_S \frac{\partial u}{\partial x}dydz + \frac{\partial u}{\partial y}dzdx + \frac{\partial u}{\partial z}dxdy - \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV = 0,$$

求 $w(\rho)$.

【分析与求解】 即求 $u(\rho)$. 由高斯公式得

www.TopSage.com

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dV=0,$$

由 Ω 的任意性得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}-e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0\ (z>0).$ (*)

注意 u 只依赖于 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 可用 $\dfrac{du}{d\rho}$ 与 $\dfrac{d^2u}{d\rho^2}$ 表示. 由复合函数求导法得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}=\frac{x}{\rho}\frac{du}{d\rho},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\frac{du}{d\rho}\right)=\frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2}+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{x^2}{\rho^3}\right)\frac{du}{d\rho},$$

同理 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{y^2}{\rho^2}+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{y^2}{\rho^3}\right)\frac{du}{d\rho},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{z^2}{\rho^2}+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{z^2}{\rho^3}\right)\frac{du}{d\rho}.$$

于是，(*) 化成 $\dfrac{d^2u}{d\rho^2}+\dfrac{2}{\rho}\dfrac{du}{d\rho}=e^{\rho}.$

这是可降价的二阶线性方程，两边乘 ρ^2 得 $\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho^2\dfrac{du}{d\rho}\right)=\rho^2 e^{\rho}.$

积分得 $$\rho^2\frac{du}{d\rho}=\int\rho^2 e^{\rho}d\rho+C_1=\rho^2 e^{\rho}+2e^{\rho}(1-\rho)+C_1,\quad \frac{du}{d\rho}=e^{\rho}+2e^{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{C_1}{\rho^2},$$

再积分得 $$u(\rho)=e^{\rho}+\int 2e^{\rho}\frac{1}{\rho^2}d\rho-\int\frac{2}{\rho}de^{\rho}-\frac{C_1}{\rho}+C_2=e^{\rho}-\frac{2}{\rho}e^{\rho}-\frac{C_1}{\rho}+C_2,$$

其中 C_1,C_2 为任意常数. 因此 $w=\dfrac{u}{\rho}=\dfrac{1}{\rho}e^{\rho}-\dfrac{2}{\rho^2}e^{\rho}-\dfrac{C_1}{\rho^2}+\dfrac{C_2}{\rho}.$

评注 设 Ω 是空间中的有界区域，P,Q,R 在 Ω 有连续的偏导数，若对 Ω 内任意光滑闭曲面 S 均有

$$\oint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=0,$$

则由高斯公式得 $\iiint_{\Omega_1}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dV=0,$

其中 Ω_1 是由 S 围成的区域，由 Ω_1 的任意性得

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,\ \forall (x,y,z)\in\Omega_1.$$

【例 10.27】 设平面上有界闭区域 D 由光滑曲线 C 围成，C 取正向(如图 10.19).

(Ⅰ) $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 有连续的一阶偏导数，证明格林公式的另一种形式：

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_C(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是 C 的单位外法向量.

(Ⅱ) 设 $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 有连续的二阶偏导数，求证：

$$\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\int_C v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}ds-\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy.\tag{10.7}$$

(Ⅲ) 设 $u(x,y)$ 在 D 有连续的二阶偏导数且满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (x,y)\in D,\\ u(x,y)=0, & (x,y)\in C,\end{cases}$$

求证：$u(x,y)=0\ ((x,y)\in D)$.

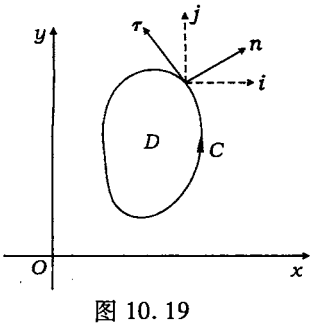


图 10.19

【分析与证明】 (Ⅰ) 将格林公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_C P\,dx+Q\,dy$$

www.TopSage.com

中 Q 换成 P,P 换成 $-Q$,得

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_C P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x.$$

由第一、二类曲线积分的关系得

$$\int_C P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=\int_C[P\cos\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{j}\rangle-Q\cos\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{i}\rangle]\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是 C 的单位切向量且沿 C 的方向. 注意 $\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{j}\rangle=\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}\rangle$, $\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{i}\rangle=\pi-\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}\rangle$.

于是 $$\int_C P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=\int_C[P\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}\rangle+Q\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}\rangle]\mathrm{d}s=\int_C(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s.$$

因此证得结论.

(Ⅱ) 由方向导数计算公式得 $\int_C v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_C v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s$.

再由格林公式的另一种形式(即题(Ⅰ)的结论)得

$$\begin{aligned}\int_C v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s&=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D v\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

再移项即得证.

(Ⅲ) 因 $u(x,y)\big|_C=0$,要证 $u(x,y)\equiv0((x,y)\in D)$,只需证 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0((x,y)\in D)$. 在(10.7)式中取 $v(x,y)=u(x,y)$,得

$$\iint_D u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_C u\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s-\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\Rightarrow\quad\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0((x,y)\in D)$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0((x,y)\in D)\quad\Rightarrow\quad u(x,y)=0((x,y)\in D).$$

题型训练

一、填空题

1. 设 L 是区域 $D:x^2+y^2\leqslant-2x$ 的正向边界,则 $I=\int_L(x^3-y)\mathrm{d}x+(x-y^3)\mathrm{d}y=$ _____.

2. 设 L 是平面上从圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上 $\forall$ 一点到圆周 $x^2+y^2=b^2$ 上 $\forall$ 一点的一条光滑曲线($a>0$, $b>0$),$r=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $I=\int_L r^3(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=$ _____.

3. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,常数 λ 使得曲线积分 $\oint_L\frac{x}{y}r^\lambda\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}r^\lambda\mathrm{d}y=0$ 对上半平面的任何光滑闭曲线 L 成立,则 $\lambda=$ _____.

二、求下列平面上曲线积分:

1. $I=\int_L[y^2-2xy\sin(x^2)]\mathrm{d}x+\cos(x^2)\mathrm{d}y$,其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右半部分,从 $A(0,-b)$ 到 $B(0,b)$.

2. $I=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$,其中 $A(0,-1)$,$B(1,0)$,$\overset{\frown}{AB}$ 为单位圆在第四象限部分.

www.TopSage.com

3. $I=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{(x-1)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{[(x-1)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$，其中$\overset{\frown}{AB}$是沿椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$正向从$A(a,0)$到$(0,b)$的一段弧，$a\neq 1$.

4. $I=\int_L\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中$L$是椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，取逆时针方向.

三、求下列曲面积分

1. $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$为由曲面$y=x^2+z^2$与平面$y=1,y=2$所围立体表面的外侧.

2. $I=\iint_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma_1$为圆柱面$x^2+y^2=a^2$上$x\geqslant 0,0\leqslant z\leqslant 1$部分，法向量与$x$轴正向成锐角，$\Sigma_2$为$Oxy$平面上半圆域$x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0$部分，法向量与$z$轴正向相反.

3. $I=\iint_S(x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(z\geqslant 0)$的上侧.

四、求下列空间中的曲线积分

1. $I=\int_C 2yz\mathrm{d}x+(2z-z^2)\mathrm{d}y+(y^2+2xy+3y)\mathrm{d}z$，其中$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=\frac{3}{2},\end{cases}$且从原点向$C$看去，$C$的方向是顺时针的.

2. $I=\int_\Gamma(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是沿螺线$x=a\cos\theta,y=a\sin\theta,z=\frac{h}{2\pi}\theta$，从$A(a,0,0)$到$B(a,0,h)$的有向曲线.

五、平面上第二类曲线积分与路径无关问题

1. 判断下列曲线积分在指定区域D是否与路径无关，为什么？

(Ⅰ)$\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$，其中$f(u)$为连续函数，$D$:全平面.

(Ⅱ)$\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，$D=\{(x,y)\mid$全平面除去$-\infty<x\leqslant 0,y=0\}$.

2. 设$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$有连续导数，$\varphi(\pi)=1$. 试确定$\varphi(x)$，使积分

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}}[\sin x-\varphi(x)]\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$$

在$x>0$与路径无关，并求当A,B分别为$(1,1),(\pi,\pi)$时的积分值.

六、原函数问题

1. 求$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在指定区域$D$上的原函数，其中$\{P,Q\}=\left\{1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x},\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right\}$，$D=\{(x,y)\mid x>0\}$.

2. 选择a,b，使$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$内为某函数$u(x,y)$的全微分，其中

$$P=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(y^2+2xy+ax^2),\quad Q=\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}(x^2+2xy+by^2).$$

七、求向量的散度与旋度

已知$\boldsymbol{E}=\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$，其中$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，$q$为常数，求$\mathrm{div}\boldsymbol{E}$与$\mathbf{rot}\boldsymbol{E}$.

www.TopSage.com

第十一章　无穷级数

内容概要与重难点提示

无穷级数是高等数学的基本内容之一，它包含常数项级数与函数项级数，而在函数项级数中，幂级数与傅里叶(Fourier)级数是两种最常见，也是最有用的级数.

常数项级数与数列之间有着一一对应关系，也就是说，每个常数项级数都对应着一个数列(指其部分和数列)；反之，每一个数列又对应着一个常数项级数.两者之间关系尽管如此密切，然而其侧重点不同，常数项级数侧重于收敛性的判定，因此，在复习时特别要抓住哪类级数应如何判定其敛散性，这部分内容在常数项级数中所占份量最大.另外，由这种新的表现形式发展产生的函数项级数，特别是其中的幂级数与傅里叶级数又成为函数的一种新的表示方法，它为数理科学与工程技术提供了一种有力的数学工具.对一般函数项级数要掌握其收敛域的求法.对幂级数要掌握其收敛性的特点，收敛半径与收敛域的求法，和函数的性质.幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若已知右端求左端这是幂级数求和，若已知左端求右端这是函数的幂级数展开.要掌握求解这类问题的方法.关于傅里叶级数，对于给定的函数要会求按指定形式的傅里叶展开式，这实际上是计算傅氏系数(某种形式的定积分)与判断傅氏级数的收敛性与和函数问题.

考核知识要点讲解

一、常数项级数的概念与基本性质

(一)基本概念

无穷多个数 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 依次相加所得到的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{11.1}$$

称为**无穷级数**(简称**级数**).

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n,(n=1,2,\cdots) \tag{11.2}$$

称为无穷级数前 n 项的**部分和**.部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**；否则就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**.

当级数收敛时，其和 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$；当级数收敛时 $r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 称为级数的**余项**(或**余和**).

www.TopSage.com

（二）基本性质

1. 若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n$，其中 λ，μ 为常数．

2. 在级数中添加或去掉有限项不影响级数的收敛性．

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则不改变其项的次序任意加括号，并把每个括号内各项的和数作为一项，这样所得到的新级数仍收敛，而且其和不变．

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$．

【注】 对于级数，以下是一些基本事实：

① 若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 中，一个收敛，一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的敛散性必须具体讨论．

② 如果按性质4规定的方式加括号后所成的某一个级数收敛，则不能断定去括号后原来的级数也收敛．但根据性质4有如下推论：如果加括号后所成的级数发散，则原来的级数也发散．

③ 性质4只是级数收敛的必要条件，不能由此判定级数收敛，但是不满足此条件的级数一定发散，这一点是经常使用的．

（三）几个重要级数

1. 几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$，当 $|q| < 1$ 时收敛，当 $|q| \geqslant 1$ 时发散；

2. p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$，当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leqslant 1$ 时发散；

3. 常用的还有：$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$，当 $p > 1$，或 $p = 1$ 且 $q > 1$ 时收敛；当 $p < 1$ 或 $p = 1$ 且 $q \leqslant 1$ 时发散．

二、正项级数敛散性的判定

若 $u_n \geqslant 0$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**正项级数**．正项级数的特点是部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增，而单调数列收敛 $\Leftrightarrow$ 有界，因此，**正项级数收敛的充要条件是，它的部分和数列有界**．这一点正是正项级数敛散性判别法的基础．

（一）比较判别法

▶1. 比较原理

设 $cv_n \geqslant u_n \geqslant 0$ $(n \geqslant N)$，$c > 0$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散．

www.TopSage.com

▶2. 比较原理的极限形式

设 $u_n > 0, v_n > 0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = A$，则有

(1) 当 $0 < A < +\infty$ 即 $v_n \sim Au_n (n \to \infty)$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $A = 0$ 即 $v_n = o(u_n) (n \to \infty)$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛；

(3) 当 $A = +\infty$ 即 $u_n = o(v_n) (n \to \infty)$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(二) 与几何级数比较 —— 比值与根值判别法

设 $u_n > 0$,

▶1. 比值判别法(达朗贝尔判别法)

$$\text{若} \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} < 1, & \text{级数} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}, \\ > 1, & \text{级数} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}, \quad \text{且} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty. \\ = 1, & \text{此判别法失效}, \end{cases}$$

▶2. 根值判别法

$$\text{若} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} < 1, & \text{则} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}, \\ > 1, & \text{则} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}, \quad \text{且} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty. \\ = 1, & \text{此判别法失效}, \end{cases}$$

(三) 与 p 级数比较 —— 确定无穷小 u_n 关于 $\dfrac{1}{n}$ 的阶

设 $u_n > 0$,

1. $n \to \infty$ 时，u_n 是 $\dfrac{1}{n}$ 的 p 阶无穷小，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1, \\ \text{发散}, & p \leqslant 1. \end{cases}$

2. $n \to \infty$ 时，u_n 是 $\dfrac{1}{n^p}$ 的高阶无穷小，若 $p > 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

3. $n \to \infty$ 时，u_n 是 $\dfrac{1}{n^p}$ 的低阶无穷小，若 $p \leqslant 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【例 11.1】 判定下列级数的敛散性：

(Ⅰ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n^2 + n}}$；　(Ⅱ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$；　(Ⅲ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$.

【解】 (Ⅰ) 因 $\dfrac{1}{\sqrt{4n^2 + n}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{4n^2 + n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5}n}$ 发散，故原级数发散.

(Ⅱ) 因 $\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 发散.

(Ⅲ) 使用比值判别法. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}=\frac{1}{2}<1$，故原级数收敛.

评注 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n-1}=1$，所以第(Ⅲ)小题使用根值判别法也是很简单的.

三、交错级数的敛散性判别法

(一) 交错级数的定义

若 $u_n>0$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$ 为**交错级数**.

(二) 交错级数的敛散性判别

莱布尼兹判别法：设交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足：

(ⅰ) $u_n\geqslant u_{n+1}$，$n\geqslant N\geqslant 1$；　(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和 $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n<u_1$，余项 $|r_n|<u_{n+1}$.

四、绝对收敛与条件收敛

(一) 绝对收敛与条件收敛的定义

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**.

(二) 关于绝对收敛与条件收敛的基本结论

对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，下列结论成立：

1. 绝对收敛的级数一定收敛，即若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

2. 条件收敛级数的正项(或负项)构成的级数一定发散，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(u_n-|u_n|)$ 均发散.

www.TopSage.com

【例 11.2】 判定下列级数的敛散性(是条件收敛还是绝对收敛):

(Ⅰ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}$; (Ⅱ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{x}{n}$ $(x>0)$; (Ⅲ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin\frac{1}{n}+1}{n}$.

【解】 (Ⅰ)由于 $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,利用比较判别法即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\right|$ 收敛,所以原级数绝对收敛.

(Ⅱ)由于 n 充分大时,$0<\dfrac{x}{n}<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\dfrac{x}{n}>0$,所以此级数为交错级数,且满足莱布尼兹判别法的两个条件,这说明原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{x}{n}$ 收敛,又由于 $\left|\sin\dfrac{x}{n}\right|\sim\dfrac{|x|}{n}(n\to\infty)$,所以,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\sin\dfrac{x}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\dfrac{x}{n}\right|$ 发散,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{x}{n}$ 条件收敛.

(Ⅲ)注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin\frac{1}{n}+1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n}+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right]$,而前一级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n}$ 绝对收敛$\left(\text{因为}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}}{n}\right|=\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n}\sim\dfrac{1}{n^2}\right)$,后一级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 条件收敛,故原级数条件收敛.

评注 绝对收敛级数与条件收敛级数之和是条件收敛级数,见题型训练三.6题.

五、函数项级数的收敛域与和函数

(一)收敛点与收敛域

对于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的基本要求是 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 有共同的定义域 I. 若 $x_0\in I$,常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛,则称 x_0 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**,否则就是**发散点**. 所有收敛点构成的集合就是**收敛域**,所有发散点构成的集合就是**发散域**.

(二)和函数

函数项级数在其收敛域内有和,其值与收敛点 x 有关,记作 $S(x)$,$S(x)$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数,即 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ (x 属于收敛域).

【例 11.3】 求下列函数项级数的收敛域:

(Ⅰ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$; (Ⅱ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$.

www.TopSage.com

【解】 (Ⅰ)注意 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n-1}=1$,对级数的通项取绝对值,并应用根值判别法,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$,即 $x>0$ 时,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 绝对收敛;

当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$,即 $x<0$ 时,原级数发散($x=-1$ 除外),因为一般项不是无穷小量;

当 $x=0$ 时,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 为收敛的交错级数.

因此,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为 $[0,+\infty)$.

(Ⅱ)使用比值判别法,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{1+x^{n+1}}}{\frac{1}{1+x^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right|=\begin{cases}1, & \text{若 } |x|\leqslant 1, x\neq -1,\\ \left|\frac{1}{x}\right|, & \text{若 } |x|>1.\end{cases}$$

这就说明:当 $|x|>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 收敛,而且绝对收敛;然而,当 $|x|\leqslant 1$ ($x\neq -1$) 时,比值判别法失效.但是,当 $|x|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}=1$;当 $x=1$ 时,$u_n(x)=\frac{1}{2}$ ($n=1,2,\cdots$),都不满足级数收敛的必要条件.所以,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 的收敛域为 $|x|>1$.

六、幂级数的收敛域

形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的级数称为 $x-x_0$ 的**幂级数**,其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 为常数,称为幂级数的**系数**.当 $x_0=0$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为 x 的**幂级数**.

(一)幂级数收敛的特点

设有幂级数〈A〉:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,它的收敛性有以下特点:

1. 设 $x=x_0\neq 0$ 时〈A〉收敛,则对任意 x,$|x|<|x_0|$ 时〈A〉绝对收敛;设 $x=x_1$ 时〈A〉发散,则对任意 x,$|x|>|x_1|$ 时〈A〉发散.

2. 存在收敛区间与收敛半径.若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 存在非零的收敛点,也存在发散点,则存在实数 $R(0<R<+\infty)$,使得若 $x\in(-R,R)$,则该级数收敛.若 $x\in(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$,则该级数发散($|x|=R$ 时的敛散性另行考虑),其中 R 称为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛半径**.$(-R,R)$ 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛区间**.如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 只在 $x=0$ 点收敛,规定收敛半径 $R=0$,例如:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$;如果

www.TopSage.com

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在整个数轴上收敛，则规定收敛半径 $R = +\infty$，收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$. 例如：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

3. 如果 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，那么该幂级数在 $(-R, R)$ 内绝对收敛.

4. 逐项求导与逐项积分后所得幂级数的收敛半径不变(见七、幂级数的运算与和函数的性质).

(二) 收敛半径及收敛域的求法

求收敛域的步骤：

第一步，求收敛半径. 使用比值法(或根值法)，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$)，则

$$R = \begin{cases} 1/l, & 0 < l < +\infty, \\ 0, & l = +\infty, \\ +\infty, & l = 0; \end{cases} \tag{11.3}$$

第二步，讨论端点的敛散性. 如果 $0 < R < +\infty$，讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = \pm R$ 处的敛散性；

第三步，写出幂级数的收敛域(收敛区间及收敛的端点).

但要注意：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，并不一定有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\left(\text{或 } \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ 存在.

【例 11.4】 求下列幂级数的收敛域：

(Ⅰ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$；　　(Ⅱ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^n}$.

【解】 (Ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}/\sqrt{n+1}}{3^n/\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 3$，故收敛半径 $R = 1/3$.

当 $x = 1/3$ 时，原幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，是一个收敛的交错级数；当 $x = -1/3$ 时，原幂级数为 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$(发散)，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为 $(-1/3, 1/3]$.

(Ⅱ) 使用根值法. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$，故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^n}$ 的收敛半径 $R = +\infty$，即收敛区间也是收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

七、幂级数的运算与和函数的性质

▶1. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 为两个幂级数，收敛半径分别为 R_1, R_2，则在它们的公共收敛域内可进行如下的四则运算：

(ⅰ) $\lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \mu\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)x^n$，其中 λ, μ 为常数； (11.4)

(ⅱ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$； (11.5)

www.TopSage.com

其中 $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$.

当 $R_1 \neq R_2$ 时,(11.4) 的收敛半径 $R = \min\{R_1, R_2\}$.

▶2. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(>0)$,$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为和函数,则如下分析性质成立:

(ⅰ) 和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导,并且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{11.6}$$

同时求导后的幂级数的收敛半径仍为 R.

因此,和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内任意次可导,并有逐项求导公式

$$S^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}$$

它的收敛半径也是 R.

(ⅱ) 在 $(-R,R)$ 内逐项积分公式成立,即

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \tag{11.7}$$

并且逐项积分后收敛半径也不变.

(ⅲ) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R(-R)$ 处收敛,则该幂级数

1° $\lim\limits_{x \to R-0} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \left(\lim\limits_{x \to -R+0} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\right)$;

2° 可以在 $[0,R]$($[-R,0]$) 上逐项积分,即

$$\int_0^R S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1} \quad \left(\int_{-R}^0 S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-a_n}{n+1} (-R)^{n+1}\right);$$

3° 逐项求导后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $x = R(-R)$ 处可能发散.

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R(-R)$ 处发散,则逐项求导后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $x = R(-R)$ 处一定发散,但逐项积分后的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x = R(-R)$ 处可能收敛.

【例 11.5】 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域及其和函数.

【解】 容易求得其收敛域为 $[-1,1)$. 为求其和函数 $S(x)$,在它的收敛区间 $(-1,1)$ 内先进行逐项求导,即得

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

又因为 $S(0) = 0$,因此

$$S(x) = \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x).$$

注意原级数在 $x = -1$ 处收敛,又 $\ln(1-x)$ 在 $x = -1$ 处连续,所以

$$S(x) = -\ln(1-x), x \in [-1,1).$$

www.TopSage.com

八、幂级数的求和与函数的幂级数展开式

设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，$|x-x_0|<R$. 已知右端求左端，这是幂级数求和. 反之，则是求函数的幂级数展开式. 除按定义外，它们的方法是相同的.

(一) 泰勒级数与麦克劳林级数

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有任意阶导数，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{11.8}$$

称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的**泰勒**(Taylor) **级数**.

特别，若 $x_0=0$，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{11.9}$$

称为 $f(x)$ 的**麦克劳林**(Maclaurin) **级数**.

【注】 只要 $f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内具有任意阶导数，就有级数(11.8)式或(11.9)式，这里的级数是否收敛，并且是否收敛于原来的函数 $f(x)$ 是不知道的.

(二) 函数展成幂级数的条件

函数 $f(x)$ 展成幂级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\ (|x-x_0|<R)$$

$\Leftrightarrow$ 在 $|x-x_0|<R$，级数(11.8)收敛于 $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ (0<\theta<1) \tag{11.10}$$

是 $f(x)$ 的拉格朗日余项. $f(x)$ 在点 x_0 的幂级数展开式是唯一的.

若存在常数 L,M 使得 $\forall$ 自然数 n，

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant LM^n\ (\forall x,|x-x_0|<R),$$

则在 $|x-x_0|<R$，$f(x)$ 的泰勒级数即(11.8)收敛于 $f(x)$.

(三) 常用的幂级数等式

$$(1)\ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ (-\infty<x<+\infty) \tag{11.11}$$

$$(2)\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ (-\infty<x<+\infty) \tag{11.12}$$

www.TopSage.com

$$(3)\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$(-\infty < x < +\infty) \tag{11.13}$$

$$(4)\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$(-1 < x \leqslant 1) \tag{11.14}$$

$$(5)(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

$$(-1 < x < 1) \tag{11.15}$$

该级数在端点 $x = \pm 1$ 处的收敛性，视 α 而定．特别，当 $\alpha = -1$ 时，有

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad (-1 < x < 1) \tag{11.16}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \quad (-1 < x < 1) \tag{11.17}$$

（四）幂级数求和与求函数的幂级数展开式的方法

方法1°直接法 对求展开式来说，按照(11.8)或(11.9)的方法计算泰勒系数 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，并以此为基础写出级数(11.8)或(11.9)称为直接法．按照要求还应证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$，只有这样才能说明(11.8)或(11.9)确实是 $f(x)$ 的泰勒展开式．对求幂级数的和函数来说，就是求它的部分和的极限．

方法2°间接法 由于直接法通常比较复杂，所以幂级数求和或展开多用间接法，也就是说利用已知的幂级数等式，特别是等式(11.11) ~ (11.17)，并通过变量替换、四则运算（即分解法）或逐项求导、逐项积分、待定系数及级数的有关性质等方法，得到和函数或函数的展开式．（详见题型四、题型五相关例题）

九、傅里叶级数

（一）三角函数系的正交性

三角函数系

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cdots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \cdots\right\} \tag{11.18}$$

在区间 $[-l,l]$ 上**正交**，就是指(11.18)中任何两个不同的函数的乘积在 $[-l,l]$ 上的积分等于零，即

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0, n = 1,2\cdots; \quad \int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0, m,n = 1,2,\cdots;$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0, m,n = 1,2,\cdots, m \neq n.$$

（二）傅里叶系数与傅里叶级数

设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期或只定义在 $[-l,l]$ 上，在 $[-l,l]$ 可积．

www.TopSage.com

在三角级数 $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{11.19}$$

中，若
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n=1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{11.20}$$

则称(11.19)为函数 $f(x)$ 的**傅里叶级数**(以 $2l$ 为周期)，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{11.21}$$

并且由(11.20)式所决定的系数 a_n,b_n 称为 $f(x)$ 的**傅里叶系数**.

(三) 收敛性定理 —— 狄利克雷(Dirichlet)充分条件

同幂级数相似，能够由函数 $f(x)$ 求得其傅里叶系数，也就有傅里叶级数(11.21)，然而使(11.21)成为等式，也就是说 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且收敛于 $f(x)$ 自身是需要条件的. 在这样的条件中，最常见的是如下的狄利克雷条件 —— 函数 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上满足：

(ⅰ)连续，或只有有限个间断点，且都是第一类间断点；(ⅱ)只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的傅里叶级数收敛，而且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$
$$=\begin{cases} f(x), & \text{若 } x\in(-l,l) \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点}, \\ \dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{若 } x\in(-l,l) \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点}, \\ \dfrac{1}{2}[f(-l+0)+f(l-0)], & \text{若 } x=\pm l. \end{cases} \tag{11.22}$$

(四) 周期与非周期函数的傅里叶级数

前面所讨论的是以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数，其特殊情形是 $l=\pi$. 而对于非周期函数，比如：$f(x)$ 只在 $[-l,l]$ 上有定义，则可进行周期延拓；而对于只在 $[0,l]$ 上有定义的函数，则可进行奇延拓或偶延拓，然后再作周期延拓. 这样，所有这些函数都能看作以 $2l$ 为周期的函数，从而在满足狄利克雷条件时即可得到其傅里叶级数的和函数. $[-l,l]$ 上的奇偶函数 $f(x)$(包括经奇偶延拓后的函数)的傅里叶级数如下：

▶1. 奇函数(包括经奇延拓的函数)

$f(-x)=-f(x)$，其傅里叶级数为正弦级数，即 $a_n=0,n=0,1,2,\cdots$.

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$$

▶2. 偶函数(包括经偶延拓的函数)

$f(-x)=f(x)$，其傅里叶级数为余弦级数，即 $b_n=0,n=1,2,\cdots$.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots$$

www.TopSage.com

【注】 ①对满足狄里克雷条件的函数 $f(x)$，当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，其傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$，当 x 为 $f(x)$ 的连续点时收敛到 $f(x)$.

②我们知道，对于以 $2l$（包括 2π）为周期的函数，在任何长为 $2l$ 的区间上的积分值都是相等的，所以其傅里叶系数有表达式

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, & n = 0,1,2,\cdots, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, & n = 1,2,3,\cdots, \end{cases} \tag{11.23}$$

其中 α 为任意实数. 然而，对于以 $2l$ 为周期奇函数或偶函数，并不能将其改为任何长 l 的区间，不过下述公式成立：当 $f(x)$ 为以 $2l$ 为周期的奇函数时，

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{m\,l}^{(m+1)l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,3,\cdots, \tag{11.24}$$

当 $f(x)$ 为以 $2l$ 为周期的偶函数时，

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{m\,l}^{(m+1)l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{11.25}$$

其中 m 为任意整数.

（五）函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式

设 $f(x)$ 定义在 $[-l,l]$ 上，并满足收敛定理的狄利克雷条件.

1° 若有 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上可展成傅里叶级数，即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (-l < x < l).$$

2° 若有 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续且 $f(-l) = f(l)$，则 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上可展成傅里叶级数，即上式在 $[-l,l]$ 上成立.

【例 11.6】 设 $f(x) = \sin ax$，$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$，$a > 0$，将其展开为以 2π 为周期的傅里叶级数.

【解】 由于 $f(x)$ 为奇函数，所以其展开式应为正弦级数. 如果 a 不是自然数，则

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-a)x - \cos(n+a)x]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-a)x}{n-a} - \frac{\sin(n+a)x}{n+a}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n\pi-a\pi)}{n-a} - \frac{\sin(n\pi+a\pi)}{n+a}\right] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\sin a\pi\left(\frac{1}{n-a} + \frac{1}{n+a}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\sin a\pi\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2-a^2}. \end{aligned}$$

故 $f(x) = \sin ax = \frac{2}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2-a^2}\sin nx$，$-\pi < x < \pi$，在 $x = \pm\pi$ 时，右端为 0，即其傅里叶展开式收敛于 $\frac{1}{2}[\sin a\pi + \sin(-a\pi)] = 0$.

当 a 为自然数时，根据三角函数系的正交性有 $f(x) = \sin ax = \sin nx$，$n = a$，$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

www.TopSage.com

题型一　常数项级数敛散性的判定

【解题思路】　对于常数项级数判别其收敛性的步骤为：

第一步，判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的类型，即分辨其为正项级数，还是任意项级数，对任意项级数，还要分辨其是否为交错级数.

第二步，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则首先考察 $\lim_{n\to\infty} u_n$ $\begin{cases} \neq 0, & \text{级数发散,} \\ = 0, & \text{需进一步判定.} \end{cases}$

然后，根据一般项的特点选择相应的判别法：

① 一般项中含有 $n!$ 或者 n 的乘积形式，通常选用比值判别法；

② 一般项中含有以 n 为指数幂的因子，通常采用根值判别法；

③ 一般项中含有形如 n^{α}（α 可以不是整数）的因子，通常采用比较判别法；

④ 利用已知敛散性的结果，结合级数的性质，判别其收敛性；

⑤ 当各种判别法均失效时，则采用定义，考察部分和极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 是否存在. 由于 $\{S_n\}$ 单调递增，所以实际上就是要判断 $\{S_n\}$ 是否有上界.

第三步，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数，同样要首先考察 $\lim_{n\to\infty} u_n$ $\begin{cases} \neq 0, & \text{级数发散,} \\ = 0, & \text{需进一步判定.} \end{cases}$

当 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 时，可按以下步骤进行：

1）按正项级数敛散性的判别法，判定 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 是否收敛，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则看其是否为交错级数，若为交错级数，则利用莱布尼兹判别法判定，若收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛；

3）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是交错级数，但不满足莱布尼兹判别法的条件，或者 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不是交错级数，则有如下方法可以参考使用：

（ⅰ）比值判别法：当 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

（ⅱ）根值判别法：当 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

（ⅲ）讨论 $\{S_{2n}\}$，$\{S_{2n+1}\}$ 的敛散性，以及其他能够判定部分和数列 $\{S_n\}$ 敛散性的方法.

第四步，对某些级数可结合利用级数的性质来判别其收敛性.

www.TopSage.com

▶1. 正项级数敛散性的判别

【例 11.7】 判定下列级数的敛散性：

(Ⅰ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p^n\cdot n!}{n^n}$ ($p>0$ 为常数)；(Ⅱ) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

【解】 (Ⅰ) 本题可采用比值判别法. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{p^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{p^n\cdot n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{pn^n}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

$=\dfrac{p}{\mathrm{e}}$，所以，当 $p<\mathrm{e}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p^n\cdot n!}{n^n}$ 收敛；当 $p>\mathrm{e}$ 时，该级数发散. 注意到数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调递增趋于 e 的，所以当 $p=\mathrm{e}$ 时，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}>1$，即 $\{u_n\}$ 单调递增不是无穷小量，所以该级数也是发散的. 总之，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p^n\cdot n!}{n^n}$ 当 $p<\mathrm{e}$ 时收敛，$p\geqslant\mathrm{e}$ 时发散.

(Ⅱ) 本题适宜采用根值判别法. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n}=0$，所以原级数收敛. 这里用到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}=0$.

【例 11.8】 判别下列级数的敛散性：

(Ⅰ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt[4]{n^2+n})$；　　(Ⅱ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$；

(Ⅲ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$；　　(Ⅳ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解】 本题的几个级数可采用比较判别法.

(Ⅰ) 采用比较判别法的极限形式. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4\sqrt{n}}$ 发散，而且

$$\sqrt{n}-\sqrt[4]{n^2+n}=\sqrt{n}\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

$$=-\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right]\sim-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{4n}=-\frac{1}{4\sqrt{n}}(n\to\infty),$$

所以原级数也发散.

(Ⅱ) 仍采用比较判别法的极限形式. 先改写

$$\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

方法 1° 用泰勒公式确定 $\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 关于 $\dfrac{1}{n}$ 的阶. 由于

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2n^2}(n\to\infty),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$ 收敛.

方法 2° 转化为考察无穷小量 $x-\ln(1+x)$ 当 $x\to0$ 时关于 x 的阶. 由

www.TopSage.com

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\alpha x^{\alpha-1}(1+x)}\xlongequal{\alpha=2}\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\quad x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$. 因此原级数收敛.

(Ⅲ) 注意到$\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{1/n}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$, 而且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛, 所以原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$也收敛.

(Ⅳ) **方法** 1° 因为函数$f(x)=\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$单调递减,所以

$$0<u_n=\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

再采用极限形式的比较判别法,即将$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$与收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$相比较,由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}=0$,

所以,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$收敛. 再由上面导出的不等式$0<u_n\leqslant\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$,所以原级数也收敛.

方法 2° 这个级数也可直接利用定义判别其收敛性. 这是因为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\sqrt{x}}\int_1^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=-2\int_1^{+\infty}t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-2t\mathrm{e}^{-t}\Big|_1^{+\infty}+2\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^{-1}+2\mathrm{e}^{-1}=4\mathrm{e}^{-1},$$

所以原级数收敛,且其和为$4\mathrm{e}^{-1}$.

【例 11.9】 考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$,其中$a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$,$p$为常数.

(Ⅰ) 证明:$\frac{1}{4n}<a_n^2<\frac{1}{2n+1}(n=2,3,4,\cdots)$;

(Ⅱ) 证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$当$p>2$时收敛,当$p\leqslant 2$时发散.

【分析与证明】 (Ⅰ) 将a_n^2改写成

$$a_n^2=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot7}{6^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

由于$\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}=\frac{(2n)^2-1}{(2n)^2}<1(n=1,2,3,\cdots)\Rightarrow$

$$a_n^2<\frac{1}{2n+1}(n=1,2,3,\cdots).$$

再将a_n^2改写成

$$a_n^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot6}\cdot\frac{7^2}{6\cdot8}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-3)^2}{(2n-4)(2n-2)}\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)2n}\cdot\frac{1}{2n}.$$

由于$\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)(2n)}=\frac{4n^2-4n+1}{4n^2-4n}>1(n=2,3,4,\cdots)\Rightarrow$

$$a_n^2>\frac{1}{4n}(n=2,3,4,\cdots).$$

www.TopSage.com

（Ⅱ）容易验证比值判别法对该级数失效，要考虑用适当放大缩小法与比较原理．题（Ⅰ）给出了适当放大缩小的方法与结论．由

$$\left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{1}{2}} < a_n < \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{p}{2}} < a_n^p < \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

当 $p > 2$ 即 $\frac{p}{2} > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{p}{2}}$ 收敛，当 $p \leqslant 2$ 即 $\frac{p}{2} \leqslant 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{p}{2}}$ 发散．因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 当 $p > 2$ 时收敛，当 $p \leqslant 2$ 时发散．

【例 11.10】 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 的敛散性，其中 $\{x_n\}$ 是单调递增而且有界的正数数列．

【解】 首先因为 $\{x_n\}$ 是单调递增的有界正数数列，所以 $0 \leqslant 1 - \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \leqslant \frac{x_{n+1} - x_n}{x_1}$．

现考察原级数的部分和数列 $\{S_n\}$，由于

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_1} = \frac{1}{x_1}(x_{n+1} - x_1),$$

而且 $\{x_n\}$ 有界，所以 $\{S_n\}$ 也是有界的．正项级数的部分和数列单调递增，有界即可导致其收敛，故原级数收敛．

评注 ①【例 11.8】的第（Ⅲ）小题与第（Ⅳ）小题都涉及积分，而且使用了比较判别法，也都没有将积分值精确地计算出来，而是给出了一个估计值，即

$$\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3n^{3/2}} \quad 与 \quad \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}},$$

这比计算其精确值要简单一些，而且由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ 均收敛，所以原来的级数也收敛．

这说明在使用比较判别法时，为了计算简单，可将其一般项适当放大．这种方法对于级数敛散性的讨论是常用的，比如【例 11.9】和【例 11.10】也使用了这种方法．

② 敛散性的讨论，有时也可以有多种方法．比如【例 11.8】的第（Ⅳ）小题就给出了两种方法，其他的题目，比如【例 11.12】也有多种解法．

▶2. 交错级数敛散性的判别

【例 11.11】 判别下列级数的敛散性（包括绝对收敛或条件收敛）：

（Ⅰ） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$；　　（Ⅱ） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right)$．

【解】 （Ⅰ）由于 $\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\right| = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$，而且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以原级数不是绝对收敛的．原级数是交错级数，易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 0 \times 1 = 0$．为考察 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 的单调性，令 $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{(1+\frac{1}{x})\ln x}$，记 $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x$，则 $g'(x) = \frac{1}{x}\left[1 + \frac{1}{x}(1 - \ln x)\right] > 0$（当 x 充分大时） $\Rightarrow$ 当 x 充分大时 $g(x)\nearrow$，从而 $f(x)\nearrow$ $\Rightarrow$ 当 n 充分大时 $\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\searrow$．这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 满足莱布尼兹判别法的两个条件，所以该级数收敛，并且是条件收敛的．

www.TopSage.com

评注 ①讨论交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 时，常引进一个函数 $f(x)$，使得 $u_n = f(n)$，把证明 u_n 单调下降趋于零，转化为用微分学的方法来证明 $f(x)$ 当 $x \geqslant 1$（或 x 充分大时）单调下降且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

②这里 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{x}(1-\ln x)\right] = 1 > 0$，由极限不等式性知，当 x 充分大时 $g'(x) = \frac{1}{x}\left[1+\frac{1}{x}(1-\ln x)\right] > 0$.

（Ⅱ）由于 $\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right) = (-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$，所以此级数是交错级数．又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{\ln n}} = 1$，而且 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，这说明原级数不是绝对收敛的．

由于 $\sin x$ 在第一象限是单调递增函数，而 $\frac{1}{\ln n}$ 是单调减少的，所以，$\sin\frac{1}{\ln n}$ 随着 n 的增加而单调递减．又显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n} = 0$，这说明原级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$ 满足莱布尼兹判别法的两个条件，从而它是收敛的．结合前面的讨论，知其为条件收敛．

【例 11.12】 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ $(p>0)$ 的收敛性（包括绝对收敛或条件收敛）．

【分析】 对于交错级数先要讨论其是否绝对收敛．这里 $u_n \geqslant u_{n+1}$ 不总是成立的，也就是说莱布尼兹判别法的条件不满足．这样，当其不是绝对收敛时，莱布尼兹判别法也不能使用，可考虑直接用定义讨论其收敛性或利用收敛级数的性质．

【解】 为判断其是否绝对收敛，采用极限形式的比较判别法，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}\right|\Big/\frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{[1+(-1)^n/n]^p} = 1,$$

所以，当 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 绝对收敛；而当 $p \leqslant 1$ 时，该级数不绝对收敛．

下面介绍三种方法讨论 $0 < p \leqslant 1$ 时，是否条件收敛．

方法 1° 考察部分和 S_n 的极限是否存在．先考虑部分和数列的偶数项，即

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^p}-\frac{1}{(2n)^p} \\ &= -\left[\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n+1)^p}\right)\right]. \end{aligned}$$

注意到等式右端的每一项 $\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}, \frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}, \cdots \frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n+1)^p}$ 都是正的，所以 $S_{2n} < 0$，而且单调递减．又由于

$$\begin{aligned} -S_{2n} &= \left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n+1)^p}\right] \\ &< \left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{6^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n+2)^p}\right] = \frac{1}{2^p}-\frac{1}{(2n+2)^p} < \frac{1}{2^p}, \end{aligned}$$

亦即 $S_{2n} > -\frac{1}{2^p}$，这就说明 $\{S_{2n}\}$ 是单调递减有下界的，所以其极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n} = S$．又由于

www.TopSage.com

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p} = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1}) = S$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，亦即级数 $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 的部分和数列收敛，所以该级数收敛．特别，这说明 $0 < p \leqslant 1$ 时，该级数条件收敛．

方法 2° 考察两两添加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{5^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n+1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right]+\cdots,$$

它的一般项 $$v_n = \frac{1}{(2n+1)^p}-\frac{1}{(2n)^p} = -\frac{1}{(2n)^p}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^p-1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^p} \sim -\frac{1}{2^p n^p}\cdot\frac{p}{2n} = -\frac{p}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^{p+1}},$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p}{2^{p+1}}\cdot\dfrac{1}{n^{p+1}}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-v_n)$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛．又因

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p} = 0,$$

所以原级数收敛．因此 $0 < p \leqslant 1$ 时该级数条件收敛．（见下面【评注】② 的 1°）．

方法 3° 原级数 $= \dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{5^p}-\dfrac{1}{4^p}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^p}+\cdots$

注意，奇偶项互换后的新级数是

$$-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}-\cdots-\frac{1}{(2n)^p}+\frac{1}{(2n+1)^p}-\cdots = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n .$$

显然，一般项 u_n 是单调下降趋于零的．于是，由莱布尼兹判别法知，新级数收敛．因为 $\dfrac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}\to 0\,(n\to\infty)$，所以原级数收敛．（见下面【评注】② 的 2°）．

评注 ① 事实上，方法 1° 中证明了一个一般性的结论：记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n} = S$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1} = S$），则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n = S$．

② 设有级数 (V)：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n = u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots$ 与 (V')：$(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})+\cdots$（将级数 (V) 两两添加括号得级数 (V')），(V^*)：$u_2+u_1+u_4+u_3+\cdots+u_{2n}+u_{2n-1}+\cdots$（将级数 (V) 的奇偶项互换得级数 (V^*)）．

若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$，1°$(V')$ 收敛其和为 S，则 (V) 也收敛其和是 S，2°(V^*) 收敛其和为 S，则 (V) 也收敛其和是 S．

【证明】 1° 记 (V) 与 (V') 的部分和分别为 S_n 与 T_n，则 $S_{2n} = T_n$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n} = \lim_{n\to\infty}T_n = S,$$

由上面 ① 中的结论得，级数 (V) 收敛其和为 S．

2° 记 (V) 与 (V^*) 的部分和分别为 S_n 与 S_n^*，则

$$S_{2n} = S_{2n}^*,\quad \lim_{n\to\infty}S_{2n} = \lim_{n\to\infty}S_{2n}^* = \lim_{n\to\infty}S_n^* = S,$$

由上面 ① 中的结论得，级数 (V) 收敛其和为 S．

www.TopSage.com

▶3. 任意项级数敛散性的判别

【例 11.13】 设常数 $\alpha > 2$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n!}{n^\alpha}$

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 敛散性与 α 有关.

【分析】 由于

$$\left|(-1)^n\frac{\ln n!}{n^\alpha}\right| = \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{n^\alpha} \leqslant \frac{n\ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}},$$

设常数 p 满足 $1 < p < \alpha - 1$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\Big/\frac{1}{n^p}\right) = \lim_{n\to\infty} n^p\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1-p}} = 0.$$

由正项级数比较判别法的极限形式知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$ 收敛,进而知当 $\alpha > 2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n!}{n^\alpha}$ 绝对收敛,即(C)正确.

【例 11.14】 设 $a > 0$ 为常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{n-1}}{n^n + a^n n}$

(A) 发散. (B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛. (D) 敛散性与 a 有关.

【分析】 用分解法. 分解级数的一般项

$$u_n \overset{记}{=\!=} \frac{(-1)^n n^{n-1}}{n^n + a^n n} = \frac{(-1)^n}{n\left[1 + \left(\frac{a}{n}\right)^n n\right]} = \frac{(-1)^n\left[1 + \left(\frac{a}{n}\right)^n n - \left(\frac{a}{n}\right)^n n\right]}{n\left[1 + \left(\frac{a}{n}\right)^n n\right]}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{a}{n}\right)^n}{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^n n} \overset{记}{=\!=} v_n + w_n,$$

因

$$|w_n| = \frac{\left(\frac{a}{n}\right)^n}{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^n n} < \left(\frac{a}{n}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (n > N)$$

$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n} = 0, \exists N, n > N$ 时 $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 绝对收敛,又 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛,因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + w_n)$ 条件收敛. 选(B).

评注 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为条件收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 为条件收敛. 见题型训练三、6 题.

▶4. 变号级数与正项级数的区别

【例 11.15】 判断如下命题是否正确:设无穷小 $u_n \sim v_n (n\to\infty)$,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛. 证明你的判断.

【分析与求解】 对于正项级数,比较判别法的极限形式就是:$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A, 0 < A < +\infty$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散. 本题未限定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数,由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 一定收

www.TopSage.com

敛. 比如,取

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right],$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \Big/ \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1,$$

即 $u_n \sim v_n (n \to \infty)$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的,然而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是不收敛的.

这个例子说明:对正项级数的比较判别法的极限形式不能用于判定任意项级数的条件收敛性. 要注意变号级数与正项级数的区别.

题型二　求一般函数项级数的收敛域

【例 11.16】 确定下列函数项级数的收敛域:

(Ⅰ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n^x}$;　　(Ⅱ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n^2+2n+3)^x}$.

【解】 (Ⅰ) 使用比较判别法.

当 $x \leqslant 1$ 时,由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 发散,而当 $n \geqslant 2$ 时,$\frac{\ln(1+n)}{n^x} \geqslant \frac{1}{n^x}$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n^x}$ 也发散.

当 $x > 1$ 时,取 $p \in (1,x)$,由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛,而且 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(1+n)}{n^x}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n)}{n^{x-p}} = 0$,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n^x}$ 收敛. 因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n^x}$ 的收敛域为 $(1, +\infty)$.

(Ⅱ) 当 $x > 0$ 时,由于 $\frac{1}{(n^2+2n+3)^x}$ 单调递减趋于零,故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n^2+2n+3)^x}$ 满足莱布尼兹判别法的两个条件,因此是收敛的. 而当 $x \leqslant 0$ 时,因该级数通项不趋于零,所以是发散的. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n^2+2n+3)^x}$ 的收敛域为 $(0, +\infty)$.

题型三　求幂级数的收敛域或收敛区间

【解题思路】 为求幂级数收敛域,先求收敛半径得到收敛区间,然后再讨论幂级数在收敛区间两个端点上的敛散性. 求收敛半径通常按公式(11.3)(或直接用,或作变量替换后再用),或作为函数项级数直接用比值(根值)判别法,或用幂级数的收敛性特点来确定.

【例 11.17】 求下列幂级数的收敛域或收敛区间:

(Ⅰ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} x^{n-1}$;　　(Ⅱ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$;

(Ⅲ) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$,其中 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 3$;(只求收敛区间)

www.TopSage.com

(Ⅳ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$,其中 $x=0$ 时收敛,$x=6$ 时发散.

【解】 (Ⅰ)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n}x^{n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n}x^n$ 有相同的收敛半径,可以用求收敛半径公式即(11.3)式计算收敛半径. 首先计算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln(2+n)}{n+1}}{\dfrac{\ln(1+n)}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln n+\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{\ln n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=1,$$

所以 $R=1$.

再考察两个端点,即 $x=\pm1$ 时的敛散性. 显然 $x=1$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n}$ 是发散的. 而 $x=-1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln(1+n)}{n}$ 是交错级数,同时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n}=0$. 为说明 $\dfrac{\ln(1+n)}{n}$ 单调递减,令 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,由于 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$,而且,当 $x\geqslant2$ 时,$\dfrac{x}{1+x}<1$,$\ln(1+x)>1$,这就说明 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,所以 $\dfrac{\ln(1+n)}{n}>\dfrac{\ln(2+n)}{n+1}$,$n\geqslant2$,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln(1+n)}{n}$ 满足莱布尼兹判别法的两个条件,该级数收敛.

这样,即得结论:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n}x^{n-1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$.

(Ⅱ)这是缺项幂级数即幂级数的系数有无限多个为0($a_{2n-1}=0$,$n=1,2,\cdots$),所以不能直接用求收敛半径公式即(11.3)求收敛半径 R. 一般有两种方法:

方法 1° 它是函数项级数,可直接用根值判别法. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{2n}}=\mathrm{e}|x|^2,$$

因此 $R=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$,收敛区间是 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$.

方法 2° 作变量替换 $t=x^2$,原级数变成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}t^n$,对此级数用求收敛半径 R 的公式:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\mathrm{e}$$

$\Rightarrow R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 于是原级数的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$,收敛区间是 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$.

当 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 时,原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$,由于

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{\mathrm{e}^n}=\left(\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right)^n=\mathrm{e}^{n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]}\to0,$$

因此,此级数发散. 所以原级数的收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$.

www.TopSage.com

评注 因为 $n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=n\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right]=-\frac{1}{2}+n^2o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty} e^{n[n\ln(1+\frac{1}{n})-1]}=e^{-\frac{1}{2}}$.

www.TopSage.com

(Ⅲ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}=(x-1)^2\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n\right]'$，由幂级数收敛性的特点知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 有相同的收敛半径 $R=3$. 因而其收敛区间为 $(-2,4)$.

(Ⅳ) 考察 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$，由题设 $t=-3$ 时它收敛 $\Rightarrow$ 收敛半径 $R\geqslant 3$，又 $t=3$ 时其发散 $\Rightarrow R\leqslant 3$. 因此 $R=3$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛域是 $[-3,3)$，原级数的收敛域是 $[0,6)$.

题型四 幂级数的求和

【解题思路】 求幂级数的和函数，利用逐项求导、逐项积分，以及四则运算与复合等手段，将其化为可求和的形式，而所谓可求和的形式，一般就是指公式(11.11) ~ (11.17) 那些熟知的公式，特别是几何级数是最常用的. 不过也有例外，【例 11.31】就给出一个利用解微分方程求幂级数的和函数的例子.

【例 11.18】 求下列幂级数的和函数并指出收敛域：

(Ⅰ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$；　(Ⅱ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

【解】 (Ⅰ) 为求其和函数，先进行代数运算，使其能够通过逐项求导与逐项积分等手段变成几何级数求和. 设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1-2)^2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n,$$

并令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，$S_2(x)=4\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，$S_3(x)=4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$，则

$$S_1(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<1,$$

$$S_2(x)=\frac{4}{1-x},\ |x|<1,$$

$$xS_3(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n}$$

$$=-4\ln(1-x),\ (-1\leqslant x<1)\quad (\text{利用}\ \ln(1+t)\ \text{的展开式})$$

所以 $S(x)=S_1(x)-S_2(x)+S_3(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{4}{1-x}-\frac{4}{x}\ln(1-x)$

$$=\frac{4x-3}{(1-x)^2}-\frac{4}{x}\ln(1-x),\quad x\in(-1,1),x\neq 0.$$

当 $x=0$ 时，上面的运算不能进行，然而从原级数看 $S(0)=a_0=1$，同时，也容易看出 $\lim\limits_{x\to 0}S(x)=$

www.TopSage.com

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{4x-3}{(1-x)^2}-4\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right]=1$. 这就说明 $S(x)$ 在 $x=0$ 处还是连续的，这一点也正是幂级数的和函数所应具备的性质.

(Ⅱ) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\varphi(x)$，而

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''$$

$$=\left(x^2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1),$$

于是 $$S(x)=x\varphi(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},x\in(-1,1).$$

评注 求幂级数的和函数 $S(x)$ 时，首先要找出幂级数的收敛区间，然后通过逐项积分或求导或变量替换法、分解法等转化为简单的幂级数求和，通过简单幂级数求和与级数运算得到原幂级数的和函数及收敛区间.

题型五 求函数的幂级数展开式

【解题思路】 与幂级数求和类似，通过逐项积分或求导或变量替换法、分解法等转化为熟知的某些函数的展开式，特别是公式(11.11) ~ (11.17) 中的情形.

【例 11.19】 将下列函数展成麦克劳林级数并指出展开式成立的区间：

(Ⅰ) $\ln(1+x+x^2)$；　　(Ⅱ) $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$.

【解】 (Ⅰ) 应用公式(11.14)，并注意到因式分解公式，就有

$$\ln(1+x+x^2)=\ln\frac{1-x^3}{1-x}=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x^3)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad -1\leqslant x<1.$$

(Ⅱ) 由于 $\left(\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{2}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$，

应用公式(11.16)，有 $\left(\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},|x|<1$. 再两端进行积分，注意到 $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\left(\arctan\frac{1+t}{1-t}\right)'dt=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad -1\leqslant x<1.$$

右端级数在 $x=\pm1$ 均收敛，左端函数在 $x=-1$ 连续，在 $x=1$ 无定义，因此展开式在 $[-1,1)$ 成立.

评注 这里有几点值得注意：

① 有些题目的展开方式可能不止一种，这时应注意表答简程度，比如第(Ⅰ)小题，如果用 $x+x^2$ 作为公式(11.14)中的 x，就得到

$$\ln(1+x+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+x^2)^n}{n},$$

如要进一步将此幂级数整理好，就相当十分困难的.

② 有些函数不能直接展开，有时就先求其导数，展开后自然还要再积分，这时就要注意准确使用幂级，某些是积分式，比如第(Ⅱ)小题，对积分时就用到 $\operatorname{arctanh}\frac{1+x}{1-x}\Big|_{x=0}=\pi/4$，这一点常常被忽略.

③ 幂级数的逐项积分与求导只保证收敛区间不变，因此求出展开式的收敛区间后还须验证展开式在收敛区间的端点是否成立.

【例 11.20】 将下列函数在指定点处展开为泰勒级数：

(Ⅰ) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$，在 $x=1$ 处；　(Ⅱ) $\ln(2x^2+x-3)$，在 $x=3$ 处.

【分析】 使用间接法在指定点 x_0 处作泰勒展开，就要用 $x-x_0$，或者 $x-x_0$ 的倍数与方幂等代替原来的 x.

【解】 (Ⅰ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$,

其中 $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2+(x-1)}=\dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{x-1}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$, $-1<x<3$.

在上述展式中就是以 $\dfrac{x-1}{2}$ 代替(11.16)式中的 x，又

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3\left(1+\dfrac{x-1}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n,\quad -2<x<4,$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$, $-1<x<3$.

(Ⅱ) 由于 $\ln(2x^2+x-3)=\ln(2x+3)(x-1)=\ln(2x+3)+\ln(x-1)$，对于右端两项应用公式(11.14)，得

$$\ln(2x+3)=\ln[2(x-3)+9]=\ln 9+\ln\left[1+\frac{2(x-3)}{9}\right]$$

$$=2\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left[\frac{2(x-3)}{9}\right]^n,\quad -1.5<x\leqslant 7.5;$$

$$\ln(x-1)=\ln(x-3+2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-3}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 2^n},\quad 1<x\leqslant 5.$$

所以 $\ln(2x^2+x-3)=\ln 2+2\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\left(\dfrac{2}{9}\right)^n+\dfrac{1}{2^n}\right](x-3)^n$，其中 $1<x\leqslant 5$.

【例 11.21】 将下列函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数并求 $f^{(n)}(0)$：

(Ⅰ) $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$，其中 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$　(Ⅱ) $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

www.TopSage.com

【分析】 这两个小题除了作幂级数展开之外还涉及分析运算,其中一个含有求导,一个含有积分.像这样的题目,到底是应该先展开,后做分析运算,还是应该先做分析运算,后展开呢?一般说应该先展开,因为展开后的分析运算就是逐项求导、逐项积分,特别简便.而且对某些题目也必须先展开,比如:(Ⅱ)小题就是如此.

【解】 (Ⅰ)因$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$,$-\infty<x<+\infty$,$x\neq 0$,又$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right)\Big|_{x=0}=1$,故

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}x^n,\text{其中}-\infty<x<+\infty.$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{n+1}{(n+2)!}n!=\frac{1}{n+2}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

(Ⅱ)应用公式(11.12),有$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$(-\infty<x<+\infty)$.逐项积分得

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

由此又得 $f^{(2n)}(0)=0\ (n=1,2,3,\cdots)$,

$$f^{(2n+1)}(0)=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}\cdot(2n+1)!=\frac{(-1)^n}{2n+1}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

评注 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (-R<x<R)$,则$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$,因此对某些给定的$f(x)$,求$f^{(n)}(0)$的一种方法是:将$f(x)$展成幂级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则由它的系数$a_n$可求得$f^{(n)}(0)=n!a_n$.

题型六 常数项级数求和

【解题思路】 常数项级数求和主要有以下几种方法:

方法1° 直接计算部分和S_n,然后求极限,得到级数的和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n$.

方法2° 利用分解法及已知的幂级数展开式(11.11 ~ 11.15).

方法3° 借助于求幂级数的和函数.

方法4° 借助于函数的傅里叶级数展开式.

一般说,只有特别简单的情况才能直接计算部分和,从而得到级数的和;当级数通项中含有某个数n次幂作为因子时用第二种方法,而能够借助于傅里叶级数展开式的不易找规律,往往是将某个函数展开后,发现其系数具有某种特性,才知道可以得到某个常数项级数之和,详细说明见后面题型七.

【例11.22】 设有两条抛物线$y=nx^2+\frac{1}{n}$和$y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$,记它们交点的横坐标的绝对值为a_n.

(Ⅰ)求这两条抛物线所围成的平面图形的面积S_n;(Ⅱ)求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$的和.

www.TopSage.com

【解】 (Ⅰ)由 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 与 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$,得 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 又因为两条抛物线所围图形关于 y 轴对称,所以

$$S_n = 2\int_0^{a_n}\left[nx^2 + \frac{1}{n} - (n+1)x^2 - \frac{1}{n+1}\right]dx$$

$$= 2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n(n+1)} - x^2\right]dx = \frac{4}{3n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}.$$

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果 $\frac{S_n}{a_n} = \frac{4}{3n(n+1)} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{S_n}{a_n} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{4}{3}\lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{4}{3}.$$

【例 11.23】 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ 的和.

【解】 根据已经熟悉的事实:$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$,可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} + e = 2e.$$

【例 11.24】 求下列级数的和:

(Ⅰ) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}$;　　(Ⅱ) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$.

【解】 (Ⅰ)$S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n-1)}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = S_1 + S_2$.

S_2 为几何级数,其和为 2/3 . S_1 可看作幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n$ 在 $x = 1/2$ 处的值. 记

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n = x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}$$

$$= x^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]'' = x^2\left(\frac{1}{1+x}\right)'' = \frac{2x^2}{(1+x)^3},$$

从而 $S_1 = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{27}$, $S = S_1 + S_2 = \frac{4}{27} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}$.

(Ⅱ)令 $S = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$,先分解成

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}.$$

直接利用 $\ln(1+x)$ 的展开式得

$$S = \frac{-1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{2}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2.$$

评注 数列与常数项级数有着一对应关系,数列极限可以转化为某特定的常数项级数的和,特别是,求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i$,即求 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,因此若用本题型方法可求出 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,也就求出了极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i$.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

题型七　有关傅里叶级数的命题

▶1. 求傅里叶系数或傅里叶级数的和函数

【例 11.25】 （Ⅰ）设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0,\\ x^3, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于_____；

（Ⅱ）设函数 $f(x)=x^2,0\leqslant x<1$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x),-\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx,n=1,2,3,\cdots$，则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=$_____.

【分析】 （Ⅰ）根据收敛定理，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(1-0)+f(-1+0)]=3/2.$$

（Ⅱ）由 $S(x)$ 的形式可知：$S(x)$ 是奇函数．又 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 连续，所以

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-1/4.$$

【例 11.26】 设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi,\\ x+2\pi, & -\pi<x<0\end{cases}$ 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

（Ⅰ）求系数 a_0，并证明 $a_n=0,(n\geqslant 1)$；

（Ⅱ）求傅里叶级数的和函数 $g(x)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，及 $g(2\pi)$ 的值．

【解】 （Ⅰ）根据定义

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\,dx+\int_0^{\pi}x\,dx\right]=2\int_{-\pi}^{0}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\cos(nx)\,dx+\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(nx)\,dx+2\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,dx=0.$$

注意：奇函数 $x\cos nx$ 在对称区间上的积分值为零．

从另一个角度看，$f(x)-\frac{a_0}{2}=f(x)-\pi=\begin{cases}x-\pi, & 0<x<\pi,\\ x+\pi, & -\pi<x<0\end{cases}$ 为奇函数，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 实际上就是 $f(x)-a_0/2$ 的傅里叶级数，所以 $a_n=0$．

（Ⅱ）根据收敛定理，和函数 $g(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant\pi,\\ \pi, & x=0,\\ x+2\pi, & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$ 另外，$g(2\pi)=g(0)=\pi$．

▶2. 求函数的傅里叶级数展开式及利用函数的傅里叶级数展开式求常数项级数的和

【解题思路】 利用函数的傅里叶级数展开式求常数项级数的和与利用幂级数的和函数求常数项级数的和不同．后者经常是依照下述顺序得到常数项级数之和的，即常数项级数 → 构造适当的幂级数 → 求幂级数的和函数 → 由和函数在某特定点的函数值定出常数项级数之和，【例 11.24】就是这样的

过程.利用傅里叶级数求常数项级数之和则往往是:函数 → 求其傅里叶级数展开式 → 根据傅里叶系数的特性,确定要计算的常数项级数 → 根据收敛定理确定该常数项级数之和.这个特点正好说明:这里不是由欲求和之常数项级数确定傅里叶级数,而是由傅里叶级数展开式确定要求其和的常数项级数,具体过程参看【例 11.27】.

【例 11.27】 设函数 $f(x)=x^2, x\in[0,\pi]$,将 $f(x)$ 展开为以 2π 为周期的傅里叶级数,并证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

【分析】 这里的函数 $f(x)$ 定义于区间 $[0,\pi]$.然而要求以 2π 为周期展成傅里叶级数,这样就需要将 $f(x)$ 延拓到 $[-\pi,0)$ 上去.由于题目未限定延拓的方式,所以可以采用奇延拓、偶延拓或者其他形式的延拓(比如零延拓)都是可以的.而且延拓方式不同,其展开式也不同.

【解】 **方法 1°** 作奇延拓,展开为正弦级数.令 $g_1(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -x^2, & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$ 则

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin(nx)\,dx=-\frac{2}{n\pi}x^2\cos(nx)\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{n^2\pi}x\sin(nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{n^3\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}=(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1].$$

故由狄利克雷定理,可知

$$f(x)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x,0\leqslant x<\pi.$$

而当 $x=\pi$ 时,该级数收敛于零.

方法 2° 作偶延拓,展开为余弦级数.令 $g_2(x)=x^2,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$,则

$$b_n=0,n=1,2,\cdots,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)\,dx=\frac{2}{n\pi}x^2\sin(nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin(nx)\,dx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}x\cos(nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2},n=1,2,\cdots,$$

故由收敛定理,可知 $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx),0\leqslant x\leqslant\pi$.

令 $x=\pi$ 得,$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

方法 3° 作零延拓.令 $g_3(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$ 即为零延拓.按常规的办法,可依照前面的公式计算傅里叶系数,不过注意到零延拓与奇、偶延拓的关系,即知 $g_3(x)=\frac{1}{2}[g_1(x)+g_2(x)]$,因此,利用前面结果,就有

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2}{n^2}\cos(nx)-\frac{\pi}{n}\sin(nx)\right]-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x,0\leqslant x<\pi.$$

www.TopSage.com

在 $x=\pi$ 处，该级数收敛于 $\pi^2/2$．由此也立即可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

题型八　证明题与综合题

【例 11.28】　设数列 $\{na_n\}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

【证明】　题设数列 $\{na_n\}$ 收敛，即知：存在常数 A，使 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=A$；题设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，所以

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}n(a_n-a_{n-1})=\lim_{m\to\infty}[a_1+2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+\cdots+m(a_m-a_{m-1})]$$

$$=\lim_{m\to\infty}(-a_1-a_2-\cdots-a_{m-1}+ma_m)=-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}a_n+\lim_{m\to\infty}ma_m=S,$$

即其部分和的极限存在，记其为 S．由此即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}a_n=\lim_{m\to\infty}ma_m-S=A-S.$$

这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，其和为 $A-S$．

【例 11.29】　设 $a_n>0,b_n>0,(n=1,2,\cdots)$，且满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n},n=1,2,\cdots,$$

试证：(Ⅰ) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；(Ⅱ) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散．

【证明】　由于 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\dfrac{a_n}{b_n}\leqslant\dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{a_1}{b_1}$，$a_{n+1}\leqslant\dfrac{a_1}{b_1}b_{n+1}$．这样，根据比较判别法即知：当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而且当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散．

评注　本题如果采用如下的证明方法则是错误的：因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=p<1$，或者 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant p<1$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．这是因为比值判别法所给出的是充分条件，即由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=p<1$，可以得出正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛．但是，逆命题是不成立的，比如当 $p>1$ 时，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，然而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}}=1$．

【例 11.30】　设函数 $f(x)$ 在 $|x|\leqslant1$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，试证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛．

【证法一】　利用泰勒公式．首先由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 可知：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$，而且

www.TopSage.com

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0.$$

这样,利用函数 $f(x)$ 的一阶泰勒公式,就有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2=\frac{1}{2}f''(\theta x)x^2,0<\theta<1.$$

而且,因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内有连续的二阶导数,因此存在正数 M,使 $|f''(x)|\leqslant M$ 在此邻域内成立,并且当 n 充分大时

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}.$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,由比较判别法即知 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

【证法二】 利用洛必达法则.上面已经说明 $f'(0)=0$,再根据二阶导数连续性的假设,即知 $\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$,而且可以利用洛必达法则计算极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0).$$

这就说明:在 $x=0$ 的某一邻域内 $\frac{f(x)}{x^2}$ 有界,从而当 n 充分大时,$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant k\frac{1}{n^2}$,其中 k 为某一正常数.

再利用比较判别法,即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

【例 11.31】 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$ 的和.

【解】 考虑幂级数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}x^{2n-1}$,易求它的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

现逐项求导得

$$S'(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}=1+xS(x).$$

逐项求导后虽未得到 $S'(x)$ 的和函数,但得到 $S(x)$ 满足的一阶方程,又 $S(0)=0$,解初值问题

$$\begin{cases}S'(x)-xS(x)=1,\\ S(0)=0\end{cases}\Rightarrow S(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt.$$

令 $x=1$ 得原级数的和为 $e^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$.

评注 本题也是一个借助于幂级数的和函数来求数项级数之和的问题,与前面的【例 11.24】—(Ⅰ)不同的是,那里的幂级数都能够经过逐项求导或逐项积分化为几何级数,这里却只是找到了 $S(x)$ 与 $S'(x)$ 之间的一个关系式,这就是上面的一阶线性微分方程.幂级数的和函数就是借助于求解此微分方程得到的.不过为了确定 $S(x)$ 的值,还使用了 $S(0)=0$ 作为初始条件,这一点也是要注意的.

题型训练

一、选择题

1. 下列各项正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

www.TopSage.com

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛且 $u_n \geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

2. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处

(A) 条件收敛. (B) 绝对收敛. (C) 发散. (D) 收敛性不能确定.

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+a}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 敛散性与 a 有关.

4. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则 S_n 有界是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的

(A) 充分条件. (B) 必要条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件也非必要条件.

5. 已知 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 条件收敛，记 $b_n=2a_{2n-1}-a_{2n}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 收敛或发散取决于 a_n 的具体形式.

6. 下列命题中正确的是

(A) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R\neq 0$，则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=R^{-1}$.

(B) 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不 $\exists$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 不存在收敛半径.

(C) 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $[-R,R]$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛域为 $[-R,R]$.

(D) 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间 $(-R,R)$ 即它的收敛域，则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域可能是 $[-R,R]$.

二、填空题

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛区间是_____.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$ 的和函数及定义域是_____.

3. 幂级数 $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ 的和函数及定义域是_____.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 的和 $S=$_____.

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n^p}$ 收敛，则 p 的取值范围是_____.

www.TopSage.com

6. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3$，又 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n}$ 的收敛半径 $R =$ _____.

大家网 TopSage.com

三、计算题与证明题

1. 将下列函数在指定点展成幂级数：

（Ⅰ）$f(x) = \arcsin x$，在 $x = 0$ 处；（Ⅱ）$f(x) = \ln x$，在 $x = 1$ 及 $x = 2$ 处；

（Ⅲ）$f(x) = \frac{x}{x+2}$，在 $x = 1$ 处.

2. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!} x^n$ 的收敛域及和函数.

3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$ 的和 S.

4. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，

（Ⅰ）若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n}) = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots$ 收敛，求证：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

（Ⅱ）设 $u_{2n-1} = \frac{1}{n}$，$u_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$ $(n = 1,2,\cdots)$，求证：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛，又 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的正项级数，求证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

6. 设有级数 $< U >: \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $< V >: \sum_{n=1}^{\infty} v_n$，求证：

（Ⅰ）若 $< U >$，$< V >$ 均绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 绝对收敛；

（Ⅱ）若 $< U >$ 绝对收敛，$< V >$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 条件收敛.

7. 设 $a_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx$，求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8. 设 $f(x)$ 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，且满足 $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 证明：$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数展开式中系数 $a_{2n} = 0, n = 1,2,\cdots$.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leqslant 0, \\ 1 + x^2, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅氏级数，并指出其和函数 $S(x)$；（Ⅱ）求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

www.TopSage.com

第二篇　线性代数

线性代数这门课程的特点是:概念多,符号多,运算法则多(有的法则与大家习惯的数的运算法则有较大的反差),容易引起混淆;内容上纵横交错,前后联系紧密,环环相扣,相互渗透;对于抽象性及逻辑性有较高的要求.因此,解题方法灵活多样化,驾驭把握起来也就有一定困难,这就要求考生不断总结归纳,搞清内在联系,使所学知识融会贯通;对概念要充分理解,要掌握定理、公式成立的条件,这样推导论证的思路才能清晰,同时应注意语言的叙述表达,要求准确、简明.

【例1】 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵

$\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$(满秩阵,其中 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩)

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有唯一解

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 等价

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量可作为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{R}^n$ 中任意一个向量都可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为 0

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

【例2】 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量,方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 对于任何 $\boldsymbol{b}$ 总有解的等价说法:

$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有解

$\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$, $\exists$ 常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,使 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可表示任一 m 维向量

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 等价

$\Leftrightarrow$ 向量组的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = m$

$\Leftrightarrow$ 秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ $\exists n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$.

评注　线性代数各知识点之间有着千丝万缕的联系,这样给综合命题创造了条件,故考生应认真理清各知识点之间的衔接和转换,通过一题多解(采取图为表的解法填充或表)的训练来开拓思路、丰富联想,从而提高对综合的、有较多考查或超纲分析和解决的能力.

www.TopSage.com

第一章　行列式

内容概要与重难点提示

行列式的重点是计算，应当在理解 n 阶行列式的概念、掌握行列式性质的基础上，熟练、正确地计算三阶、四阶行列式，也要会计算简单的 n 阶行列式的值.

计算行列式的基本方法是：按行（列）展开公式，通过降阶来实现. 但在展开之前往往先通过对行列式的恒等变形，以期新的行列式中能构造出较多的零或有公因式，从而可简化计算. 行列式计算的常用技巧有：三角化法，递推法，数学归纳法，公式法等.

行列式在线性代数中有较多的应用. 例如：

(1) 当 $|A| = 0$ 时，齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解，而此时的非齐次方程组 $Ax = b$ 没有唯一解（可能无解，亦可能有无穷多解）. 而当 $|A| \neq 0$ 时，由克莱姆法则，可求出 $Ax = b$ 的唯一解.

(2) 可证明矩阵 A 可逆，并可由伴随矩阵 A^*（注：伴随矩阵亦是用行列式定义的）求出 A^{-1}.

(3) 对 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 可通过计算行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n|$ 是否为零来判断它们是线性相关或线性无关.

(4) 矩阵 A 的秩 $r(A)$ 是用 A 中非零子式的最高阶数来定义的.

(5) 求矩阵 A 的特征值，其中一个重要方法是通过计算 $|\lambda E - A| = 0$.

(6) 判断二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的正定性，可用顺序主子式全大于零.

【注】　这些应用要求考生在概念上应清晰，运用时要灵活，对知识的衔接与内在联系要把握得较好.

考核知识要点讲解

一、行列式的概念、展开公式及其性质

(一) 行列式的概念

n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，它由 $n!$ 项组成，其中带正号与带负号的项各占一半，$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号.

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和，式(1.1) 称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

【例 1.1】　三阶行列式

www.TopSage.com

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}$$

是 x 的多项式，根据行列式的性质将第 1 行的 -1 倍分别加至第 2 行及第 3 行，行列式的值不变，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}.$$

由于行列式是不同行不同列元素乘积的代数和，所以 $f(x)$ 作为 x 的多项式其次数最高是一次，不要误以为 $f(x)$ 是 x 的三次多项式.

（二）行列式按行（列）展开公式

计算行列式的值主要用按行或按列展开公式，即

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j}M_{ij}, \tag{1.3}$$

M_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中去掉第 i 行及第 j 列元素后的 $n-1$ 阶行列式，称之为 a_{ij} 的**余子式**，而给余子式带有符号即 $(-1)^{i+j}M_{ij}$，则称为 a_{ij} 的**代数余子式**.

▶1. 上（下）三角行列式等于其主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.4}$$

▶2. 关于副对角线，其计算公式为

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.5}$$

▶3. 两种特殊的拉普拉斯（Laplace）展开式：设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|, \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|. \end{aligned} \tag{1.6}$$

【例 1.2】 计算行列式的值：

www.TopSage.com

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 240.$$

（三）行列式的性质

▶1. 经转置的行列式的值不变，即 $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$. 这表明在行列式中行与列的地位是对等的，因此，行列式的行所具有的性质，对于列亦具有. 为简捷，下面仅叙述行的性质.

▶2. 行列式中某一行各元素如有公因数 k**，则** k **可以提到行列式符号外. 特别地，若行列式中某行元素全是零，则行列式的值为零.**

▶3. 如果行列式中某行的每个元素都是两个数的和，则这个行列式可以拆成两个行列式的和. 例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

【注】 由于 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$，则 $|A + B|$ 每行元素都是两个数的和，根据性质 3，行列式 $|A + B|$ 应拆成 2^n 个行列式之和，故一般情况，$|A + B| \neq |A| + |B|$，在这里不要出错.

▶4. 对换行列式中某两行的位置，行列式的值只改变正负号. 特别地，如两行元素对应相等（或成比例），则行列式的值是零.

▶5. 把某行的 k **倍加至另一行，行列式的值不变.**

【注】 在行列式计算中，往往先用这条性质作恒等变形，以期简化计算.

【例 1.3】 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A|. \end{aligned}$$

评注 把【例 1.3】推广到 n 阶，利用性质 3，可有关系式

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^k S_k \lambda^{n-k} + \cdots + (-1)^n |A|,$$

其中 S_k 是 A 的全体 k 阶主子式的和.

当 $n = 3$ 时，其表达式为

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda - |A|. \tag{1.7}$$

若能看清规律记住这个公式，对后面求特征值是有益的.

【例 1.4】 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 之值.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

【解法一】 把第1行的 -4 倍，-7 倍分别加至第2行及第3行，即有

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-6\\-6&-12\end{vmatrix}=0.$$

【解法二】 把第2行的 -1 倍加至第3行，再把第1行的 -1 倍加至第2行，得

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&3\\3&3&3\end{vmatrix}=0.$$

【解法三】 把7,8,9分别改写成 $8-1$，$10-2$，$12-3$，然后拆开成两个行列式，即

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\8-1&10-2&12-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\8&10&12\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-1&-2&-3\end{vmatrix}=0.$$

【例1.5】 已知 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$，若 $|\lambda E-A|=0$，求 λ 的值.

【解】 先把第2列加至第3列，再把第3行的 -1 倍加至第2行，然后按第3列展开，即

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda+2&-2\\1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\-2&\lambda+2&\lambda\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\-3&\lambda+3&0\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1&1\\-3&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)=0,$$

所以 $\lambda=0$（二重根），$\lambda=-2$.

评注 因为 $|\lambda E-A|=0$ 是 λ 的3次方程，所以计算特征多项式时要用观察法，通过两行（列）的加减提取出 λ 的一次多项式，以回避三次方程的求解.

如果熟悉公式(1.7)，并注意到本题中秩 $r(A)=1$，那么立即有

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-[1+(-2)+(-1)]\lambda^2=\lambda^3+2\lambda^2.$$

（四）关于代数余子式的求和

代数余子式的性质除用于按行（列）展开公式计算行列式外，还有两条重要性质：

▶1. 只改变 a_{ij} 所在行或列中元素的值并不影响其代数余子式 A_{ij}. 特别地，A_{ij} 与 a_{ij} 的取值没有关系. 例如，两个行列式

$$\begin{vmatrix}0&1&-2\\3&4&5\\6&7&8\end{vmatrix}\quad\text{与}\quad\begin{vmatrix}x&y&z\\3&4&5\\6&7&8\end{vmatrix}$$

的 a_{1j} 并不相同，但第一行元素的代数余子式 A_{1j} 是完全一样的.

▶2. 行列式一行（列）元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和必为零. 即

$$\begin{aligned}&a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j),\\&a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0\quad(j\neq k).\end{aligned}\tag{1.8}$$

【例1.6】 已知 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\-1&2&5&4\end{vmatrix}$，试求：

www.TopSage.com

(Ⅰ)$A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}$；　(Ⅱ)$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

【解】 (Ⅰ)虽然我们可以先分别算出每一个代数余子式,然后再求和,但这往往是烦琐的.对于代数余子式的性质应会灵活运用.如能观察到在本题中$a_{11}=1,a_{21}=-1,a_{31}=1,a_{41}=-1$,那么就知

$$A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+a_{41}A_{42}=0.$$

(Ⅱ)由于A_{ij}与a_{ij}无关,现在可构造一个新的行列式(将行列式$|A|$中第4行元素置换成代数余子式A_{4j}的系数),即

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}.$$

由于$|A|,|B|$仅第4行元素不同,因此新、旧这两个行列式的代数余子式$A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$是完全一样的,而对$|B|$按第4行展开,就有

$$|B|=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}=A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}.$$

可见,要解(Ⅱ)只需算出行列式$|B|$的值.为此

$$|B|\xrightarrow[\text{加至第4行}]{\text{第3行的}-1\text{倍}}\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{按第4行展开}}\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=-1,$$

即　　$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-1.$

二、有关行列式的几个重要公式

1. 若A是n阶矩阵,则$|kA|=k^n|A|$.　(1.9)

2. 若A,B都是n阶矩阵,则$|AB|=|A|\cdot|B|$.　(1.10)

3. 若A是n阶矩阵,则$|A^*|=|A|^{n-1}$;　(1.11)

　若A是n阶可逆矩阵,则$|A^{-1}|=|A|^{-1}$.　(1.12)

4. 若A是n阶范德蒙(Vandermonde)矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{bmatrix},\text{则}|A|=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).\quad(1.13)$$

5. 若A是n阶矩阵,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是$A$的特征值,则$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.　(1.14)

6. 若$A\sim B$,则$|A|=|B|$.　(1.15)

【例1.7】 设A,B均为n阶矩阵,$|A|=2,|B|=-3$,求(Ⅰ)$|2A^*B^{-1}|$;　(Ⅱ)$||2A^*|B^{\mathrm{T}}|$.

【解】 (Ⅰ)$|2A^*B^{-1}|=2^n|A^*|\cdot|B^{-1}|=2^n|A|^{n-1}\cdot|B|^{-1}=-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

(Ⅱ)$\left||2A^*|B^{\mathrm{T}}\right|=|2A^*|^n\cdot|B^{\mathrm{T}}|=(2^n|A|^{n-1})^n|B|=-3\cdot2^{2n^2-n}$.

www.TopSage.com

评注　注意不要在应用公式 $|kA|$ 上出错太多，对 $|A^*|$ 的公式也不熟悉，在(Ⅰ)中 A^*B^{-1} 是矩阵乘积，用行列式乘法公式(1.10)进行计算；(Ⅱ)中 $|2A^*|$ 是行列式，是数，用 $|kA|$ 公式(1.9)进行计算，两者不要混淆.

二、关于克莱姆(Cramer)法则

对于 n 个方程 n 个未知数的线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$
如果系数行列式 $D = |A| \neq 0$，则方程组有唯一解，即
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{1.16}$$
其中 D_j 是把 D 中 x_j 的系数换成常数项.

【推论1】 若齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$
的系数行列式不为0，则方程组只有零解.

【推论2】 若齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$
有非0解，则系数行列式 $|A| = 0$.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一　有关行列式的概念与性质的问题

【例1.8】 已知 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 是6阶行列式中的一项，试确定 i, j 的值及此项所带符号.

【解】 根据行列式的定义，它是不同行不同列元素乘积的代数和. 因此，行指标

$2,3,i,6,5,1$

应取自1至6的排列，故 $i = 4$. 同理可知 $3,1,j,4,6,5$ 中 $j = 2$.

关于此项所带的符号，可有两种思路：

(1) 将该项按行的自然顺序排列，有 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{64}a_{56}a_{15} = a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{64}$.

后者列的逆序数为 $\tau(5,3,1,2,6,4) = 4 + 2 + 0 + 0 + 1 = 7$，所以该项应带负号.

www.TopSage.com

(2) 直接计算行的逆序数与列的逆序数,有 $\tau(2,3,4,6,5,1)+\tau(3,1,2,4,6,5)=6+3=9$. 亦知此项应带负号.

【例 1.9】 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

【分析】 问方程 $f(x)=0$ 有几个根,也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 为此应先对 $f(x)$ 作恒等变形. 将第 1 列的 -1 倍分别加至第 2,3,4 列得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix},$$

再将第 2 列加至第 4 列,行列式的右上角为 0. 可用拉普拉斯展开式(1.6),即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix},$$ 从而知应选(B).

【例 1.10】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作若干次初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,那么必有

(A) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. (B) 如 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $|\boldsymbol{B}|=0$.

(C) $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$. (D) 如 $|\boldsymbol{A}|>0$,则 $|\boldsymbol{B}|>0$.

【分析】 经初等变换矩阵的秩不变. 由 $|\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow r(\boldsymbol{A})<n\Rightarrow r(\boldsymbol{B})<n\Rightarrow|\boldsymbol{B}|=0$. 故(B)正确.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$,可知(A)、(D)均不正确.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$,可知(C)不正确.

【例 1.11】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=0$,则

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行元素对应成比例.

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任一行向量是其余各行向量的线性组合.

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一列向量可由其余的列向量线性表出.

(D) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解.

【分析】 (A)是充分条件. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\1&3&4\end{bmatrix}$,虽任两行元素都不成比例,但 $|\boldsymbol{A}|=0$;(D)方程组可能无解. 例如 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\2x_1+2x_2=2,\end{cases}$ 有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$,且 $|\boldsymbol{A}|=0$,但 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解,故(A),(D)均错误.

由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组线性相关,但线性相关向量组中,只是有向量可由其余向量线性表出,并不是每一个向量都可由其余向量线性表出,参看【定理 3.2】及【定理 3.4】. 故应选(C).

请你举反例,说明(B)是错误的.

【例 1.12】 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2-x \\ 1 & x & x+3 & x+6 \end{vmatrix}$, 证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

www.TopSage.com

【分析】 按行列式定义易知 $f(x)$ 是 x 的多项式，显然 $f(x)$ 连续且可导．根据罗尔定理，我们只需证明 $f(0)=f(1)$．

【证明】 因为 $f(0)=\begin{vmatrix}0&1&2&4\\1&2&2&4\\2&0&1&2\\1&0&3&6\end{vmatrix}=0$，$f(1)=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\1&1&2&4\\2&0&1&1\\1&1&4&7\end{vmatrix}=0$，

又知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，故 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$，即 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根．

题型二 数字型行列式的计算

【解题思路】 计算行列式值的最基本方法是：按行(列)展开公式．另外，常用的技巧有：

▶1. 三角化法

【例 1.13】 行列式 $D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}=$ _____．

【分析】 从第 1 行开始，依次把每行加至下一行，得

$$D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

评注 行列式按某行(列)拆成两个行列式之和是一个重要的性质．

【例 1.14】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1&1&1&1\\1&a_2&0&0\\1&0&a_3&0\\1&0&0&a_4\end{vmatrix}$ 之值，其中 $a_i\neq0$ $(i=2,3,4)$．

【解】 第 i 行提出 a_i，再把第 i 行的 -1 倍加至第 1 行$(i=2,3,4)$，得

$$D=a_2a_3a_4\begin{vmatrix}a_1&1&1&1\\\frac{1}{a_2}&1&0&0\\\frac{1}{a_3}&0&1&0\\\frac{1}{a_4}&0&0&1\end{vmatrix}=a_2a_3a_4\begin{vmatrix}a_1-\sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{a_i}&0&0&0\\\frac{1}{a_2}&1&0&0\\\frac{1}{a_3}&0&1&0\\\frac{1}{a_4}&0&0&1\end{vmatrix}=a_2a_3a_4\left(a_1-\sum_{i=2}^{4}\frac{1}{a_i}\right).$$

评注 对于某行(列)元素各行(列)的数字相加或减后可以化为三角行列式．

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

【例 1.15】 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{bmatrix}$，则 $|A|=$ _____.

【分析】 把第 2 行的 -1 倍分别加至其余各行，再把第 1 行的 2 倍加至第 2 行，得

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\2&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\0&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=-2\cdot(n-2)!.$$

评注 行列式恒等变形时，把某行的倍数加至其余各行使其出现零是最常用的.

【例 1.16】 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&\cdots&1&0\\\vdots&\iddots&\iddots&1\\1&\iddots&\iddots&\vdots\\0&1&\cdots&1\end{bmatrix}$，则 $|2A|=$ _____.

【分析】 $|2A|=2^n|A|$. 对于行列式 $|A|$，先把每行都加至第一行并提取公因数 $n-1$，然后再把第一行的 -1 倍分别加至其它各行，由(1.5) 有

$$|A|=(n-1)\begin{vmatrix}1&\cdots&1&1\\\vdots&\iddots&0&1\\1&\iddots&\iddots&\vdots\\0&1&\cdots&1\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&\cdots&1&1\\&&&-1\\&\iddots&&\\-1&&&\end{vmatrix}$$

$$=(n-1)(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}(n-1).$$

故 $$|2A|=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}2^n(n-1).$$

评注 把每一行(列) 都加到第一行(列) 以期出现公因式(数) 是常见的.

▶2. 递推法

【例 1.17】 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}$ 之值.

【解法一】 把各列均加至第 1 列，并按第 1 列展开，得到递推公式

$$D_4=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\-a&0&-1&1-a\end{vmatrix}=D_3+(-a)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1-a&a&0\\-1&1-a&a\end{vmatrix}$$

$$=D_3-a(-1)^{4+1}a^3,$$

继续使用这个递推公式，有 $D_3=D_2-a(-1)^{3+1}a^2=D_2-(-1)^{3+1}a^3$.

而初始值 $D_2=1-a+a^2$，故 $D_4=1-a+a^2-a^3+a^4$.

【解法二】 把第 1 列看成是两个数之和，利用行列式性质可将 D_4 拆为两个行列式之和，即

www.TopSage.com

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a & a & 0 & 0\\ 0 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}.$$

前者如同【例 1.13】,其值为 1,后者按第 1 列展开为 $-aD_4$.

于是有递推关系 $D_4=1-aD_3$, $D_3=1-aD_2$, 下略.

【注】 本题除用递推法之外,当然也可用倍加法化零,然后再用展开公式.如下面的【解法三】.

【解法三】 把第 2 行的 $1-a$ 倍加到第 1 行,然后把第 3 行的 $1-a+a^2$ 倍加到第 1 行;…,即

$$D_4=\begin{vmatrix}0 & 1-a+a^2 & a-a^2 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1-a+a^2-a^3 & a-a^2+a^3\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1-a+a^2-a^3+a^4\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=(1-a+a^2-a^3+a^4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1-a & a\\ 0 & -1 & 1-a\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$=1-a+a^2-a^3+a^4.$$

【例 1.18】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$ 之值.

【解】 按第 n 行展开,有

$$D_n=x\begin{vmatrix}a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0\\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x\end{vmatrix}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n,$$

从而递推地得到

$$D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1}(-1)^n\cdot(-1)^{n-2}=xD_{n-2}+a_{n-1},$$

$$D_{n-2}=xD_{n-3}+a_{n-2},$$

……

$$D_2=a_1x+a_2 .$$

对这些等式分别用 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-2}$ 相乘,然后相加,得到

$$D_n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n .$$

【注】 对于既非特殊且零元素多的行列式,可以考虑用按行展开公式把它逐步降阶直至化为计算简单的行列式的值.

请你用逐行相加的技巧来解本题.提示:将第 i 行的 x 倍加至第 $i+1$ 行,$i=1,2,\cdots$

【例 1.19】 计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$ 之值.

【解】 先互换第 2,3 两行,再对调第 2,3 两列,就可用拉普拉斯展开式(1.6),即

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}=(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2).$$

【例 1.20】 计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$ 之值.

【解】 由于 $AA^{\mathrm{T}}=(a^2+b^2+c^2+d^2)E$,故用行列式乘法公式(1.10),得

$$|A|^2=|A|\cdot|A^{\mathrm{T}}|=|AA^{\mathrm{T}}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4.$$

因 $|A|$ 中,a^4 系数是 +1,所以 $|A|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

【例 1.21】 证明 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j)$.

【分析】 本题的行列式与范德蒙行列式很接近,它缺少的是字母的平方项,可以用加边的方法构成一个 4 阶的范德蒙行列式,然后分析这两个行列式之间的联系,进而可推导出所需要的结论.

【证明】 构造范德蒙行列式

$$D_1\xlongequal{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & y^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & y^3 \end{vmatrix},$$

一方面,对行列式 D_1 按第 4 列展开,有

$$D_1=1\cdot A_{14}+yA_{24}+y^2A_{34}+y^3A_{34},$$

而 y^2 的系数是

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}=-D. \qquad ①$$

另一方面,对行列式 D_1 用公式(1.13),有

$$D_1=(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j).$$

在这里,易见 y^2 的系数是

$$-(x_1+x_2+x_3)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j). \qquad ②$$

比较 ① 与 ② 得 $D=(x_1+x_2+x_3)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j)$.

www.TopSage.com

【例 1.22】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$，证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

【证明】（用数学归纳法） 记 $D_n=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}$.

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确.

设 $n<k$ 时，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确，对 D_k 按第一列展开得

$$D_k=2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2},$$

按归纳假设 $D_{k-1}=ka^{k-1}$，$D_{k-2}=(k-1)a^{k-2}$，从而

$$D_k=2a(ka^{k-1})-a^2(k-1)a^{k-2}=(k+1)a^k.$$

所以 $\forall n$，命题 $D_n=|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$ 正确.

[注] 关于数学归纳法有两种形式，其具体做法分别是：

第一数学归纳法：

第一步，验证 $n=1$ 时，命题 f_n 正确；

第二步，设 $n=k$ 时，命题 f_n 正确；

第三步，证明 $n=k+1$ 时，命题 f_n 正确.

第二数学归纳法：

第一步，验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时，命题 f_n 都正确；

第二步，设 $n<k$ 时，命题 f_n 正确；

第三步，证明 $n=k$ 时，命题 f_n 正确.

题型三 抽象行列式的计算

【例 1.23】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是 4 维列向量，且 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=a$，$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=$

www.TopSage.com

b,则 $|2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| =$ _____.

【分析】 $|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|$ 中第一列是两个数的和,用性质 3 可将其拆成两个行列式之和,再利用对换,提公因式等行列式性质作恒等变形,就有

$$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1| = |\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1| + |\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1| = b,$$

$$|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1| = |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}| = a,\text{又}|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1| = -|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|,$$

于是 $$|2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = 2(a-b).$$

【例 1.24】 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是行列式值为 2 的 3 阶矩阵,则 $D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} \\ \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right)^{-1} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} =$ _____.

【分析】 由公式(1.6),(1.9),(1.12)等,有

$$D = (-1)^{3\times 3}|-\boldsymbol{A}|\cdot\left|\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\right| = -(-1)^3|\boldsymbol{A}|\left|\frac{3}{2}\boldsymbol{B}^{-1}\right| = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3|\boldsymbol{B}^{-1}| = \frac{27}{8}.$$

评注 对于拉普拉斯展开式(1.6)要正确应用,不能错误地按 2 阶行列式来计算.例如:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = -|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

是不正确的,应当是 $(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,其中 m,n 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的阶数.

【例 1.25】 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}| = 2$,那么 $|(2\boldsymbol{A})^{-1} - \boldsymbol{A}^*| =$ _____.

【分析】 由于 $(2\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$,又 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,则

$$|(2\boldsymbol{A})^{-1} - \boldsymbol{A}^*| = \left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - 2\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \left|-\frac{3}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \left(-\frac{3}{2}\right)^3|\boldsymbol{A}^{-1}| = -\frac{27}{16}.$$

评注 ① 本题用到了行列式的关系式(1.9)及(1.12),其中式(1.9)是出错率较高的一个公式.
② 注意行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 没有运算法则,常用的方法是进行恒等变形,转化为矩阵乘积的行列式.本题是利用置换法把 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相统一.

【例 1.26】 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^* = 2\boldsymbol{BA}^* + \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}| =$ _____.

【分析】 由于 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$,又 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,则对矩阵方程右乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$3\boldsymbol{AB} - 6\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A},\text{即}\quad 3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}.$$

两端取行列式有 $|3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})|\cdot|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| = 3$,即 $27|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{B}| = 3$.

因为 $$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,\text{所以}|\boldsymbol{B}| = \frac{1}{9}.$$

评注 将行列式某一行(列)的公因子可以提到行列式符号外面这一性质(如 $|\boldsymbol{\alpha}_1,k\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = k|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$)与 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$($n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数)很容易相混淆.注意:$|3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})| \neq 3|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

【例 1.27】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$

www.TopSage.com

$+4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，如果$|\boldsymbol{A}|=1$，那么$|\boldsymbol{B}|=$_____.

大家网 TopSage.com

【分析一】 利用行列式的性质恒等变形有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3| \\ &= |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3| \quad (\text{先}3\text{列}-2\text{列},\text{再}2\text{列}-1\text{列}) \\ &= |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_3| \quad (3\text{列}-2\text{列}) \\ &= 2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3| \quad (3\text{列提公因式}2) \\ &= 2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3| \quad (2\text{列}+3\text{列的}-3\text{倍}) \\ &= 2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = 2|\boldsymbol{A}| = 2.\end{aligned}$$

【分析二】 利用矩阵的恒等变形，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

两边取行列式，并用行列式乘法公式(1.10)及范德蒙(1.13)，有

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix} = 2.$$

【例1.28】 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为1,2,2，$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵，则$|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$_____.

【分析】 由已知条件，$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值为$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$，进而$4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$的特征值为3,1,1. 于是

$$|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}| = 3\cdot1\cdot1 = 3.$$

【例1.29】 $\boldsymbol{A}$是3阶矩阵，且$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$, $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$均不可逆，则$|\boldsymbol{A}|=$_____.

【分析】 因为$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$, $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$不可逆，则有

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}| = |2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = 0.$$

由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$知$\lambda$是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，所以1, 2, $-\frac{1}{2}$是$\boldsymbol{A}$的3个特征值. 据(1.14)得

$$|\boldsymbol{A}| = 1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

【例1.30】 已知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，其中$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{bmatrix}$，则$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=$_____.

【分析】 由于$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，那么

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}.$$

所以 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}$. 从而$|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}|$.

于是
$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\3&0&-1\end{vmatrix} = -2.$$

评注 对于抽象行列式的计算，常用的思路有：

1° 用行列式的性质作恒等变形(如【例1.23】,【例1.27】).

2° 用矩阵的性质作恒等变形(如【例1.7】,【例1.24】~【例1.27】).

3° 利用特征值(1.14)及相似性质.(如果考生现在看【例1.28】~【例1.30】有困难，可在复习了特征值、特征向量之后再来解它.)

www.TopSage.com

题型四　含参数行列式的计算

【例 1.31】　已知 $\begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & -7 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix}=0$，则 $\lambda=$ _____ .

【分析】
$$\begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & -7 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & -7 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 0 & 18-\lambda & \lambda-18 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-17 & -5 & -7 \\ 2 & \lambda-10 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-18 \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-18)\begin{vmatrix} \lambda-17 & -5 \\ 2 & \lambda-10 \end{vmatrix}=(\lambda-18)(\lambda^2-27\lambda+180)$$
$$=(\lambda-12)(\lambda-15)(\lambda-18)=0,$$

所以 λ 为 12,15,18 .

评注　对这一类行列式，通常是将某行的各元加至另一行，从而出现 λ 的一次因式，提出 λ 的这个一次因式（也就求出了 λ 的一个根），再处理剩下的 2 阶行列式可求出 λ 的另外两个根.

【例 1.32】　已知 $D=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}=0$，则 $\lambda=$ _____.

【分析】　将第 3 列加至第 1 列，得
$$D=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2,$$

所以 $\lambda=1$，　$\lambda=-1$(二重根).

【例 1.33】　已知 $D=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -a \\ 3 & \lambda-a & 3 \\ -a & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=0$，则 $\lambda=$ _____.

【分析】　将第 3 行的 -1 倍加至第 1 行，有
$$D=\begin{vmatrix} \lambda+a-1 & 0 & -\lambda-a+1 \\ 3 & \lambda-a & 3 \\ -a & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+a-1 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda-a & 6 \\ -a & 2 & \lambda-a-1 \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+a-1)[(\lambda-a)^2-(\lambda-a)-12]$$
$$=(\lambda+a-1)(\lambda-a-4)(\lambda-a+3),$$

所以 $\lambda=1-a$，$\lambda=a+4$，$\lambda=a-3$，

题型五　关于 $|A|=0$ 的证明

【解题思路】　证明行列式 $|A|=0$ 常用的思路有：

1° 设法证 $|A|=-|A|$；

2° 反证法，如 $|A|\neq 0$，从 A 可逆找矛盾；

3° 构造齐次方程组 $Ax=0$，设法证明它有非零解；

4° 设法证矩阵的秩 $r(A)<n$；

5° 证明 0 是矩阵 A 的一个特征值.

www.TopSage.com

【例 1.34】 设 A 是 n 阶反对称矩阵，若 A 可逆，则 n 必是偶数.

【证明】 因为 A 是反对称矩阵，即 $A^{\mathrm{T}} = -A$，那么 $|A| = |A^{\mathrm{T}}| = |-A| = (-1)^n |A|$.

如果 n 是奇数，必有 $|A| = -|A|$，即 $|A| = 0$，与 A 可逆相矛盾，所以 n 必是偶数.

【例 1.35】 设 $A^2 = A$，$A \neq E$（单位矩阵），证明：$|A| = 0$.

【证法一】 如 $|A| \neq 0$，则 A 可逆，那么 $A = A^{-1}A^2 = A^{-1}A = E$. 与已知条件 $A \neq E$ 矛盾.

【证法二】 由 $A^2 = A$，有 $A(A-E) = 0$，从而 $A-E$ 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解. 又因 $A \neq E$，故 $Ax = 0$ 有非零解，从而 $|A| = 0$.

【证法三】 同上，由于 $A-E$ 的每一列 $\boldsymbol{\beta}_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 都是 $Ax = 0$ 的解，所以

$$\mathrm{r}(A-E) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \leqslant n - \mathrm{r}(A).$$

又因 $A \neq E$，$\mathrm{r}(A-E) > 0$，故 $\mathrm{r}(A) \leqslant n - \mathrm{r}(A-E) < n$，所以 $|A| = 0$.

【证法四】 同上，设 $\boldsymbol{\beta}_j$ 是 $A-E$ 中非零列，则 $A\boldsymbol{\beta}_j = 0 = 0\boldsymbol{\beta}_j$，则 0 是 A 的特征值，故 $|A| = 0$.

评注 这些证法有繁有简，也有各自之处，关键是思路要不同. 对于 $AB = 0$，我们应联想到 B 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解（注意：B 的列向量只是 $Ax = 0$ 的解的一部分），另一方面方阵的秩也是其列向量组的秩，因此从 $AB = 0$，又可得到 $\mathrm{r}(B) \leqslant n - \mathrm{r}(A)$，即 $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \leqslant n$. 特别地，若 $\mathrm{r}(B) = n - \mathrm{r}(A)$，则 B 的列向量可以表示 $Ax = 0$ 的某一解.

【例 1.36】 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 矩阵，若 $m > n$，证明：$|AB| = 0$.

【证法一】 对于齐次线性方程组：(Ⅰ) $ABx = 0$，(Ⅱ) $Bx = 0$，由于(Ⅱ)的解必是(Ⅰ)的解，而当 $m > n$ 时，方程组(Ⅱ)必有非零解. 因此，方程组(Ⅰ)必有非零解，所以，系数行列式 $|AB| = 0$.

【证法二】 由于 $\mathrm{r}(AB) \leqslant \mathrm{r}(B) \leqslant \min(m,n) < m$，所以，行列式 $|AB| = 0$.

评注 【证法一】用的是齐次方程组有非零解，【证法二】用的是秩. 你能说清楚【证法二】中每个不等式成立的理由吗？

【例 1.37】 已知 A 是 $2n+1$ 阶正交矩阵，即 $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = E$，证明：$|E - A^2| = 0$.

【证明】 由行列式乘法公式(1.10)，得 $|A|^2 = |A| \cdot |A^{\mathrm{T}}| = |AA^{\mathrm{T}}| = |E| = 1$.

(Ⅰ) 如 $|A| = 1$，那么

$$|E-A| = |AA^{\mathrm{T}} - A| = |A(A^{\mathrm{T}} - E^{\mathrm{T}})| = |A| \cdot |A-E| = |-(E-A)|$$
$$= (-1)^{2n+1} |E-A| = -|E-A|,$$

从而 $|E-A| = 0$.

(Ⅱ) 如 $|A| = -1$，那么可由

$$|E+A| = |AA^{\mathrm{T}} + A| = |A(A^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}})| = |A| \cdot |A+E| = -|E+A|,$$

得到 $|E+A| = 0$. 又因 $|E - A^2| = |(E-A)(E+A)| = |E-A| \cdot |E+A|$，

所以不论 $|A|$ 是 $+1$ 或 -1，总有 $|E - A^2| = 0$.

题型六 克莱姆法则

【例 1.38】 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$，

www.TopSage.com

其中 $a_i \neq a_j (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ 的解是_____.

【分析】 因为 $|\boldsymbol{A}|$ 是范德蒙行列式，由 $a_i \neq a_j$ 知

$$|\boldsymbol{A}| = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) \neq 0,$$

由克莱姆法则知方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ 有唯一解. 对于

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

易见 $D_1 = |\boldsymbol{A}|, D_2 = D_3 = \cdots = D_n = 0$.

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ 的解是 $(1, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.39】 设齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 a 满足的条件是_____.

【分析】 n 个方程 n 个未知数的齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$. 而

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 3 & 2 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(a+4)(a-1),$$

所以 $a \neq 1$ 且 $a \neq -4$.

【例 1.40】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如对任何 n 维向量 $\boldsymbol{b}$ 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 总有解，证明方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 必有唯一解.

【证明】 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，因为对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}$ 总有解，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可以表示任一个 n 维向量. 因此，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可以表示 n 维单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$. 从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 等价，所以秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = n$，即有 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 于是 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1} \neq 0$. 由克莱姆法则可知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 必有唯一解.

题型训练

一、选择题

1. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 - 5b_1 & 3b_1 \\ a_2 & 2c_2 - 5b_2 & 3b_2 \\ a_3 & 2c_3 - 5b_3 & 3b_3 \end{vmatrix} =$

(A) $30m$. (B) $-15m$. (C) $6m$. (D) $-6m$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\big||\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}\big| =$

(A) $|\boldsymbol{A}|^{n^2}$. (B) $|\boldsymbol{A}|^{n^2-n}$. (C) $|\boldsymbol{A}|^{n^2-n+1}$. (D) $|\boldsymbol{A}|^{n^2+n}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|(2\boldsymbol{A})^*| =$

(A) $2^n|\boldsymbol{A}^*|$. (B) $2^{n-1}|\boldsymbol{A}^*|$. (C) $2^{n^2-n}|\boldsymbol{A}^*|$. (D) $2^{n^2}|\boldsymbol{A}^*|$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| = a, |\boldsymbol{B}| = b$，若 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}| =$

(A) $-3ab$. (B) $3^m ab$. (C) $(-1)^{mn}3^m ab$. (D) $(-1)^{(m+1)n}3^m ab$.

www.TopSage.com

5. $x=-2$ 是 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & x^2\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=0$ 的

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件.　　(D) 既不充分也非必要条件.

6. 空间中两条直线 $l_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ 与 $l_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ 共面的充分必要条件是

(A) $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.　　(B) $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0$.

(C) $\dfrac{x_2-x_1}{m_1}=\dfrac{y_2-y_1}{n_1}=\dfrac{z_2-z_1}{p_1}$.　　(D) $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}\neq 0$.

二、填空题

1. 若 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ x & 3 & 1\\ 4 & x & 5\end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{12}=-1$,则代数余子式 $A_{21}=$ _____.

2. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}(4,5,6)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$ _____.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 8\end{bmatrix}$,则 $|-2\boldsymbol{A}^{-1}|=$ _____.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 都是4维列向量,且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=4$,$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=21$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ _____.

5. 已知 $D_n=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n\end{vmatrix}$,若 $D_n=a_nD_{n-1}+kD_{n-2}$,则 $k=$ _____.

三、证明题

1. 已知 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维列向量,且 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$,设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$,证明:$|\boldsymbol{A}|=0$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,证明存在非0的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素都是整数,证明:$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

第二章　矩阵及其运算

内容概要与重难点提示

矩阵在高等数学中是一个极重要且应用广泛的概念，它是线性代数的核心．矩阵的概念、运算及理论贯穿线性代数的始终，对矩阵的理解与掌握要扎实深入，融会贯通．矩阵是考核检查的重点内容之一．

矩阵是一个表格，要掌握其运算法则，作为表格的运算与数的运算既有联系又有差别，不要混淆．对各种特殊矩阵应掌握其定义、性质，会用定义来判断证明是哪一类矩阵，要重视对可逆矩阵、伴随矩阵的复习．读者应记住：无论 A 是否可逆，$A^*A = AA^* = |A|E$ 总成立，要会灵活运用这一公式．要掌握矩阵的初等变换，弄清何时用初等行变换？何时用初等列变换？何时既可用初等行变换又可用初等列变换？分块矩阵无论在矩阵乘法还是矩阵求逆、齐次方程组的解、向量的线性表出、线性相关及秩等方面，往往大有可为．

考核知识要点讲解

一、矩阵的概念及几类特殊方阵

（一）矩阵及相关概念

▶1. 矩阵　$m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ **矩阵**，简记为 A，或 $(a_{ij})_{m\times n}$．若 $m = n$，则称 A 是 n 阶矩阵或 n 阶**方阵**．

▶2. 零矩阵　如果矩阵 A 中所有元素都是 0，则称其为**零矩阵**，记作 $\mathbf{0}$．

▶3. 同型矩阵　矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{s\times t}$，如果 $m = s, n = t$，则称 A 与 B 是**同型矩阵**．

▶4. 矩阵相等　同型矩阵 $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}(\forall i, j)$，即对应元素都相等．

▶5. 方阵的行列式　对于 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$，其元素可构造 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**方阵 A 的行列式**，记作 $|A|$．

【注】　矩阵是由数构成的一种表格，而行列式是按一定运算法则所确定的一个数，表格与数是两个不同的概念．要理解矩阵的概念，注意矩阵与行列式的联系与区别，两者不要混淆．当 $A \neq B$ 时，$|A|$ 与 $|B|$ 可能相等也可能不相等，由 $A \neq B$ 得不到 $|A| \neq |B|$．

www.TopSage.com

（二）几类特殊方阵

▶**1. 单位矩阵**　主对角线上元素全是1，其余元素均为0的 n 阶方阵，称为 n 阶**单位矩阵**，记为 E（若需强调其阶数时，记为 E_n）.

【注】　单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1在数的乘法中的作用：$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$，$A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}$（或简写为 $EA = AE = A$）. 对于 n 阶方阵 A，规定 $A^0 = E$.

▶**2. 对称矩阵**　设 A 是 n 阶矩阵，如 $A^{\mathrm{T}} = A$，即 $a_{ij} = a_{ji}$　$(\forall i, j)$，则称 A 是**对称矩阵**.

▶**3. 反对称矩阵**　设 A 是 n 阶矩阵，如 $A^{\mathrm{T}} = -A$，即 $a_{ij} = -a_{ji}(\forall i, j)$，则称 A 是**反对称矩阵**（注：$a_{ii} \equiv 0$）.

【注】　若 A, B 是同阶的（反）对称矩阵，则 $A + B, A - B, \lambda A$ 也是（反）对称矩阵，但 AB 不一定是（反）对称矩阵.

▶**4. 对角矩阵**　设 A 是 n 阶矩阵，如 $a_{ij} \equiv 0(\forall i \neq j)$，则称其为**对角矩阵**，对角矩阵记为 Λ .

【注】　同阶的对角矩阵的和、差、积仍是对角矩阵.

▶**5. 逆矩阵**　设 A 是 n 阶矩阵，如存在 n 阶矩阵 B，使 $AB = BA = E$，则称 A 是**可逆矩阵**，B 是 A 的**逆矩阵**，A 的逆矩阵唯一，记为 A^{-1}.

▶**6. 正交矩阵**　设 A 是 n 阶矩阵，如 $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = E$，则称 A 是**正交矩阵**（注：A 是正交矩阵等价于 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$）.

▶**7. 伴随矩阵**　设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，则由行列式 $|A|$ 的各元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的 n 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为 A 的**伴随矩阵**，记为 A^*.

【例2.1】　设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

评注　2阶矩阵的伴随矩阵具有"主对角线互换，副对角线变号"的规律，因此，对2阶矩阵求其逆矩阵与伴随矩阵简明，例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

但分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 不能套用.

对于3阶矩阵用伴随矩阵求逆是可以的且要掌握，但计算代数余子式时不要忘记正负号，特别 A^* 时，第 i 行的代数余子式应当是 A^* 的第 i 列.

当矩阵的阶数较高时，由于代数余子式的计算工作量太大，再用伴随矩阵求逆就不合适了，应当掌握初等变换求逆法.

【例2.2】　设 A 是3阶正交矩阵，按定义

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

用矩阵乘法，易见

www.TopSage.com

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1,$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0.$$

这说明矩阵 A 的每个列向量都是单位向量且互相正交(在求正交矩阵的问题中,读者应该用这两条性质进行验算).

类似地,$AA^T = E$,可知 A 的行向量都是单位向量且互相正交.显然

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

都不是正交矩阵,但这也正是一些考生在特征值、二次型问题中,求正交矩阵时常犯的典型错误.前一个矩阵是忘了单位化,后一个矩阵是对特征值有重根的特征向量没有 Schmidt 正交化,而中间一个是求错了特征向量,往届考生的这种种错误,要引以为戒.

二、矩阵的运算

(一) 矩阵的线性运算

▶1. 矩阵的加法 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵,则 $m \times n$ 矩阵

$$C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

称为矩阵 A 与 B 的**和**,记为 $A + B = C$.

▶2. 矩阵的数乘 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵,k 是一个常数,则 $m \times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 A 的**数乘**,记为 kA.

▶3. 矩阵的乘法 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵,$B = (b_{ij})$ 是 $n \times s$ 矩阵,那么 $m \times s$ 矩阵 $C = (c_{ij})$,其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$,称为 A 与 B 的**乘积**,记为 $C = AB$.

矩阵的运算,包括转置、加法、数乘和乘法.矩阵的加法和数乘称为矩阵的线性运算.只有同型矩阵才能进行矩阵的加减运算.矩阵的乘法要求前面矩阵的列数和后面矩阵的行数相等,矩阵的乘法具有结合律而没有交换律,矩阵乘法对加法适合左、右分配律,矩阵乘法出现了零因子,消去律不成立,只有方阵才有矩阵幂的运算,同阶方阵乘积的行列式等于各方阵因子行列式的乘积.

由于矩阵的运算也就是表格的运算,所以矩阵运算的规律与数的运算法则不尽相同,要防止错用法则出现的差错.关于矩阵的运算,应注意以下问题:

(1) 矩阵的乘法一般没有交换律,即 $AB \neq BA$,因此对乘法要特别注意运算次序;进而一些关于数的代数恒等式或命题,矩阵就不一定成立.例如,设 A, B, C 均为 n 阶方阵,则

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, \quad (AB)^2 = (AB)(AB) \neq A^2B^2,$$
$$(AB)^k \neq A^kB^k (k \text{ 为自然数}), \quad (A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2.$$

上述关系式当且仅当 A 与 B 可交换,即 $AB = BA$ 时,它们才成立.

(2) $AB = 0, B \neq 0 \not\Rightarrow A = 0$.特别地,$A^2 = A \not\Rightarrow A = E$ 或 $A = 0$.对于 $AB = 0$,应联想到:

1° B 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解;若 $B \neq 0$,则齐次方程组有非零解;

2° $r(A) + r(B) \leqslant n$.

【注】 矩阵乘法不具有消去律,对于 $AB = 0 (A \neq 0)$,以下两种情况消去律成立:

① 若 $AB = 0$,且矩阵 A 可逆,则 $B = 0$;

② 若 $AB = 0$,且 $r(A) = A$ 的列数,则 $B = 0$.

(3) $AB = AC, A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$.若 A 是 $m \times n$ 矩阵,秩 $r(A) = n$,命题才成立.

www.TopSage.com

（二）关于逆矩阵的运算规律

$(1)(A^{-1})^{-1}=A$；　$(2)(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$（$k$为非零常数）；

$(3)(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，　推广：$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}A_{s-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$；　(2.1)

$(4)(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$；　$(5)|A^{-1}|=|A|^{-1}$.　$(6)(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$.

（三）关于矩阵转置的运算规律

$(1)(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；　$(2)(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$（$k$为任意实数）；

$(3)(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$；　$(4)(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$.　(2.2)

【注】　由以上可知，转置的运算规律与逆矩阵的运算规律从形式上来看有许多相似之处，只是对于加法，转置有$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$，而可逆$(A+B)^{-1}$没有类似的规律．当$A,B$均可逆时，$A+B$不一定可逆，即使$A+B$可逆，一般$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$．关于$(A+B)^{-1}$的处理往往先恒等变形为乘积．

（四）关于伴随矩阵的运算规律

$(1)A^*A=AA^*=|A|E$；　(2.3)

$(2)|A^*|=|A|^{n-1}$；（$n\geqslant 2$）　(2.4)

$(3)(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；　(2.5)

$(4)(kA)^*=k^{n-1}A^*$；　$(A^*)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^*$；　(2.6)

$$(5)\mathrm{r}(A^*)=\begin{cases}n, & \text{若 } \mathrm{r}(A)=n,\\ 1, & \text{若 } \mathrm{r}(A)=n-1,\\ 0, & \text{若 } \mathrm{r}(A)<n-1;\end{cases}\qquad (2.7)$$

(6) 若A可逆，则$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$，　$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$，　$A^*=|A|A^{-1}$.　(2.8)

【注】　伴随矩阵A^*由$|A|$的代数余子式所构成，基本关系式为$AA^*=A^*A=|A|E$．求逆、转置、伴随三个运算能交换次序．

（五）关于分块矩阵的运算法则

$$(1)\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+B_1 & A_2+B_2\\ A_3+B_3 & A_4+B_4\end{bmatrix};$$

$$(2)\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AX+BZ & AY+BW\\ CX+DZ & CY+DW\end{bmatrix};$$

$$(3)\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}}\\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}}\end{bmatrix};$$

$$(4)\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{bmatrix};$$

$$(5)\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ O & C^{-1}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix};$$

www.TopSage.com

(6) 如果 $AB = C$,其中 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是 $n \times s$ 矩阵,那么对矩阵 B,C 按行分块有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_m \end{bmatrix},$$

即
$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{12}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\delta}_1, \\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\delta}_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\delta}_m. \end{cases}$$

可见矩阵 AB 的行向量 $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_m$ 可由 B 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出.

类似地,对矩阵 A,C 按列分块,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s),$$

即
$$\begin{cases} b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\gamma}_1, \\ b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\gamma}_2, \\ \cdots\cdots \\ b_{1s}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{2s}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{ns}\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\gamma}_s. \end{cases}$$

说明矩阵 AB 的列向量 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s$ 可由 A 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

例如,设 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$,$A = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$,则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}) \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}B, \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}C) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x}_2.$$

三、矩阵可逆的充分必要条件

n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B,有 $AB = BA = E$

$\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A) = n$

$\Leftrightarrow$ $A = P_1P_2\cdots P_s$,其中 P_i 是初等矩阵

$\Leftrightarrow$ A 的列(行)向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{b}$,非齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 总有唯一解

$\Leftrightarrow$ A 的特征值全不为 0.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

四、矩阵的初等变换与初等矩阵

(一) 矩阵的初等变换及相关概念

▶1. 矩阵的初等变换

下述三种对矩阵的行(列)施行的变换称为矩阵的初等行(列)变换:

(1) 对调矩阵的两行(列);

(2) 用非零常数 k 乘以某行(列)中所有元素;

(3) 把矩阵某行(列)所有元素的 k 倍加至另一行(列)对应的元素上去.

【注】 不要把矩阵的初等变换与矩阵的运算相混,也不要与行列式的性质、运算相混.要掌握矩阵的初等变换,应能熟练地用来求秩(行、列变换可混用),求逆矩阵(只用行或只用列变换),求线性方程组的解(只能用行变换).

▶2. 行阶梯形矩阵与行最简形矩阵

(1) 具体如下特征的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

① 零行(即元素全为零的行)全都位于非零行的下方;

② 各非零行左起第一个非零元素的列指标由上至下是严格增大的.

(2) 一个行阶梯形矩阵称为**行最简形矩阵**,如果其非零行的第一个非零元素为1,并且这些非零元素所在列的其他元素均为0.

【注】 对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$,总可以经过有限次初等行变换把它化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

(二) 初等矩阵的概念

单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵称为**初等矩阵**.例如

$$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}(-5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-5&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}(3)=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

都是初等矩阵.

其中,$\boldsymbol{E}_{12}$ 是将 $\boldsymbol{E}$ 的第1,2两行互换(或第1,2两列互换)所得的矩阵;$\boldsymbol{E}_3(-2)$ 是将 $\boldsymbol{E}$ 的第3行乘以 -2(或第3列乘以 -2)所得的矩阵;$\boldsymbol{E}_{12}(-5)$ 是将 $\boldsymbol{E}$ 的第1行的 -5 倍加至第2行(或第2列的 -5 倍加至第1列)所得的矩阵.

(三) 初等矩阵的性质

▶1. 用初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左(右)乘 $\boldsymbol{A}$,所得 $\boldsymbol{PA}$($\boldsymbol{AP}$)就是对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作了一次与 $\boldsymbol{P}$ 同样的行(列)初等变换.

▶2. 初等矩阵均可逆,且其逆是同类型的初等矩阵.例如

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

即 $\quad \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij},\quad \boldsymbol{E}_i^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right),\quad \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k).$

五、矩阵的等价

(一) 矩阵等价的概念

矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B,则称矩阵 A 与 B **等价**,记作 $A \cong B$. 若 $A \cong \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,则称后者是 A 的**等价标准形**,其中 E_r 是 r 阶单位矩阵,r 是矩阵 A 的秩.

(二) 矩阵等价的充分必要条件

$A \cong B \Leftrightarrow A, B$ 是同型矩阵且有相同的秩

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P 和 Q,使 $PAQ = B$.

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,则存在 m 阶可逆矩阵 P,n 阶可逆矩阵 Q,使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

【注】 矩阵的等价与向量组的等价是两个不同的概念. 若矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \text{ 与 } B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

等价,则 $PAQ = B$,$r(A) = r(B)$,于是 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$. 而向量组等价是指这两个向量组可以互相线性表出. 当矩阵 A 与 B 等价时虽有这两个向量组的秩相等,但作为向量组不一定能互相表出,因而不一定等价. 例如: 向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 与向量组 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的秩相等,但不等价. 而矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = B$$

等价. 反之,若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价,则向量组秩 $r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ = 向量组秩 $r(\beta_1, \cdots, \beta_n)$,从而 $r(A) = r(B)$,故必有矩阵 $A \cong B$.

常 考题型及其解题方法与技巧

题型一 有关矩阵的概念及运算

【例 2.3】 设 A, B 均是 n 阶对称矩阵,则 AB 是对称矩阵的充要条件是_____.

【分析】 两个对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵. 例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

而 AB 对称 $\Leftrightarrow (AB)^{\mathrm{T}} = AB \Leftrightarrow AB = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA$. 所以应填:$AB = BA$.

【例 2.4】 已知 A 是 n 阶对称矩阵,B 是 n 阶反对称矩阵,证明 $A - B^2$ 是对称矩阵.

【证明】 因为 $A - B^2 = A - BB = A + B^{\mathrm{T}}B$,则有

www.TopSage.com

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2.$$

所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2$ 是对称矩阵.

【例 2.5】 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维列向量，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置矩阵，如果

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&6&-3\\2&4&-2\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=$ _____.

【分析】 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(b_1,b_2,b_3)=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}.$$

而

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 正是矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的主对角线元素之和，所以 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1+6+(-2)=5$.

评注 注意 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 不是一回事，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$）是 n 阶矩阵，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$（或 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$）是 1 阶矩阵，即为一个数，而且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的主对角线元素之和，也应当会用观察法看出本题中可以有 $\boldsymbol{\alpha}=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

【例 2.6】 证明上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵.

【证法一】 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 n 阶上三角矩阵. 对 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，按矩阵乘法定义，有

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{i\,i-1}b_{i-1\,j}+a_{ii}b_{ij}+a_{i\,i+1}b_{i+1\,j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵，则 $a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{i\,i-1}=0$.

因为 $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵，当 $i>j$ 时，有 $b_{ij}=b_{i+1\,j}=\cdots=b_{nj}=0$.

因此，当 $i>j$ 时，c_{ij} 中的每一项都为 0，从而 $c_{ij}=0$. 即 $\boldsymbol{AB}$ 是上三角矩阵.

【证法二】（对 n 的阶数用数学归纳法）

当 $n=1$ 时命题显然成立，假设当 $n=n-1$ 时命题也成立，对于 n，把矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}_1\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$ 是 $n-1$ 阶上三角矩阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $1\times(n-1)$ 矩阵，$\boldsymbol{0}$ 是 $(n-1)\times 1$ 零矩阵. 由于

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a_{11}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\end{bmatrix},$$

按归纳法假设 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ 是 $n-1$ 阶上三角矩阵，从而 $\boldsymbol{AB}$ 是上三角矩阵.

【例 2.7】 某企业对其职工进行分批脱产技术培训，每年从在岗人员中抽调 30% 的人参加培训，而参加培训的职工中有 60% 的人结业回岗，假设现有在岗职工 800 人，参加培训人员是 200 人，试问两年后在岗与脱产培训职工各有多少人（假设职工人数不变）？

【解】 用 x_i,y_i 分别表示 i 年后在岗与脱产职工的人数，x_0,y_0 为目前在岗与脱产的人数，则

$$\begin{cases}x_i=0.7x_{i-1}+0.6y_{i-1},\\y_i=0.3x_{i-1}+0.4y_{i-1}.\end{cases}$$ 用矩阵表示，有 $\begin{bmatrix}x_i\\y_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7&0.6\\0.3&0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{i-1}\\y_{i-1}\end{bmatrix}$.

因此

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7&0.6\\0.3&0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7&0.6\\0.3&0.4\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.67&0.66\\0.33&0.34\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800\\200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}668\\332\end{bmatrix}.$$

所以，两年后在岗职工 668 人，培训人员 332 人.

www.TopSage.com

题型二　求方阵的幂

【解题思路】　对某些特殊的 n 阶矩阵可以求其方幂. 求 $\boldsymbol{A}^n$ 的基本思路:

思路一: 若 $r(\boldsymbol{A})=1$,则 $\boldsymbol{A}$ 能分解为一列与一行两个矩阵的乘积,用结合律就可很方便地求出 $\boldsymbol{A}^n$;

思路二: 若 $\boldsymbol{A}$ 能分解成两个矩阵的和 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$,则 $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^n$ 可用二项式定理展开,当然 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 之中有一个的方幂要尽快为 $\boldsymbol{0}$;

思路三: 当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量时,可用相似对角化来求 $\boldsymbol{A}^n$(详见第五章);

思路四: 通过试算 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3$,如有某种规律可用数学归纳法.

【例 2.8】　设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}^3=$ _____.

【分析】　由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\3&\frac{3}{2}&0\end{bmatrix}$,又 $\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=2$,所以

$$\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&2&0\\8&4&0\\12&6&0\end{bmatrix}.$$

评注　注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是矩阵,而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数,这两个符号不要混淆.

【例 2.9】　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}$,　证明 $\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$,并求 l.

【证明】　因为 $\boldsymbol{A}$ 中任两行、任两列都成比例,故可把 $\boldsymbol{A}$ 分解成两个矩阵相乘,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(b_1,b_2,b_3),$$

那么,由矩阵乘法的结合律,有

$$\boldsymbol{A}^2=\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right)\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right)=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\left((b_1,b_2,b_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\right)(b_1,b_2,b_3).$$

由于 $(b_1,b_2,b_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 是 1×1 矩阵,是一个数,记为 l,则有 $\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$.

评注　由于当秩 $r(\boldsymbol{A})=1$ 时,有 $\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$,其中 $l=\sum a_{ii}$,进而有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-1}\cdot\boldsymbol{A}=l\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=l^2\boldsymbol{A}$,归纳可知 $\boldsymbol{A}^n=l^{n-1}\boldsymbol{A}$,这是一种求 $\boldsymbol{A}^n$ 的方法.

【例 2.10】　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$,　则 $\boldsymbol{A}^n=$ _____.

www.TopSage.com

【分析一】 由于 $A=\lambda E+J$,其中 $J=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,而

$$J^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad J^3=J^2J=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

进而知 $J^4=J^5=\cdots=0$.

于是 $A^n=(\lambda E+J)^n=\lambda^nE+C_n^1\lambda^{n-1}J+C_n^2\lambda^{n-2}J^2$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n&0&0\\0&\lambda^n&0\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&C_n^1\lambda^{n-1}&0\\0&0&C_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&C_n^2\lambda^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^n&C_n^1\lambda^{n-1}&C_n^2\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&C_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}.$$

【分析二】(数学归纳法)

由 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$,得 $A^2=\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^3\end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{bmatrix}$.

设 $A^m=\begin{bmatrix}\lambda^m&C_m^1\lambda^{m-1}&C_m^2\lambda^{m-2}\\0&\lambda^m&C_m^1\lambda^{m-1}\\0&0&\lambda^m\end{bmatrix}$,那么由

$$A^{m+1}=A^mA=\begin{bmatrix}\lambda^m&C_m^1\lambda^{m-1}&C_m^2\lambda^{m-2}\\0&\lambda^m&C_m^1\lambda^{m-1}\\0&0&\lambda^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{m+1}&C_{m+1}^1\lambda^m&C_{m+1}^2\lambda^{m-1}\\0&\lambda^{m+1}&C_{m+1}^1\lambda^m\\0&0&\lambda^{m+1}\end{bmatrix},$$

归纳可知 A^n,下略. 其中,$C_m^1+C_m^2=C_{m+1}^2$.

【例 2.11】 已知 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0&0\\0&3&1&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&-9&3\end{bmatrix}$, 则 $A^n=$_____.

【分析】 对 A 分块为 $\begin{bmatrix}B&0\\0&C\end{bmatrix}$,则 $A^n=\begin{bmatrix}B^n&0\\0&C^n\end{bmatrix}$,其中 $B=\begin{bmatrix}3&1&\\&3&1\\&&3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3&-1\\-9&3\end{bmatrix}$,

则 $B=3E+J$,由于 $J^3=J^4=\cdots=0$,于是

$$B^n=(3E+J)^n=3^nE+C_n^1 3^{n-1}J+C_n^2 3^{n-2}J^2.$$

而 $C=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}(3,-1)$, $C^2=6C$, $\cdots$, $C^n=6^{n-1}C$,

所以 $$A^n=\begin{bmatrix}3^n&C_n^1\cdot3^{n-1}&C_n^2\cdot3^{n-2}&0&0\\0&3^n&C_n^1\cdot3^{n-1}&0&0\\0&0&3^n&0&0\\0&0&0&3\cdot6^{n-1}&-6^{n-1}\\0&0&0&-9\cdot6^{n-1}&3\cdot6^{n-1}\end{bmatrix}.$$

【例 2.12】 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,则 $A^{2013}-2A^{2012}=$_____.

www.TopSage.com

【分析一】 由于 $A^{2013}-2A^{2012}=(A-2E)A^{2012}$，而 $A-2E=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$，

试乘易见 $(A-2E)A=\mathbf{0}$，从而 $A^{2013}-2A^{2012}=\mathbf{0}$.

【分析二】 由于

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}=2A,$$

易见 $A^3=2A^2, A^4=2A^3, \cdots, A^n=2A^{n-1}$，亦可知 $A^{2013}-2A^{2012}=\mathbf{0}$.

【例 2.13】 已知 $PA=BP$，其中 $P=\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，则 $A^{2012}=$ _____.

【分析】 因为矩阵 P 可逆，由 $PA=BP$ 得 $A=P^{-1}BP$. 那么

$$A^2=(P^{-1}BP)(P^{-1}BP)=P^{-1}B(PP^{-1})BP=P^{-1}B^2P.$$

归纳地 $A^{2012}=P^{-1}B^{2012}P$.

因为 $\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_1^n&0&0\\0&a_2^n&0\\0&0&a_3^n\end{bmatrix}$，易见 $B^{2012}=E$.

所以 $A^{2012}=P^{-1}EP=E$.

评注 如果 $A\sim B$，即 $P^{-1}AP=B$，则有 $A=PBP^{-1}$. 那么

$$A^2=(PBP^{-1})(PBP^{-1})=PB^2P^{-1}.$$

归纳地 $A^n=PB^nP^{-1}$. 因此为求 A^n 可间接地由 B^n 来实现.

【例 2.14】 已知 $2CA-2AB=C-B$，其中 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $C^3=$ _____.

【分析】 由 $2CA-2AB=C-B$ 得 $2CA-C=2AB-B$. 故有 $C(2A-E)=(2A-E)B$.

因为 $2A-E=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 可逆，所以

$$C=(2A-E)B(2A-E)^{-1}.$$

那么 $C^3=(2A-E)B^3(2A-E)^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}27&18&9\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-18&27&-9\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

www.TopSage.com

评注　本题求 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ 时，可用分块求逆公式 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$.

因为 $r(B) = 1$，所以 $B^3 = 3^2 B$.

【例 2.15】 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$，则 $A^n =$ _____.

【分析】 先求 A 的特征值与特征向量. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 9 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda \overset{令}{=\!=} 0 \Rightarrow \lambda = 0, \quad \lambda = 6.$$

对 $\lambda = 0$，由 $(0E - A)x = 0$，解出 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$；对 $\lambda = 6$，由 $(6E - A)x = 0$，解出 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

令 $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，则 $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. 而 $A = P\Lambda P^{-1}$，于是

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \\ & 6^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 6^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 6^{n-1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

评注　对于特征值、特征向量不改变的缘故，在复习第五章后为宜本题，实质，这就是【例 2.11】中的矩阵 C. 显然，对于秩是 1 的矩阵来方幂时，用相似对角化的方法是不管用的.

题型三　求与已知矩阵可交换的矩阵

【解题思路】 求与已知矩阵可交换的矩阵的基本思路是：按定义，设未知数，列齐次方程组，求通解.

【例 2.16】 下列命题中不正确的是

(A) 如 A 是 n 阶矩阵，则 $(A - E)(A + E) = (A + E)(A - E)$.

(B) 如 A, B 均是 $n \times 1$ 矩阵，则 $A^{\mathrm{T}}B = B^{\mathrm{T}}A$.

(C) 如 A, B 均是 n 阶矩阵，且 $AB = 0$，则 $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

(D) 如 A 是 n 阶矩阵，则 $A^m A^k = A^k A^m$.

【分析】 (A) 中，由乘法有分配律，两个乘积均是 $A^2 - E$，而 (D) 是因乘法有结合律，两乘积都是 A^{m+k}，故 (A)，(D) 都正确.

关于 (B)，由于 $A^{\mathrm{T}}B, B^{\mathrm{T}}A$ 都是 1×1 矩阵，而 1 阶矩阵的转置仍是其自身，故 $A^{\mathrm{T}}B = (A^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A$ 亦正确.

唯 (C) 中，从 $AB = 0$ 还不能保证必有 $BA = 0$，例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，则 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，而 $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$，因此，(C) 不正确. 选 (C).

【例 2.17】 已知 A, B 及 A, C 都可交换，证明 A, B, C 是同阶矩阵，且 A 与 BC 可交换.

【证明】 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，由 AB 可乘，故可设 B 是 $n \times s$ 矩阵. 又因 BA 可乘，所以 $m = s$. 那么 AB 是 m 阶矩阵，BA 是 n 阶矩阵. 从 A 和 B 可交换，即 $AB = BA$，得 $m = n$，即 A, B 是同阶矩阵，同理，C 与 A, B 也同阶，由结合律，有 $A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A$,

www.TopSage.com

所以,A 与 BC 可交换.

【例 2.18】 求与 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ 可交换的矩阵.

【解】 设 $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$ 与 A 可交换,即 $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$,则有

$$\begin{bmatrix}x_1+x_2 & 2x_1-x_2\\ x_3+x_4 & 2x_3-x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_3 & x_2+2x_4\\ x_1-x_3 & x_2-x_4\end{bmatrix},\quad \text{即}\begin{cases}x_2-2x_3=0,\\ 2x_1-2x_2-2x_4=0,\\ x_1-2x_3-x_4=0.\end{cases}$$

高斯消元,解出 $x_1=2t+u$, $x_2=2t$, $x_3=t$, $x_4=u$. 所以 $\begin{bmatrix}2t+u & 2t\\ t & u\end{bmatrix}$ 为所求.

【例 2.19】 已知 $\Lambda=\begin{bmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{bmatrix}$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不等. 证明与 Λ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

【证明】 设 A 与 Λ 可交换,并对 A 分别按列(行)分块,记为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix},$$

则
$$A\Lambda=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{bmatrix}=(a_1\boldsymbol{\alpha}_1,\ a_2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ a_n\boldsymbol{\alpha}_n),$$

$$\Lambda A=\begin{bmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\boldsymbol{\beta}_1\\ a_2\boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ a_n\boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix}.$$

因为 $A\Lambda=\Lambda A$,即
$$\begin{bmatrix}a_1a_{11} & a_2a_{12} & \cdots & a_na_{1n}\\ a_1a_{21} & a_2a_{22} & \cdots & a_na_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1a_{n1} & a_2a_{n2} & \cdots & a_na_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1a_{11} & a_1a_{12} & \cdots & a_1a_{1n}\\ a_2a_{21} & a_2a_{22} & \cdots & a_2a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_{n1} & a_na_{n2} & \cdots & a_na_{nn}\end{bmatrix},$$

那么 $a_ja_{ij}=a_ia_{ij}$,又因 $a_i\neq a_j$,可见 $a_{ij}\equiv 0\ (\forall i\neq j)$,即 A 是对角矩阵.

注 从以上证明可以看出,对于矩阵乘法 AB,当有一个矩阵的零元素很多时就可考虑分块矩阵的技巧:假若矩阵 A 很简单,则对 B 按行分块;如果矩阵 B 简单,就可对 A 按列分块. 如

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3\\ -\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 18 & 21\\ -7 & -8 & -9\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 6 & 3\\ 7 & 9 & 6\end{bmatrix}.$$

www.TopSage.com

题型四　有关初等变换的问题

【例 2.20】 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2011}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2012}=$_____.

【分析】 $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$是初等矩阵，左乘 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$所得 $\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换(1,2 两行对换)，而 $\boldsymbol{E}_{12}{}^{2011}\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 作了奇数次的 1,2 两行对换，相当于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作了一次 1,2 两行对换，故

$$\boldsymbol{E}_{12}{}^{2011}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}.$$

而右乘 $\boldsymbol{E}_{13}$ 是作 1,3 两列对换，由于是偶数次对换，因而结果不变，即 $\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}$为所求.

评注　本题考查初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的左乘右乘问题，注意，$\boldsymbol{PA}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 作行变换，$\boldsymbol{AP}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 作列变换.

【例 2.21】　已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列与第 3 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -2 倍加至第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{PA}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

(A) $\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

【分析】　对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等列变换相当于用同类的初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$，故

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

于是 $$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}.$$

所以 $$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

应选(B).

评注　对初等矩阵，一要知道左乘、右乘，二要熟悉初等矩阵逆矩阵的三个公式：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【例 2.22】　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,$

$\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

【分析】 对矩阵 $\boldsymbol{P}$ 作一次初等列变换：把第 2 列加至第 1 列，便可得到矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

若记 $\boldsymbol{E}_{12}(1)=\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\&&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1)$. 那么

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1)]=\boldsymbol{E}_{12}^{\mathrm{T}}(1)(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{E}_{12}(1)$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

所以应选(A).

【例 2.23】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

【解】 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行(列)}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

即有 $$\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

那么 $$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$ 为所求.

评注 因为把 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$ 的方法不唯一，故 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 也不唯一.

题型五 关于伴随矩阵的命题

【例 2.24】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^*$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的伴随矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=$ _____.

【分析】 因为 $\boldsymbol{A}^{-1}\cdot(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}$，有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$.

本题 $|\boldsymbol{A}|=6$，所以 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

【例 2.25】 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq 0,\pm 1$，则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$

(A) $k\boldsymbol{A}^*$. (B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$. (C) $k^n\boldsymbol{A}^*$. (D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

【分析一】 由于 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})$，故行列式 $|k\boldsymbol{A}|$ 的代数余子式按定义为

www.TopSage.com

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1\,j-1} & ka_{1\,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-11} & \cdots & ka_{i-1\,j-1} & ka_{i-1\,j+1} & \cdots & ka_{i-1n} \\ ka_{i+11} & \cdots & ka_{i+1\,j-1} & ka_{i+1\,j+1} & \cdots & ka_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n\,j-1} & ka_{n\,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}k^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k^{n-1}A_{ij}.$$

再根据伴随矩阵的定义知应选(B).

【分析二】 由于对任一 n 阶矩阵均要成立,那么对于可逆矩阵亦应当满足,现在设 A 可逆,由伴随矩阵的基本关系式 $AA^* = A^*A = |A|E$,得到 $(kA)(kA)^* = |kA|E$.

那么 $(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A| \cdot \frac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$. 亦知应选(B).

【例 2.26】 设 A,B 是 n 阶矩阵,则 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$.

【分析】 由于 $CC^* = |C|E = |A||B|E$,因此

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|AA^* & 0 \\ 0 & |A|BB^* \end{bmatrix} = |A||B|E.$$

应选(D). 另外,作为选择题不妨附加条件 A,B 可逆,那么

$$C^* = |C|C^{-1} = |A||B|\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}.$$

【例 2.27】 设 A 为 n 阶可逆矩阵,证明:$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

【证明】 用伴随矩阵 A^* 替换关系式 $AA^* = |A|E$ 中的矩阵 A,得到

$$A^*(A^*)^* = |A^*|E.$$

由于 $|A^*| = |A|^{n-1}$,从 A 可逆知 A^* 可逆. 又因 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$,于是得到

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \cdot \frac{A}{|A|} = |A|^{n-2}A.$$

【例 2.28】 设 A 是 n 阶正交矩阵,证明 A^* 也是正交矩阵.

【证明】 由 $AA^{\mathrm{T}} = E$,从行列式乘法公式知 $|A|^2 = |A| \cdot |A^{\mathrm{T}}| = 1$. 又因 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$,于是 $A^* = |A|A^{-1} = |A|A^{\mathrm{T}}$,那么 $A^*(A^*)^{\mathrm{T}} = |A|A^{\mathrm{T}} \cdot |A|A = |A|^2A^{\mathrm{T}}A = E$.

类似地 $(A^*)^{\mathrm{T}}A^* = E$. 所以,$A^*$ 是正交矩阵.

评注 若要证明 A 是某种特殊方阵,常用方法是用定义.

【例 2.29】 已知 A 是 3 阶非零矩阵,且 $a_{ij} = A_{ij}(\forall_{i,j} = 1,2,3)$,证明 A 可逆,并求 $|A|$.

【证明】 因为 A 是非零矩阵,不妨设 $a_{11} \neq 0$,那么按第一行展开,并将 $a_{ij} = A_{ij}$ 代入,即有

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 > 0,$$

所以,A 可逆.

www.TopSage.com

由于 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}=(A^*)^{\mathrm{T}}$,

即 $A^{\mathrm{T}}=A^*$,那么对 $AA^*=|A|E$ 两边取行列式,有

$$|A|^2=|A|\cdot|A^{\mathrm{T}}|=||A|E|=|A|^3,$$

得 $|A|^2(|A|-1)=0$. 从而 $|A|=1$.

评注 伴随矩阵的概念、性质及其应用一直是考研热点之一,参考概念与讲解三(四)中关于归纳整理,复习时应当掌握其规定、矩阵方程、解方程组、特征值等方面都会有涉及.

【例 2.30】 已知 n 阶行列式 $|A|=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$,则 $|A|$ 的第 k 行代数余子式的和

$A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}=$ _____.

【分析】 若依次求每个代数余子式再求和,这很麻烦. 我们知道,代数余子式与伴随矩阵 A^* 有密切的联系,而 A^* 与 A^{-1} 又密不可分. 对于 A 用分块技巧,很容易求出 A^{-1}. 由于

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \text{其中 } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=(n).$$

于是 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&\frac{1}{n}\\1&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{2}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{n-1}&0\end{bmatrix}\text{及}\quad |A|=(-1)^{n-1}n!.$$

又因 $A^*=|A|A^{-1}$,那么

$$\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{k1}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&\cdots&A_{k2}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&\cdots&A_{kn}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=(-1)^{n-1}n!\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&\frac{1}{n}\\1&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{2}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{n-1}&0\end{bmatrix}.$$

可见 $$A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}=\frac{(-1)^{n-1}n!}{k}.$$

评注 遇到题设或欲求点涉及代数余子式的[类 1.6],并用[法 1.6]-Ⅱ的方法通过计算 n 阶行列式来求解本题.

www.TopSage.com

题型六　矩阵可逆的计算与证明

【解题思路】　矩阵求逆的基本方法有：

方法 1° 定义法，找出 B 使 $AB=E$ 或 $BA=E$；　(2.9)

方法 2° 伴随矩阵法，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$；　(2.10)

方法 3° 初等变换法　$(A:E)\xrightarrow{\text{只用行变换}}\cdots\rightarrow(E:A^{-1})$；　(2.11)

方法 4° 分块矩阵法

$$\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}.\tag{2.12}$$

【例 2.31】　填空题：

（Ⅰ）已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\\ n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$，则 $(A^{*})^{-1}=$ _____.

（Ⅱ）已知 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$ _____.

（Ⅲ）设 A,B 均为三阶矩阵，E 是三阶单位矩阵，已知 $AB=A-2B$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $(A+2E)^{-1}=$ _____.

（Ⅳ）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 7\end{bmatrix}$，$B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$ _____.

（Ⅴ）如 $A^{3}=0$，则 $(E+A+A^{2})^{-1}=$ _____.

【答案】　（Ⅰ）　$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}A$；　（Ⅱ）　$5\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$；　（Ⅲ）　$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$；

（Ⅳ）　$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 4\end{bmatrix}$；　（Ⅴ）　$E-A$.

【分析】　（Ⅰ）由 $AA^{*}=|A|E$，有 $\frac{A}{|A|}A^{*}=E$，故 $(A^{*})^{-1}=\frac{A}{|A|}$.

www.TopSage.com

(Ⅱ)$A=\frac{1}{5}B$,故$A^{-1}=\left(\frac{1}{5}B\right)^{-1}=5B^{-1}$,求$B^{-1}$可用公式(2.12)$\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}^{-1}$.

(Ⅲ)由$AB=A-2B$有 $AB+2B=A+2E-2E$,得知

$$(A+2E)(E-B)=2E,\text{即}(A+2E)\cdot\frac{1}{2}(E-B)=E.\text{故}(A+2E)^{-1}=\frac{1}{2}(E-B).$$

(Ⅳ)由于$B+E=(E+A)^{-1}(E-A)+E=(E+A)^{-1}(E-A)+(E+A)^{-1}(E+A)$

$$=(E+A)^{-1}[(E-A)+(E+A)]=2(E+A)^{-1},$$

故 $(B+E)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)$.

评注 $(A+B)^{-1}$没有运算法则,要会用单位矩阵恒等变形的技巧.例如,本题题设$B=(E+A)^{-1}(E-A)$,表示就相对$E+B$中的E变形为$E=(E+A)^{-1}(E+A)$.

(Ⅴ)注意$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$.

【例2.32】 设A,B,C是n阶矩阵,且$ABC=E$,则必有

(A) $CBA=E$. (B) $BCA=E$. (C) $BAC=E$. (D) $ACB=E$.

【分析】 由$ABC=E$知$A(BC)=(BC)A=E$,或$(AB)C=C(AB)=E$,可见(B)正确.由于乘法不一定能交换,故其余不恒成立.

【例2.33】 设A,B,C均为n阶矩阵,E为n阶单位矩阵,若$B=E+AB$,$C=A+CA$,则$B-C=$

(A) E. (B) $-E$. (C) A. (D) $-A$.

【分析】 由 $B=E+AB\Rightarrow(E-A)B=E\Rightarrow B=(E-A)^{-1}$;

$C=A+CA\Rightarrow C(E-A)=A\Rightarrow C=A(E-A)^{-1}$(或$C=AB$).

那么$B-C=(E-A)^{-1}-A(E-A)^{-1}=(E-A)(E-A)^{-1}=E$(或$B-C=B-AB=E$).

故选(A).

【例2.34】 求$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$的逆矩阵.

【解法一】 用伴随矩阵(2.10),得

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix}=-27,\text{又}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-6,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

所以$A^*=\begin{bmatrix}-3 & -6 & -6\\ -6 & -3 & 6\\ -6 & 6 & -3\end{bmatrix}$,那么$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

【解法二】 用初等行变换(2.11),得

$$(A\vdots E)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[②-2①]{③-②}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$

www.TopSage.com

$$\xrightarrow{③-②}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-6&-2&1&0\\0&0&9&2&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow[-\frac{1}{3}②]{\frac{1}{9}③}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[②-2③]{①-2③}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&\frac{5}{9}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\0&0&1&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right]\xrightarrow{①-2②}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\0&0&1&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right].$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$.

评注 这里【算法一】与【算法二】是最基本的也是很重要的求逆矩阵方法，考生必须掌握．而伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 求逆矩阵时，行的代数余式应是按行写在 $\boldsymbol{A}^*$ 中，计算 $|\boldsymbol{A}|$ 时不要漏乘系数 $(-1)^{i+j}$．当 $n>3$ 时，求 $|\boldsymbol{A}|$ 往往是费时的，不如用初等变换法方便．总之，对于求逆矩阵通过反复练到解题正确、迅速的境界．

针对本题的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还有一种特殊法，利用注意到 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量的是相互垂直且长度都是3，则可令 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}$，那么 $\boldsymbol{B}$ 是一个正交矩阵，于是 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，即

$$\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}\Rightarrow 3\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{9}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

或者由 $\boldsymbol{A}^2=9\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{9}\boldsymbol{A}$．

【例2.35】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，如 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{E}$，化简 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$.

【解】 原式 $=[\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}]^{-1}=[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}][(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}]^{-1}$

$=[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}]\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

评注 请说出每一步恒等变形都是运用矩阵的哪一条性质？请读者注意：不要简单地给出化简结果写成 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$．

【例2.36】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆．

【证法一】 由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{E}$，那么

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E},$$

即 $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\cdot\frac{2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{2}=\boldsymbol{E}$$，按定义可知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆．

【证法二】 因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是0或1，那么，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值只能是1或2．所以，0不是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆．

【例2.37】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆．

【证明】 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，于是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$．

故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$．所以按定义知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆．

【例2.38】 已知 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是相互正交的 n 维列向量，证明 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$ 可逆．

【证法一】 记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是0，那么 $\boldsymbol{E}$

$+A$ 的特征值全是1,所以 $E+XY^{\mathrm{T}}$ 可逆.

【证法二】 令 $A=E+XY^{\mathrm{T}}, B=XY^{\mathrm{T}}$,由 $B^2=0$ 有 $(A-E)^2=0$,则 $A(2E-A)=E$,即 A 可逆.

十字网 TopSage.com

【例2.39】 设 A,B 是 n 阶矩阵,$E-AB$ 可逆,证明 $E-BA$ 可逆.

【证明】(反证法) 如 $|E-BA|=0$,则齐次方程组 $(E-BA)x=0$ 有非零解,设 η 是其非零解,则

$$(E-BA)\eta=0,\text{即 } BA\eta=\eta,\text{且 } \eta\neq 0. \tag{*}$$

对于齐次方程组 $(E-AB)x=0$,由于

$$(E-AB)A\eta=A\eta-(AB)A\eta=A\eta-A(BA\eta)=A\eta-A\eta=0,$$

从(*)式易见 $A\eta\neq 0$. 这样 $(E-AB)x=0$ 有非零解 $A\eta$,这与 $E-AB$ 可逆相矛盾.

【例2.40】 设 $H=\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}$,其中 A,B 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵,证明:矩阵 H 可逆,并求其逆 H^{-1}.

【证明】 因为 A,B 均可逆,由拉普拉斯展开式(1.6)有

$$|H|=\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=|A|\,|B|\neq 0,$$

所以矩阵 H 可逆.

设 $H^{-1}=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & W\end{bmatrix}$,则 $\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_m & O\\ O & E_n\end{bmatrix}$,即有 $\begin{cases}AX=E_m,\\ AY=O,\\ CX+BZ=O,\\ CY+BW=E_n,\end{cases}$

解得 $X=A^{-1}, Y=O, Z=-B^{-1}CA^{-1}, W=B^{-1}$. 故

$$\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{bmatrix}.$$

评注 这些例题是本章考核知识要点讲解中第三条的详细说明,希望读者能熟悉可逆证明的常用方法.

题型七 求解矩阵方程

$AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ B 的每列可由 A 的列向量线性表出

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A\vdots B)$.

【解题思路】 解矩阵方程 $AX=B$ 的基本方法有:

方法1° 若 A 可逆,则 $X=A^{-1}B$,可以先求出 A^{-1},再作乘法 $A^{-1}B$ 求出 X,也可用行变换直接求出 X,即

$$(A\vdots B)\to\cdots(E\vdots X). \tag{2.13}$$

方法2° 若 A 不可逆,则可设未知数列方程用高斯消元法化为阶梯形方程组,即

$$(A\vdots B)\xrightarrow{\text{只用行变换}}\cdots\to\begin{pmatrix}\ddots & \vdots\\ & \cdots\end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

然后对每列常数项分别求解.

类似地,对于方程 $XA=B$,若 A 可逆,则 $X=BA^{-1}$. 对于方程 $AXB=C$,若 A,B 均可逆,则

$$X=A^{-1}CB^{-1}.$$

【注】 对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施以初等行变换,化为阶梯形矩阵,这个过程称为消元过程.

www.TopSage.com

【例 2.41】 已知 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$.

【解】 由于 $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$,矩阵可逆,且 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$,

所以 $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\\3&2&1\end{bmatrix}.$$

【例 2.42】 已知 $\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&5\\-1&-3&1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}3&4&-1\\8&8&3\\3&-4&16\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{X}$.

【解】 记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&5\\-1&-3&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&4&-1\\8&8&3\\3&-4&16\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{bmatrix}$,用初等行变换(2.14),得

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&2&3&4&-1\\2&6&5&8&8&3\\-1&-3&1&3&-4&16\end{array}\right]\xrightarrow[③+①]{②-2①}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&2&3&4&-1\\0&0&1&2&0&5\\0&0&3&6&0&15\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&2&3&4&-1\\0&0&1&2&0&5\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

从增广矩阵的第一列解出 $x_3=2$, $x_2=t$, $x_1=-3t-1$.

同理 $y_3=0$, $y_2=u$, $y_1=4-3u$,

$z_3=5$, $z_2=v$, $z_1=-3v-11$,

故 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-3t-1&-3u+4&-3v-11\\t&u&v\\2&0&5\end{bmatrix}$,其中 t,u,v 为任意常数.

评注 对于 $\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&5\\-1&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4&-1\\8&8&3\\3&-4&16\end{bmatrix}$,有

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=3,\\2x_1+6x_2+5x_3=8,\\-x_1-3x_2+x_3=3;\end{cases}\quad\begin{cases}y_1+3y_2+2y_3=4,\\2y_1+6y_2+5y_3=8,\\-y_1-3y_2+y_3=-4,\end{cases}\quad\begin{cases}z_1+3z_2+2z_3=-1,\\2z_1+6z_2+5z_3=3,\\-z_1-3z_2+z_3=16.\end{cases}$$

由于这三个方程组的系数矩阵完全一样,区别仅在常数项,所以对这三个方程组增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&2&3\\2&6&5&8\\-1&-3&1&3\end{array}\right],\quad\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&2&4\\2&6&5&8\\-1&-3&1&-4\end{array}\right],\quad\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&2&-1\\2&6&5&3\\-1&-3&1&16\end{array}\right]$$

的初等行变换可以合并为 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})$ 形式一并进行.

【例 2.43】 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{B}=$ _____.

www.TopSage.com

【分析】 由题设知,A 可逆. 然后在题设关系式两端右乘 A^{-1} 有:$A^{-1}B = 6E + B$,在该式两端左乘 A,得 $B = 6A + AB$. 移项得 $(E - A)B = 6A$,则 $B = 6(E - A)^{-1}A$. 于是由

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & \frac{3}{4} & \\ & & \frac{6}{7} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6} \end{bmatrix},$$

得

$$B = 6\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

【注】 考生要熟悉可逆对角矩阵的求逆公式 $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}$.

【例 2.44】 设 4 阶矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

满足关系式 $A(E - C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = E$, 求 A.

【解】 由于 $A(E - C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = A[C(E - C^{-1}B)]^{\mathrm{T}} = A(C - B)^{\mathrm{T}}$,于是

$$A = [(C - B)^{\mathrm{T}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

【注】 本题求逆用初等行变换是简捷的.

【例 2.45】 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,且

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E. \qquad ①$$

求矩阵 B.

【分析】 对矩阵方程①化简,右乘 A 得

$$AB - B = 3A \Rightarrow (A - E)B = 3A.$$

由于已知条件是 A^*,可继续变形,用 A^* 左乘上式并用关系式 $AA^* = A^*A = |A|E$ 得

$$B = 3|A|(|A|E - A^*)^{-1}.$$

因此,应先求出 $|A|$,再求逆.

【解】 由 $|A^*| = |A|^{n-1}$,有 $|A|^3 = 8$,得 $|A| = 2$.

www.TopSage.com

又因$(A-E)BA^{-1}=3E$,有$(A-E)B=3A$,左乘A^*,得

$$(|A|E-A^*)B=3|A|E,\text{即}\quad (2E-A^*)B=6E.$$

故$B=6(2E-A^*)^{-1}$.

由$2E-A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}$求出$(2E-A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}$.

所以$B=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$.

【例 2.46】 已知$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$,若

$$A^*B\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8A^{-1}B+12E,\qquad ①$$

求矩阵B.

【分析】 由于$(kA)^*=k^{n-1}A^*$, $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$,可见

$$\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}(A^*)^*=\frac{1}{4}|A|A.$$

又$AA^*=|A|E$,只要先求出$|A|$的值,就可把矩阵方程①化简.

【解】 由于$|A|=4$,用矩阵A左乘方程①两端,有

$$AA^*B\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8B+12A.$$

因为$AA^*=|A|E=4E$, $\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=\frac{1}{4}(A^*)^*=\frac{1}{4}|A|A=A$,故

$$4BA=8B+12A,\text{即}\quad B(A-2E)=3A.$$

那么 $B=3A(A-2E)^{-1}$.

由 $$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-1&-1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix},$$

得到 $$B=-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&0\\0&0&-3\\-3&0&0\end{bmatrix}.$$

评注 ①解矩阵方程一般应先化简(如【例 2.43】、【例 2.46】),不要急于引入抽象符号代入,按等式初应正确,常见错误有$AX=X\cdot X(A-E)$,或由$AX=B$得$X=BA^{-1}$等.

②化简矩阵方程要根据矩阵运算的具体条件,化简方法不同,一般来说可参照数的运算等式两端

题型训练

一、选择题

1. 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{AB}=$

(A) $\boldsymbol{0}$. (B) $\boldsymbol{E}$. (C) $-\boldsymbol{E}$. (D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 n 阶矩阵，下列交换错误的是

(A) $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}$. (B) $\boldsymbol{A}^{m}\boldsymbol{A}^{p}=\boldsymbol{A}^{p}\boldsymbol{A}^{m}$.

(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. (D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. (B) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. (C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$. (D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，下列命题中正确的是

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$. (B) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$.

(C) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$. (D) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}+a_{12}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}+a_{22}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}+a_{32}\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=$

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2$. (B) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_3$. (C) $\boldsymbol{AP}_3\boldsymbol{P}_1$. (D) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_3$.

二、填空题

1. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2=$ _____，$\boldsymbol{A}^3=$ _____.

2. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{*}=$ _____，$(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=$ _____.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&5\\2&-1&0&0\\-5&3&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ _____.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&3\\3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}$，则 $\left(\frac{1}{5}\boldsymbol{B}\right)^{-1}=$ _____.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=$ _____.

6. 若 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&3&0\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=$ _____.

7. 若 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&2&1\\-2&1&2\end{bmatrix}$，则 $(3\boldsymbol{A})^{*}=$ _____.

www.TopSage.com

8. 设 $A=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & x & -4\\ -2 & -4 & x\end{bmatrix}$ 不可逆，则 $x=$ _____.

9. 设 A,B 均为 3 阶矩阵，且满足 $AB=2A+B$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，则 $|B-2E|=$ _____.

10. 设 $A^2-BA=E$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $B=$ _____.

11. 设 $XA=A^{\mathrm{T}}+X$，其中 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$，则 $X=$ _____.

12. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $X=$ _____.

三、计算题与证明题

1. 设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，求 A^n.

3. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，$E+AB$ 可逆，化简 $(E+BA)[E-B(E+AB)^{-1}A]$.

4. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，其中 C 可逆，且 $ABA=C^{-1}$，证明 $BAC=CAB$.

5. 若 A 是对称矩阵，B 是反对称矩阵，则 AB 是反对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

6. 设 A 是 n 阶矩阵，$A^m=0$，证明 $E-A$ 可逆.

7. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵 $P=\begin{bmatrix}E & 0\\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^* & |A|\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^{\mathrm{T}} & b\end{bmatrix}$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 计算并化简 PQ；

(Ⅱ) 证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha\neq b$.

8. 设 A 是 n 阶反对称矩阵，证明 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵.

大家网 TopSage.com

第三章　n 维向量与向量空间

内容概要与重难点提示

向量是线性代数的重点之一，也是难点，对逻辑推理有较高的要求.

粗略地说，本章有线性组合、线性相关（无关）两大问题，进而讨论线性无关向量的个数，引出秩（向量组及矩阵）的研究.

无论是证明、判断还是计算，关键在于要深刻理解本章的基本概念，搞清其相互间的关联. 要学会用定义来作推导论证，注意推导过程中逻辑的正确性，表达要清晰.

要理解向量组的线性相关，掌握判断方法，要搞清它和齐次方程组有非零解的关系，以及和向量组秩之间的联系，要掌握线性表出的判断方法，要搞清线性表出与非齐次线性方程组是否有解之间的关系.

向量组的秩与矩阵的秩之间有密切的联系，因此对于秩的问题要灵活运用条件，注意知识点的转化. 求秩、求极大线性无关组的重要方法是初等行变换.

要掌握线性无关向量组正交规范化的施密特（Schmidt）方法.

在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，应在了解各定义基础上了解坐标变换公式，会求过渡矩阵.

考核知识要点讲解

一、n 维向量的概念与运算

（一）n 维向量的概念

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成的有序数组称为 **n 维向量**，记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 或 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，分别称为 n 维**行向量**或 n 维**列向量**，也就是 $1\times n$ 或 $n\times 1$ 矩阵，数 a_i 称为向量的第 i 个分量.

（二）n 维向量的运算

如果 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则

▶**1. 加法**　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$；

▶**2. 数乘**　$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}$；

▶**3. 内积**　$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

【注】　由加法及数乘运算可引出线性组合、线性相关等概念，由内积可引出单位化、正交化等问题. 特别地，若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，而 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度是

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2},$$

那么　$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

www.TopSage.com

二、线性组合与线性表出

▶1. 线性组合

若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做**向量组**.

由 s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及 s 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 所构成的向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \tag{3.1}$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**,其中数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 称为组合系数.

▶2. 线性表出

如 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能表示成向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合,即

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{\beta}, \tag{3.2}$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**,或说 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**线性组合**.

▶3. 向量组等价

如果向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可由向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,则称**向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表出**.如两个向量组可以互相线性表出,则称这两个**向量组等价**.

【注】 ① 等价向量组具有传递性、对称性及反身性.但向量个数可以不一样,线性相关性也可以不一样.

② 任一向量组和它的极大无关组等价.

③ 向量组的任意两个极大无关组等价.

④ 两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同.

⑤ 等价的向量组具有相同的秩,但秩相同的向量组不一定等价.

⑥ 如果向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表出,且 $r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ})$,则(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

【例 3.1】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^T,\boldsymbol{\beta} = (2,1,0)^T,\boldsymbol{\gamma} = (0,0,1)^T$,则 $\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$,即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.但因为方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\gamma}$ 即 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ 无解,故 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

评注 如 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^T, j = 1,2,\cdots,s$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出的充要条件是方程组

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

有解,而表示法唯一等价于方程组有唯一解.

由于方程组有解的问题与矩阵的秩有密切联系,因而又有

$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$.

而表示法唯一的充要条件是 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}) = s$.

$\boldsymbol{\beta}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) < r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$,或 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) + 1 = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$.

www.TopSage.com

三、向量组的线性相关与线性无关

（一）线性相关与线性无关的概念

▶1. 线性相关

对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}, \tag{3.3}$$

则称此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**.

▶2. 线性无关

对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

必有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$，则称此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**. 或者说，只要 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零，必有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \mathbf{0}$，则称此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**.

【例 3.2】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,2,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (3,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (4,5,6)$，则因 $3\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$，组合系数 3，-2，0 不全为零，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

（二）线性相关与线性无关的充分必要条件

▶1. 线性相关的充分必要条件

【定理 3.1】 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

$$\Leftrightarrow \quad \text{齐次方程组}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ 有非零解} \tag{3.4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{向量组的秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) < s \quad (\text{向量的个数}) \tag{3.5}$$

$\Leftrightarrow$ 存在某 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1,2,\cdots,s)$ 可由其余 $s-1$ 个向量线性表出.

特别地，

【定理 3.2】 n 个 n 维向量线性相关 $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n| = 0$； (3.6)

$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

▶2. 线性无关的充分必要条件

【定理 3.1′】 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

$$\Leftrightarrow \quad \text{齐次方程组}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{向量组的秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) = s \quad (\text{向量的个数})$$

$\Leftrightarrow$ 每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都不能用其余 $s-1$ 个向量线性表出.

▶3. 几个重要结论

【定理 3.3】 (1) 阶梯形向量组一定线性无关.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则它的任一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 必线性无关.

www.TopSage.com

(3) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则它的任一延伸组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_s\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{bmatrix}$ 必线性无关.

(4) 两两正交、非零的向量组必线性无关.

【例 3.3】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,4,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,6)^{\mathrm{T}}$,因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 个 3 维向量,由 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 那么,去掉 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 后,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍线性无关;延伸组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,x_1,3,x_2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,4,y_1,5,y_2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,z_1,6,z_2)^{\mathrm{T}}$ 仍线性无关.

评注:一定要理解线性相关、无关的定义,要会用定义(特别是线性表出、等价向量组、向量组的秩、矩阵秩与其列向量组秩之间的关系)证明向量组的线性相关性.

四、线性相关性与线性表出的关系

【定理 3.4】 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是有 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可用其余 $s-1$ 个向量线性表出.

【定理 3.5】 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,且表示法唯一.

【定理 3.6】 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,且 $s>t$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

【推论 3.7】 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $s\leqslant t$.

五、向量组的秩与矩阵的秩

(一) 向量组的秩与矩阵的秩的概念

▶1. 极大线性无关组

在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中,如存在一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关,且再添加进组中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$(如果还有的话)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_j$ 一定线性相关,则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**极大线性无关组**.

【注】 ① 只由一个零向量构成的向量组不存在极大线性无关组,规定它的秩为 0. 一个线性无关向量组的极大线性无关组就是该向量组自身.

② 一般来说,向量组的极大线性无关组不是唯一的,但这些极大线性无关组是等价的,从而每个极大线性无关组中所含向量的个数都是 r,即个数 r 是由原向量组唯一确定的.

▶2. 向量组的秩

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为该**向量组的秩**,记为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$.

▶3. 矩阵的秩

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩**,记作 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为 0,$r+1$ 阶子式(若还有的话)全为 0.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant r \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为 0.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<r \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 中 r 阶子式全为 0.

www.TopSage.com

【例 3.4】 若 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 都是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组，则 $r=t$.

【证明】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是极大线性无关组，所以添加 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}$ 后 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_{j_1}$ 必线性相关. 那么 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出(【定理 3.5】). 类似地，$\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 也都可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 线性无关，得知 $t\leqslant r$(【推论 3.7】). 同理，$r\leqslant t$. 所以，$r=t$.

(二) 向量组的秩与矩阵的秩的关系

【定理 3.8】 $r(A)=A$ 的行秩(矩阵 A 的行向量组的秩) $=A$ 的列秩(矩阵 A 的列向量组的秩).

【注】 由该定理可知，求向量组的极大线性无关组和向量组的秩时，可通过对矩阵的初等变换化成阶梯形矩阵来实现.

【定理 3.9】 经初等变换矩阵、向量组的秩均不变.

【定理 3.10】 若向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表出，则 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$. 特别地，等价的向量组有相同的秩.

【注】 秩相同的向量组不一定等价. 例如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,2)^{\mathrm{T}}$.

六、矩阵秩的重要公式

$$
\begin{aligned}
&1.\ r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}); && 2.\ r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B});\\
&3.\ r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}),k\neq 0; && 4.\ r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B}));\\
&5.\ \text{如 } \boldsymbol{A} \text{ 可逆，则 } r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B});\text{如 } \boldsymbol{B} \text{ 可逆，则 } r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A});\\
&6.\ \text{设 } \boldsymbol{A} \text{ 是 } m\times n \text{ 矩阵，} \boldsymbol{B} \text{ 是 } n\times p \text{ 矩阵，如 } \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\text{，则 } r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

【例 3.5】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

【证明】 设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量中 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是其一个极大线性无关组，$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的一个极大线性无关组. 那么，$\boldsymbol{A}$ 的每一个列向量均可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出，$\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量均能用 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表出. 于是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\beta}_k$ 都能用 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表出. 因此，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 列向量组中极大线性无关组的向量个数不大于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 中向量个数，即 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r+t=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

【例 3.6】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times p$ 矩阵，如 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

【证明】 构造齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块，记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_p)$，那么

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_p)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_p)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),$$

于是 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_p\}\subset\{\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{ 解向量}\}$，而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 解向量的秩 $=n-r(\boldsymbol{A})$，所以

$$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_p)\leqslant n-r(\boldsymbol{A}),\text{即 } r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

评注 关于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 要有两种构思：一是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，一是秩 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

www.TopSage.com

七、向量空间、子空间与基、维数、坐标

(一) 向量空间与子空间

▶1. 向量空间

设 V 是 n 维向量的非空集合,且 V 中向量对于加法及数乘这两种运算封闭,则称 V 是**向量空间**.

▶2. 子空间

设 W 是向量空间 V 的一个非空子集,如 W 对 V 的加法及数乘两运算都封闭,则称 W 是 V 的**子空间**.

(二) 基、维数、坐标

▶1. 基及维数

设 V 是向量空间,若 V 中有 r 个向量线性无关,且 V 中任一向量都可由这 r 个向量线性表出,则称这 r 个向量为向量空间 V 的一组**基**,r 称为向量空间 V 为**维数**,并称 V 为 **r 维向量空间**.

▶2. 坐标

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维向量空间 V 的一组基,那么 $\forall \boldsymbol{\beta} \in V$,有唯一的一组数,使

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta},$$

称有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**.

【例 3.7】 n 元齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量的集合是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间,通常称为 $\boldsymbol{A}$ 的**解空间**. 而线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解向量的集合不是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间. 因为当 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解时,$\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解,即加法不封闭. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 即是 $\boldsymbol{A}$ 的解空间的一组基,解空间的维数是 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

八、基变换与坐标变换

▶1. 基变换公式及过渡矩阵

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维向量空间 V 的两组基,则**基变换公式**为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}, \quad (3.8)$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵,称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的**过渡矩阵**.

【注】 过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的第 j 列就是 $\boldsymbol{\beta}_j$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

▶2. 坐标变换公式

若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 n 维向量空间 V 中的任一向量,它在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的坐标分别是

$$\boldsymbol{X} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{Y} = (y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{\gamma} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\beta}_n$,则**向量坐标变换公式**为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}, \quad (3.9)$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

www.TopSage.com

【注】 当向量空间取定一组基之后，每个向量都可由这组基唯一地线性表出．求向量的坐标也就是求线性方程组的解．由于向量空间中，基向量的选取不是唯一的（犹如向量组的极大线性无关组），所以应了解基变换及坐标变换公式，要会求过渡矩阵．由于

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n), \tag{3.10}$$

除可先求出$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}$再作乘法求$\boldsymbol{C}$外，亦可用初等行变换

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n \vdots \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) \to (\boldsymbol{E} \vdots \boldsymbol{C}) \tag{3.11}$$

直接求$\boldsymbol{C}$．

例 3.8 设$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\beta}_1 = (2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2 = (3,1)^{\mathrm{T}}$，求由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的过渡矩阵．

【解】 由于$\boldsymbol{\beta}_1 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的过渡矩阵是

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

或者，按定义$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{C}$，即$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{C}$，于是有

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

九、规范正交基与 Schmidt 正交化

▶1. 正交基及规范正交基

向量空间一组基中的向量如果两两正交，就称为**正交基**；若正交基中每个向量都是单位向量，就称其为**规范正交基**．

▶2. Schmidt 正交化（【注】 考生要掌握 Schmidt 正交化．）

若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则可构造$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$使其两两正交，且$\boldsymbol{\beta}_i$仅是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$的线性组合$(i = 1,2,\cdots,s)$，再把$\boldsymbol{\beta}_i$单位化，记$\boldsymbol{\gamma}_i = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_i}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}$，则$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$**是规范正交向量组**．

其中$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$

……

$$\boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{\alpha}_s - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_{s-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{s-1},\boldsymbol{\beta}_{s-1})}\boldsymbol{\beta}_{s-1}. \tag{3.12}$$

例如：已知$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,1,-2,1)^{\mathrm{T}}$线性无关，则将其正交化，有

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = (0,1,2,1)^{\mathrm{T}} - \frac{3}{3}(1,1,1,0)^{\mathrm{T}} = (-1,0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$= (3,1,-2,1)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(1,1,1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{-4}{3}(-1,0,1,1)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}(3,1,-4,7)^{\mathrm{T}}.$$

www.TopSage.com

再单位化，有 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)^T$，$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1,1)^T$，$\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{75}}(3,1,-4,7)^T$.

常 考题型及其解题方法与技巧

题型一 线性组合、线性相关的判别

【例 3.9】 （Ⅰ）若 $\alpha_1 = (1,0,5,2)^T, \alpha_2 = (3,-2,3,-4)^T, \alpha_3 = (-1,1,t,3)^T$ 线性相关，则 t = _____；

（Ⅱ）若 $\alpha_1 = (1,-1,2,4)^T, \alpha_2 = (0,3,1,2)^T, \alpha_3 = (3,0,7,a)^T, \alpha_4 = (1,-2,2,0)^T$ 线性无关，则 a 的取值范围为_____.

【分析】 （Ⅰ）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关的充要条件是齐次方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ 有非零解.

对系数矩阵高斯消元，化为阶梯形，于是有

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & t \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -12 & t+5 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为齐次方程组有三个未知数，它若有非零解则阶梯形方程组中方程个数必不大于 2，故知 $t = 1$.

（Ⅱ）n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| \neq 0$. 因为

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a-12 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & a-12 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-14 & -4 \end{vmatrix} = 14 - a \neq 0,$$

所以 $a \neq 14$.

评注 在（Ⅰ）中，三个 4 维向量线性相关的判别是转化为齐次方程组有非零解的讨论；而（Ⅱ）中是四个 4 维向量可用行列式的值是否为零来讨论，当然也可用齐次方程组来讨论，但（Ⅰ）中若用行列式是不妥的.

【例 3.10】 （Ⅰ）下列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中，线性无关的是

（A） $(1,2,3,4), (4,3,2,1), (0,0,0,0)$.

（B） $(a,b,c), (b,c,d), (c,d,e), (d,e,f)$.

（C） $(a,1,b,0,0), (c,0,d,2,3), (e,4,f,5,6)$.

（D） $(a,1,2,3), (b,1,2,3), (c,4,2,3), (d,0,0,0)$.

（Ⅱ）已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，则命题正确的是

（A） $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关.

（B） $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

（C） $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

（D） $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

www.TopSage.com

(Ⅲ) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量,则下列命题中正确的是

(A) 如 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(B) 如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关.

(C) 如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中,任意 $s-1$ 个向量都线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(D) 零向量 $\mathbf{0}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

(Ⅳ) 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出,则下列命题正确的是

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r\leqslant s$.(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关,则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关,则 $r\leqslant s$.(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关,则 $r>s$.

【分析】 (Ⅰ) 有零向量的向量组肯定线性相关,任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.因此(A),(B)均线性相关.

对于(D),若 $d=0$,肯定线性相关;若 $d\neq 0$,则

$$(a,1,2,3)-(b,1,2,3)=\frac{a-b}{d}(d,0,0,0),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,而线性相关的向量组再增加向量肯定仍是线性相关,因此不论哪种情况,(D) 是线性相关的.(也可直接计算行列式,即【定理 3.2】.)

由排除法可知(C)入选.另一方面,若能观察出 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\beta}_2=(0,2,3),\boldsymbol{\beta}_3=(4,5,6)$ 所构成的行列式

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}\neq 0,$$

则可知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是其延伸组,即不论如何扩充均线性无关,故选(C).

评注 齐次方程组解的判别时,总是讲基础解系自由变量赋值,然后确定通解后的解向量是线性无关的,此是基于这一原理.

(Ⅱ) 由观察法可知 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,即(A)线性相关.

评注 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 又线性无关的,两者不要混淆.请考虑:若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的线性相关性?

对于(B),$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,即(B)线性相关.

而(C)中,$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,即(C)线性相关.

由排除法可知(D)正确.作为复习并掌握基本方法,请读者直接证明(D)线性无关,若有困难可参看本章题型二中【例 3.17】.

(Ⅲ) (A),(C),(D) 均错,仅(B) 正确.

(A) 中当 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出时,并不保证每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s-1)$ 都不能用其余的向量线性表出.例如,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,3)$,虽 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出,但 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的.

评注 当且仅当每一个向量都不能用其余向量表示时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 才线性无关.

(C) 如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,可知它的任何一个部分组均线性无关.但任一部分组线性无关并不能保证该向量组线性无关.例如

$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\cdots,1),\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,\cdots,1)$,

其中任意 n 个都是线性无关的,但这 $n+1$ 个向量是线性相关的.

(D) 在线性表出的定义中,对组合系数没有任何约束条件,因此,零向量可以用任何向量组线性表出,最多组合系数全取为 0,即 $\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s$.

www.TopSage.com

其实，零向量 $\mathbf{0}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 表示时，如果组合系数可以不全为 0，则表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性相关的，否则线性无关.

关于(B)，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，故存在不全为 0 的 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

显然，$k_s=0$(否则 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出)，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关.

(Ⅳ) 因为 Ⅰ 可由 Ⅱ 线性表出，故 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$(【定理 3.10】). 当向量组 Ⅰ 线性无关时，有 $r(\text{Ⅰ})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r$. 由向量组秩的概念自然有 $r(\text{Ⅱ})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leqslant s$. 从而(A)正确.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，可见(B)、(D)均不正确.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，可知(C)不正确.

【例 3.11】 判断 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+9)^{\mathrm{T}}$ 的线性相关性.

【解法一】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，按分量写出，有

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2-x_3+2x_4=0,\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=0,\\3x_1+5x_2+x_3+(a+9)x_4=0.\end{cases}$$

对系数矩阵高斯消元，有

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&a+2&4\\3&5&1&a+9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&1&a&2\\0&2&-2&a+6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&a+1&0\\0&0&0&a+2\end{bmatrix}.$$

当 $a=-1$ 或 $a=-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=3<4$，齐次方程组有非零解，向量组线性相关. 否则线性无关.

【解法二】 由于是 4 个 4 维向量，故可用行列式. 因为

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&a+2&4\\3&5&1&a+9\end{vmatrix}=(a+1)(a+2),$$

所以 $a=-1$ 或 $a=-2$ 时，向量组线性相关. 否则线性无关.

评注 线性相关或无关问题本质上是齐次方程组有无非零解的问题. 要求考生对诸如：一个部分组线性相关，则整个向量组必线性相关；阶梯形向量组必线性无关；向量组线性无关，则其延伸组必线性无关；… 等充分条件应会灵活运用.

【例 3.12】 (Ⅰ) 若 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,t)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-4)^{\mathrm{T}}$ 线性表出，则 $t=$ _____；

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a+2,-2)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,3,4)^{\mathrm{T}}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 $a=$ _____.

【分析】 (Ⅰ) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出的充要条件是线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

www.TopSage.com

对增广矩阵高斯消元,化为阶梯形,即

$$\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&1&1\\1&2&-1&2\\1&7&-4&t\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\2&-1&1&1\\1&7&-4&t\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\0&-5&3&-3\\0&5&-3&t-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\0&-5&3&-3\\0&0&0&t-5\end{array}\right],$$

方程组有解 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$,显然 $t=5$.

(Ⅱ)依题意,方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$ 有解,而方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_2$ 无解.因为两个方程组的系数矩阵相同,故可合并一次加减消元,即

$$\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&1&1&0\\2&3&a+2&3&1\\1&a&-2&4&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&1&1&0\\0&-1&a&1&1\\0&a-2&-3&3&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&1&1&0\\0&1&-a&-1&-1\\0&0&a^2-2a-3&a+1&a\end{array}\right],$$

可见 $a=-1$ 时,方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$ 有解,而 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_2$ 无解,故 $a=-1$.

【例 3.13】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,t,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(t,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(4,t^2,-4)^{\mathrm{T}}$,若 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出且表示法不唯一,求 t 及 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式.

【解】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$,按分量写出为

$$\begin{cases}x_1+x_2+tx_3=4,\\-x_1+tx_2+x_3=t^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4.\end{cases}$$

对增广矩阵高斯消元,得

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&t&4\\-1&t&1&t^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\1&1&t&4\\-1&t&1&t^2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&2&t-2&8\\0&0&\frac{1}{2}(t+1)(4-t)&t(t-4)\end{array}\right].$$

由于 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出且表示法不唯一,所以方程组有无穷多解,故 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$,从而 $t=4$. 此时,增广矩阵可化为

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&2&2&8\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

解出 $x_3=u,x_2=4-u,x_1=-3u$,所以 $\boldsymbol{\beta}=-3u\boldsymbol{\alpha}_1+(4-u)\boldsymbol{\alpha}_2+u\boldsymbol{\alpha}_3$, $\forall u$.

【例 3.14】 已知 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,但不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 表出,试判断:

(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示;

(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,并说明理由.

【解法一】 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,但能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.可设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta},\qquad(*)$$

则必有 $x_m\neq0$,否则 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,与已知矛盾.所以

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{x_m}(\boldsymbol{\beta}-x_1\boldsymbol{\alpha}_1-x_2\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-x_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

如 $\boldsymbol{\alpha}_m=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$,代入(*)式知 $\boldsymbol{\beta}=(x_1+l_1x_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+l_2x_m)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_{m-1}+l_{m-1}x_m)\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 与已知矛盾.即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

【解法二】 因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta});\qquad(1)$$

又因 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,有

www.TopSage.com

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}). \tag{2}$$

那么
$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m) &\overset{(1)}{=\!=} r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}) \\ &\geqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}) \quad (\text{整体}\geqslant\text{局部}) \\ &\overset{(2)}{=\!=} r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1 \\ &\geqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m). \quad (\text{想一下何时取大于号?何时取等号?}) \end{aligned}$$

从而 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

【例 3.15】 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，试问 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?并说明理由.

【解】 不能. 因为已知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$，如 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，那么

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=(k_1l_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1l_3+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，与已知矛盾. 因此，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

【例 3.16】 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5, \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5, \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=c_5, \\ d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4=d_5 \end{cases}$$

的通解是 $(2,1,0,3)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，如令 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,5$.

试问：(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出?

(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?并说明理由.

【分析】 从线性方程组的通解可看出相应齐次方程组的通解，亦可得到列向量组的秩及列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 之间的联系.

【解】 (Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出. 因 $k(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 是相应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解，则

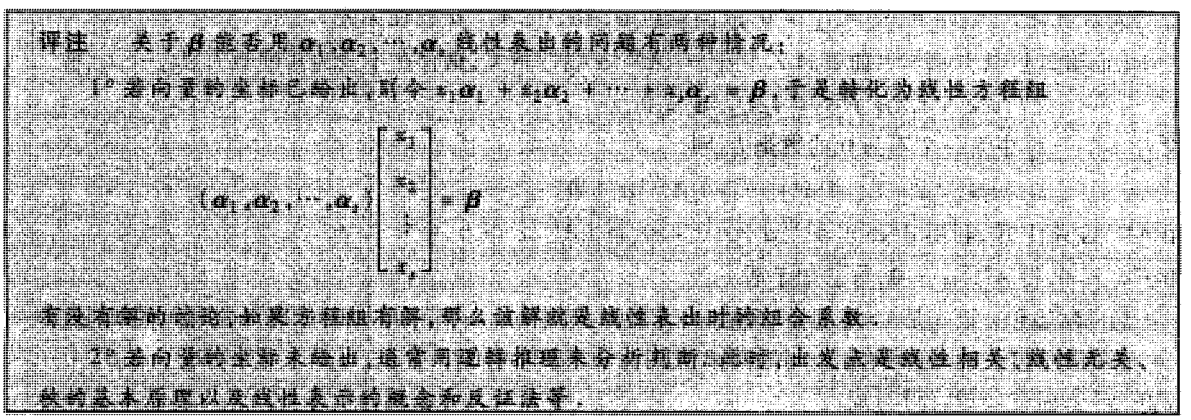
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}, \quad \text{即} \quad \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{A}).$$

由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系仅一个向量，于是有 $r(\boldsymbol{A})=n-1=3$. 那么，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，与 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 相矛盾.


评注　关于 $\boldsymbol{\beta}$ 能否用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出的问题有两种情况：

1° 若向量的坐标已给出，即令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$，于是转化为线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$$

有没有解的讨论，如果方程组有解，那么通解就是线性表出时的组合系数.

2° 若向量的坐标未给出，运用有关推理来分析判断. 此时，出发点是线性相关、线性无关的基本原理以及线性表示的概念和反证法等.

www.TopSage.com

题型二　线性相关与线性无关的证明

【解题思路】　证明线性无关通常思路是：用定义法（同乘或拆项重组），用秩（等于向量个数），齐次方程组只有零解或反证法．

【例 3.17】　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

【证法一】（定义法，拆项重组）　若 $x_1(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，整理得

$$(2x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(3x_1+x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

由已知条件 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故组合系数必全为 0，即

$$\begin{cases}2x_1\quad\quad+x_3=0,\\ 3x_1+x_2+x_3=0,\\ \quad -x_2+x_3=0,\end{cases}\quad\text{因为系数行列式}\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

故齐次方程组只有零解，即 $x_1=x_2=x_3=0$．因此 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

【证法二】（用秩，等价向量组）　令 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\beta}_1-3\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3,$$

那么，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可互相线性表出，它们是等价向量组，因而有相同的秩（【定理 3.10】），由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$．

所以，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，即 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

【证法三】（用秩）　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，知其秩为 3，又

$$(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&1\\3&-1&1\end{bmatrix},$$

而矩阵 $\begin{bmatrix}0&1&1\\2&1&1\\3&-1&1\end{bmatrix}$ 可逆，故 $r(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$．

【例 3.18】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$．证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的．

【证法一】（定义法，同乘）　设有常数 $l_1,l_2,\cdots,l_k$，使得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

用 $\boldsymbol{A}^{k-1}$ 左乘上式，得 $\boldsymbol{A}^{k-1}(l_1\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$．

由 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{k+2}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{0}$，从而有 $l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$．因为 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $l_1=0$．

类似可证 $l_2=l_3=\cdots=l_k=0$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关．

【证法二】（反证法）　如 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则存在不全为 0 的数 $l_1,l_2,\cdots,l_k$，使

$$l_1\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

设 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 中第一个不为 0 的数是 l_i，则

$$l_i\boldsymbol{A}^{i-1}\boldsymbol{\alpha}+l_{i+1}\boldsymbol{A}^{i}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

用 $\boldsymbol{A}^{k-i}$ 左乘上式，利用 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{0}$，得 $l_i\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$．

由于 $l_i\neq 0$，得 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，与已知矛盾．

【例 3.19】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关．

【证法一】（定义法，同乘）　对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块，记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，若 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$，用分块矩阵可写成

www.TopSage.com

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\mathbf{0},\quad \text{即 } \boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}.$$

用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式,并代入 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{A0}=\mathbf{0}$. 所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

【证法二】(用秩) 对于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,把 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 均按行分块,记作

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行,$\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ 的第 i 个分量为 1.

用分块矩阵乘法,易见 $a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{e}_1$,即 $\boldsymbol{e}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出. 同理,$\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 也均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

显然,坐标向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 可表示任一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=b_{i1}\boldsymbol{e}_1+b_{i2}\boldsymbol{e}_2+\cdots+b_{in}\boldsymbol{e}_n$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 可互相线性表出,是等价向量组,有相同的秩. 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{r}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=n.$$

因为,矩阵的秩 = 行秩 = 列秩(【定理 3.8】),由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$ 知,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

【证法三】(用秩) 因为 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,且 $n<m$,从矩阵秩的定义知:$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 又因

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{E})=n,$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$,那么 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩是 n,即其线性无关.

【例 3.20】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$,$\boldsymbol{A\alpha}_1=k\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=l\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=l\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$,$l\neq0$,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【分析】 对 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,如何证明组合系数 $k_1=k_2=k_3=0$ 呢?要作恒等变形就应仔细分析已知条件,$\boldsymbol{A\alpha}_i$ 的条件其实就是

$$(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0},\quad(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=l\boldsymbol{\alpha}_1,\quad(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=l\boldsymbol{\alpha}_2.$$

这启发我们应用 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 左乘来作恒等变形.

【证明】(定义法,同乘) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,用 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 左乘有

$$k_1(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

即 $$k_2l\boldsymbol{\alpha}_1+k_3l\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},\quad \text{亦即 } k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.$$

再用 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 左乘,可得 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$,故必有 $k_3=0$,依次往上代入得 $k_2=0$ 及 $k_1=0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【例 3.21】 证明 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是

$$D=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)&\cdots&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n)\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)&\cdots&(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2)&\cdots&(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n)\end{vmatrix}\neq0.$$

【分析】 要证 n 个 n 维向量线性无关,可利用充要条件 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq0$. 由于内积

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta},$$

www.TopSage.com

对行列式 D 可用分块矩阵恒等变形.

【证法一】 令 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,则 $D=|A^{\mathrm{T}}A|$. 那么

$$D=|A^{\mathrm{T}}A|=|A^{\mathrm{T}}||A|=|A|^2.$$

可见 $|A|\neq 0$ 的充要条件是 $D\neq 0$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是 $D\neq 0$.

【证法二】 如 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$,分别用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 作内积,有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n)x_n=0,\\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n)x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n)x_n=0.\end{cases}\quad(*)$$

于是, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全为 0

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组(*)只有零解

$\Leftrightarrow$ 系数行列式 $D\neq 0$.

【例 3.22】 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,证明:表示法唯一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

【证明】 $\Rightarrow$ 必要性(反证法) 如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则存在不全为 0 的数 $l_1,l_2,\cdots,l_s$,使

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

因已知 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,设为 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$,两式相加,可得到

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s+l_s)\boldsymbol{\alpha}_s.$$

由于 l_i 不全为 0,故 $k_1+l_1,k_2+l_2,\cdots,k_s+l_s$ 与 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是两组不同的数,即 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种不同的表示法,与已知矛盾.

$\Leftarrow$ 充分性(反证法) 若 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种不同的表达式,设为

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s,\quad \boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_s\boldsymbol{\alpha}_s.$$

两式相减,得 $(x_1-y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_s-y_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$,

由于 $x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_s-y_s$ 不全为 0(否则是一种表示法)得,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,与已知矛盾.

【例 3.23】 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是 n 维实向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,已知 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量. 试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

【分析】 因为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组的解,故有

$$\begin{cases}a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n=0,\\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_{r1}b_1+a_{r2}b_2+\cdots+a_{rn}b_n=0,\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,r)$ 正交,利用几何直观可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

【解】 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,l$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}\quad(*)$$

成立,则因 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组

www.TopSage.com

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解,故有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,r)$.

对(*)式,左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 有 $k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r + l\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$.

得 $l\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$,由于 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$,知 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \neq 0$,故 $l = 0$.

代入(*)式知 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$,由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,所以得

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0.$$

因此,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

【例 3.24】 设 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关,且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都正交.证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关.

【证明】 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 构造 $(n-1)\times n$ 矩阵:$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$. 因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都正交,有 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 = 0$,进而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{\beta}_1$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的非零解.同理 $\boldsymbol{\beta}_2$ 也是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解.

又因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}) = n-1$,齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系仅由 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$ 个解向量构成,从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.若

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} + l\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}, \qquad (*)$$

那么,用 $\boldsymbol{\beta}_1$ 作内积,有 $k_1(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_{n-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}) + l(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1) = 0$.

因为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n-1)$,及 $\|\boldsymbol{\beta}_1\| \neq 0$,有 $l(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1) = l\|\boldsymbol{\beta}_1\|^2 = 0$,

得到 $l = 0$.将 $l = 0$ 代入(*)式,有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \mathbf{0}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关,得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$,所以(*)中组合系数必全是零,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关.

【例 3.25】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【证法一】(用定义) 据已知条件有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \qquad ①$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘①式的两端,并代入已知条件,有

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}. \qquad ②$$

① − ② 得 $\qquad 2k_1\boldsymbol{\alpha}_1 - k_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,从而 $k_1 = 0,k_3 = 0$.

将其代入①式得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$.因为 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是特征向量,必有 $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$,从而 $k_2 = 0$.

因此,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【证法二】(用反证法) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 必线性无关.从而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2, \qquad ①$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘①式两端,并把 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$ 代入,得

$$\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = -k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2. \qquad ②$$

① − ② 得 $\qquad -\boldsymbol{\alpha}_2 = 2k_1\boldsymbol{\alpha}_1$.

由此得出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关,与题设矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

www.TopSage.com

评注 线性相关、线性无关的证明，常用的思路是用定义，设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}, \qquad (\triangle)$$

然后对此式作恒等变形(要向已知条件靠拢!).

虽由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ 得不到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$，消去律是不成立的，但从 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ 可得到 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$. 因此恒等变形的一种重要技巧就是按已知条件的信息，对(△)式乘上某个"$\boldsymbol{A}$"(如【例 3.18】,【例 3.20】,【例 3.23】以及【例 3.19】的【证法一】,【例 3.21】的【证法二】等)，另一方法是展开整理(△)式，直接用已知条件转化为齐次线性方程组(如【例 3.17】的【证法一】)，最后通过分析论证 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 的取值，得由所需结论.

另外，反证法，行列式，初等变换，等价向量组，矩阵秩的定义及性质也都可用来判断证明(如【例 3.17】,【例 3.18】的【证法二】,【例 3.19】的【证法二】与【证法三】,【例 3.22】等).

题型三 求秩与极大线性无关组

【例 3.26】 (Ⅰ) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,3,4,5)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (3,4,5,6)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (4,5,6,7)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = (5,6,7,8)^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) =$ _____;

(Ⅱ) 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，则秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}) =$ _____.

【分析】 初等变换不改变秩(向量组或矩阵)，阶梯形向量组线性无关，求秩通常是用矩阵的初等变换化为阶梯形来寻求答案.

(Ⅰ) $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

可见 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 2$.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})$，又矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})$，易见 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = 1$.

【例 3.27】 (Ⅰ) 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & a \\ 2 & 7 & a & 3 \\ 0 & a & 5 & -5 \end{bmatrix}$，如果秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$，则 a 必为

(A) $\frac{5}{2}$. (B) 5. (C) -1. (D) 1.

(Ⅱ) 设 $n(n \geqslant 3)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，如伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = 1$，则 a 为

(A) 1. (B) $\frac{1}{1-n}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{n-1}$.

【分析】 (Ⅰ) 经初等变换矩阵的秩不变，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

www.TopSage.com

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2&a\\2&7&a&3\\0&a&5&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2&a\\0&1&a-4&3-2a\\0&a&5&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2&a\\0&1&a-4&3-2a\\0&0&5+4a-a^2&2a^2-3a-5\end{bmatrix}.$$

由 $5+4a-a^2=(a+1)(5-a)$，$2a^2-3a-5=(2a-5)(a+1)$，

可见 $a=-1$ 时，$A\to\begin{bmatrix}1&3&2&-1\\0&1&-5&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，此时秩 $r(A)=2$．故应选(C)．

(Ⅱ)由伴随矩阵秩的公式 $r(A^*)=\begin{cases}n, & \text{若 } r(A)=n,\\ 1, & \text{若 } r(A)=n-1,\\ 0, & \text{若 } r(A)<n-1\end{cases}$ 知 $r(A)=n-1$，那么 $|A|=0$ 且有 $n-1$ 阶子式不为0．

如 $a=1$，显然 $|A|$ 的二阶子式全为0，故(A)不入选．而 $a\neq 1$ 时，由题设有

$$|A|=[(n-1)a+1]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+1]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1-a&0&\cdots&0\\0&0&1-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1-a\end{vmatrix}=0,$$

必有 $(n-1)a+1=0$，故应选(B)．

【注】 复习特征值之后，用相似对角化来处理会更简捷．

【例3.28】 求向量组

$\alpha_1=(1,1,4,2)^T$，$\alpha_2=(1,-1,-2,4)^T$，$\alpha_3=(-3,2,3,-11)^T$，$\alpha_4=(1,3,10,0)^T$ 的一个极大线性无关组．

【解法一】 把行向量组成矩阵，用初等行变换化成阶梯形，有

$$\begin{bmatrix}1&1&4&2\\1&-1&-2&4\\-3&2&3&-11\\1&3&10&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&4&2\\0&-2&-6&2\\0&5&15&-5\\0&2&6&-2\end{bmatrix}\begin{matrix}\alpha_1\\\alpha_2-\alpha_1\\\alpha_3+3\alpha_1\\\alpha_4-\alpha_1\end{matrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&4&2\\0&-1&-3&1\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\alpha_1\\\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\\\frac{1}{5}(\alpha_3+3\alpha_1)\\\alpha_4-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&4&2\\0&-1&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\alpha_1\\\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\\\frac{1}{5}(\alpha_3+3\alpha_1)+\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\\\alpha_4-2\alpha_1+\alpha_2\end{matrix}$$

所以，α_1，α_2 是一个极大线性无关组．

评注 这种解法，从阶梯形矩阵有两个非零行向量，知向量组的秩是2，非零向量是 α_1，$\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)$，所以，$\alpha_1$，$\alpha_2$ 是极大线性无关组．

从第3行是零向量，有 $\alpha_3=-\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{5}{2}\alpha_2$，即用极大线性无关组表示出 α_3．同理也可表示出 α_4，如若题目要求用极大线性无关组表示其余的向量，可考虑这种解法．

www.TopSage.com

【解法二】 把 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 写成列向量，构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，再作初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形，即

$$\begin{bmatrix}1&1&-3&1\\1&-1&2&3\\4&-2&3&10\\2&4&-11&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-3&1\\0&-2&5&2\\0&-6&15&6\\0&2&-5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-3&1\\0&-2&5&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

那么阶梯形矩阵中每一行第一个非零元所在的列对应的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是极大线性无关组.

评注 由于

$$(-3,5,0,0)^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{2}(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}+\frac{5}{2}(1,-2,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$(1,2,0,0)^{\mathrm{T}}=2(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}-(1,-2,0,0)^{\mathrm{T}},$$

所以如果需要线性表出，则有 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{5}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

【解法三】 由 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关. 考察 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，现 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq k\boldsymbol{\alpha}_1$，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关；再考察 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，对于方程 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，现有非零解，例如 $\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，在极大线性无关组中应去掉 $\boldsymbol{\alpha}_3$. 最后看 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，因为 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，所以添加 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 后仍线性相关，因此极大线性无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

评注 当向量组中向量个数较多或向量的分量较复杂时，【解法三】这种逐步扩充法是麻烦的. 行向量作行变换(【解法一】)，列向量作行变换(【解法二】)是求极大无关组的两个基本方法.

【例 3.29】 设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

【解法一】 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+10&2&3&4\\a+10&2+a&3&4\\a+10&2&3+a&4\\a+10&2&3&4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3,$$

那么，当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\quad\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\quad\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1.$$

当 $a=-10$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4).$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

【解法二】 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

www.TopSage.com

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ -a & a & 0 & 0\\ -a & 0 & a & 0\\ -a & 0 & 0 & a\end{bmatrix}=B.$$

大家网 TopSage.com

当 $a=0$ 时，秩 $r(A)=1$，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．此时 α_1 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_1$ ．

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等变换有

$$B\to\begin{bmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+10 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4).$$

如果 $a\neq -10$，则秩 $r(C)=4,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．

如果 $a=-10$，则秩 $r(C)=3$，从而 $r(A)=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．

由于 $\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 是 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 的一个极大线性无关组且 $\gamma_1=-\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4$，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$ ．

评注 要会化为阶型．

【例 3.30】 已知向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；(Ⅲ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$，如果它们的秩分别为 r(Ⅰ)=r(Ⅱ)=3，r(Ⅲ)=4，求 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)$．

【分析】 由于 r(Ⅰ)=3，得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5$ 的秩至少是3，能否是4?关键就看 $\alpha_4+\alpha_5$ 能否用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，或者看向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5$ 是线性相关还是线性无关．

【解法一】 由 r(Ⅰ)=r(Ⅱ)=3，知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，故 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出．设 $\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$ ．

如果 $\alpha_4+\alpha_5$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，设 $\alpha_4+\alpha_5=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，则

$$\alpha_5=(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+(k_3-l_3)\alpha_3.$$

于是 α_5 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性相关，与已知 r(Ⅲ)=4 相矛盾．所以 $\alpha_4+\alpha_5$ 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，由秩的定义知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)=4$．

【解法二】 如果 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4(\alpha_4+\alpha_5)=0$，把 $\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$（理由同前，略）代入有

$$(x_1+l_1x_4)\alpha_1+(x_2+l_2x_4)\alpha_2+(x_3+l_3x_4)\alpha_3+x_4\alpha_5=0.$$

由 r(Ⅲ)=4，知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关，从而

$$\begin{cases}x_1+l_1x_4=0,\\ x_2+l_2x_4=0,\\ x_3+l_3x_4=0,\\ x_4=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=0,\text{下略}.$$

【解法三】 同前，设 $\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，构造矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)$ 作初等列变换．

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)\xrightarrow[l_2r_2+r_4]{l_1r_1+r_4\atop l_3r_3+r_4}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3),$$

即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)\xrightarrow{\text{列变换}}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5+\alpha_4)$．由于初等变换不改变秩，故 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5+\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4$．

www.TopSage.com

题型四　有关秩的证明

【例 3.31】　设 A 是 n 阶矩阵，证明 $r(A^*)=\begin{cases} n, & \text{如 } r(A)=n,\\ 1, & \text{如 } r(A)=n-1,\\ 0, & \text{如 } r(A)\leqslant n-2. \end{cases}$

【证明】　若 $r(A)=n$，则 $|A|\neq 0$，A 可逆，于是 $A^*=|A|A^{-1}$ 可逆，故 $r(A^*)=n$.

若 $r(A)\leqslant n-2$，则 $|A|$ 中所有 $n-1$ 阶行列式全为 0，于是 $A^*=0$，即 $r(A^*)=0$.

若 $r(A)=n-1$，则 $|A|=0$，但存在 $n-1$ 阶子式不为 0，因此 $A^*\neq 0$，$r(A^*)\geqslant 1$，又因

$$AA^*=|A|E=0,$$

有 $r(A)+r(A^*)\leqslant n$，即 $r(A^*)\leqslant n-r(A)=1$，从而 $r(A^*)=1$.

评注　伴随矩阵 A^* 的秩只有 3 种取值，这一特点应当记住．如 $n\geqslant 3$，$(A^*)^*$ 的秩有几种取值？本题的证明会帮考生对秩的概念很清晰，同时对秩的重要公式"如 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\leqslant n$"会灵活运用．

【例 3.32】　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，证明 $r(AB)\leqslant r(B)$.

【证法一】　设 $AB=C$，C 是 $m\times s$ 矩阵，对 B，C 均按行分块，记为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m \end{bmatrix},$$

用分块矩阵乘法，得

$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}_1,\\ a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}_2,\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}_m, \end{cases}$$

即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，那么由【定理 3.10】有

$$r(AB)=r(C)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(B).$$

【证法二】　构造两个齐次线性方程组

$$ABx=0 \quad ①;\quad Bx=0 \quad ②,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_s)^{\mathrm{T}}$.

由于方程组 ② 的解必是方程组 ① 的解，因此 r(② 的解向量) $\leqslant$ r(① 的解向量).

即 $s-r(B)\leqslant s-r(AB)$，从而 $r(AB)\leqslant r(B)$.

【证法三】　设 $r(B)=r$，化 B 为等价标准形即有可逆矩阵 P，Q，使

$$PBQ=\begin{bmatrix} E_r & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow ABQ=AP^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对 $m\times n$ 矩阵 AP^{-1} 分块为 (C_1,C_2)，其中 C_1 是 $m\times r$ 矩阵，C_2 是 $m\times(n-r)$ 矩阵，则有

$$ABQ=(C_1,C_2)\begin{bmatrix} E_r & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}=(C_1,0).$$

那么　　$r(AB)=r(ABQ)=r(C_1,0)=r(C_1)$.

因为 C_1 是 $m\times r$ 矩阵，故 $r(C_1)\leqslant r=r(B)$. 所以 $r(AB)\leqslant r(B)$.

www.TopSage.com

【例 3.33】 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置,证明:

(Ⅰ)秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

【证法一】 (Ⅰ)利用 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ 和 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B}))$,有

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})+r(\boldsymbol{\beta}).$$

又 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维列向量,则 $r(\boldsymbol{\alpha})\leqslant 1, r(\boldsymbol{\beta})\leqslant 1$. 故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

(Ⅱ)当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时,不妨设 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$,则

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+k^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=r[(1+k^2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}]=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})\leqslant 1<2.$$

【证法二】 (Ⅰ)因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维列向量,故存在非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均正交,即

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,\quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,进而 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

即齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非 0 解,故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

(Ⅱ)因为齐次方程组 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 有 2 个线性无关的解,设为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$,那么

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1=0,\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_2=0.$$

若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,不妨设 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$,那么

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1=(k\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1=k\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1=0,\quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_2=(k\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_2=k\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_2=0.$$

于是 $\boldsymbol{A\eta}_1=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A\eta}_2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{0}$,

即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 至少有 2 个线性无关的解,因此 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1<2$.

评注 这几个题告诉我们,可以用行列式是否为 0 来判断秩的大小,还可理解"矩阵的秩 = 行秩 = 列秩";有关矩阵秩的问题常转化为向量组来讨论,齐次方程组的基础解系由 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解向量所构成,它与秩有关联,因而秩的论证有时也通过构造齐次方程组来实现;初等变换不改变矩阵的秩,因而化其为等价标准形,再进行分析论证.这些常用方法需生疏了解.

题型五 关于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$

【例 3.34】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-2\\5&2&0\\3&a&4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非 0 矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,则 $a=$_____.

【分析】 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,有 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$. 又因 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,有 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$.

从而 $r(\boldsymbol{A})<3$,因此行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$. 又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-2\\5&2&0\\3&a&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-2\\5&2&0\\7&a+2&0\end{vmatrix}=-2(5a-4),$$

所以 $a=\dfrac{4}{5}$.

【例 3.35】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解是_____.

【分析】 由于 $|\boldsymbol{A}|=0$,秩 $r(\boldsymbol{A})=2$,知 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$(参看【例 3.31】).

那么 $n-r(\boldsymbol{A}^*)=3-1=2$. 从而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解形式为:$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$.

又 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

www.TopSage.com

所以 $A^*x=0$ 的通解为：$k_1(1,2,-1)^T+k_2(1,0,1)^T$.

[评注] $AB=0$ 是一个常见的知识点，由[例3.6]知，对于 $AB=0$ 要会用 $r(A)+r(B)\leqslant n$（如[例3.34]），也要会将 B 的列向量是齐次方程组 $Ax=0$ 的解（如[例3.35]）.

[例3.36] （Ⅰ）已知 $Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$P$ 是3阶非零矩阵，且 $PQ=0$，则

（A） $t=6$ 时，$r(P)=1$.　　（B） $t=6$ 时，$r(P)=2$.

（C） $t\neq 6$ 时，$r(P)=1$.　　（D） $t\neq 6$ 时，$r(P)=2$.

（Ⅱ）设 A,B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有

（A） A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

（B） A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

（C） A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

（D） A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

【分析】 （Ⅰ）若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$，则由 B 的每列都是 $Ax=0$ 的解，可有 $r(A)+r(B)\leqslant n$，从而 $r(P)\leqslant 3-r(Q)$.

如 $t=6$，则 $r(Q)=1$，得 $r(P)\leqslant 2$. 因此(A)，(B)应排除. 如 $t\neq 6$，则 $r(Q)=2$，得 $r(P)\leqslant 1$. 因此(D)不正确，而 P 非零，$r(P)\geqslant 1$，故仅(C)正确.

（Ⅱ） 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，满足 $AB=0$，且 A,B 均为非零矩阵，那么

$$r(A)+r(B)\leqslant n,\quad r(A)\geqslant 1,\quad r(B)\geqslant 1.$$

所以必有　　$r(A)<n$　且　$r(B)<n$.

因为，秩 $r(A)=A$ 的列秩 $<n$，$r(B)=B$ 的行秩 $<n$，故 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关. 应选(A).

[例3.37] 设 A 是 n 阶矩阵，$A^2=E$，证明：$r(A+E)+r(A-E)=n$.

【证明】 由 $A^2=E$，得 $A^2-E=0$，即 $(A-E)(A+E)=0$. 故

$$r(A-E)+r(A+E)\leqslant n.$$

又
$$\begin{aligned}r(A-E)+r(A+E)&=r(E-A)+r(A+E)\\&\geqslant r[(E-A)+(A+E)]=r(2E)=r(E)=n,\end{aligned}$$

所以　　$r(A-E)+r(A+E)=n$.

题型六　关于 $A=0$ 的证明

[例3.38] 已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，$r(B)=n$，$AB=0$，证明 $A=0$.

【证法一】 由 $r(B)=n$，知 B 的列向量中有 n 个是线性无关的，设为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 令 $B_1=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，它是 n 阶矩阵，其秩是 n，因此 B_1 可逆. 由 $AB=0$，知 $AB_1=0$，那么右乘 B_1^{-1}，得 $A=(AB_1)B_1^{-1}=0B_1^{-1}=0$.

【证法二】 由 $AB=0$ 知 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$ 的每一列都是齐次方程组 $Ax=0$ 的解，因为 $r(B)=n$，故 $Ax=0$ 至少有 n 个线性无关的解，但 $Ax=0$ 最多有 $n-r(A)$ 个线性无关的解，于是 $n\leqslant n-r(A)\Rightarrow r(A)\leqslant 0$，按秩的定义又有 $r(A)\geqslant 0$，所以 $r(A)=0$，即 $A=0$.

【证法三】 对矩阵 B 按行分块，有

www.TopSage.com

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n\\a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots\\a_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

那么 $a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$.

因为 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,于是组合系数

$$a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n}\equiv 0.$$

同理,得 $a_{ij}\equiv 0$,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

【证法四】 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 又 $r(\boldsymbol{B})=n$,故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 0$. 显然 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 0$. 所以必有 $r(\boldsymbol{A})=0$,即有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

【例 3.39】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

【证法一】 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,而

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}^2&&&*\\&\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}^2&&\\&&\ddots&*&&&\sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}^2\end{bmatrix},$$

于是由 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}^2=0$,$a_{1j}$ 均是实数,知 $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n}=0$. 同理知 $a_{2j}\equiv 0,\cdots,a_{nj}\equiv 0,\forall j=1,2,\cdots,n$,$\boldsymbol{A}$ 的元素全是 0,所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

【证法二】 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,那么对任一个 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0,\text{即}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=0,\text{亦即}\ \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\|=0.$$

可见 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是零向量,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 也就是任一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,因而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有 n 个线性无关的解,于是 $n\leqslant n-r(\boldsymbol{A})$,即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 0$. 又因 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 0$,所以 $r(\boldsymbol{A})=0$,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

【证法三】 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 必可对角化. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,由此可得 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1}$. 由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{\Lambda}^2=\boldsymbol{0}$,由此可得 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{0}$. 所以,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{0}$.

评注 $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2=\boldsymbol{0}$,$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}^2=\boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,可见要对矩阵条件是重要的.

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 与 $|\boldsymbol{A}|=0$ 是两个完全不同的概念,在证明时处理的方法明显不同,一定不要混淆. 请对照第一章中题型四的讲解概念与方法.

证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 的基本方法是:或证明 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素都为 0(或反证),或用秩,或证 $r(\boldsymbol{A})=0$.

题型七 有关向量空间的判定

【例 3.40】 判断下列 3 维向量的集合是不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间,如是子空间,则求其维数与一组基:

(Ⅰ) $W_1=\{(x,y,z)\mid x>0\}$;　　(Ⅱ) $W_2=\{(x,y,z)\mid x=0\}$;

(Ⅲ) $W_3=\{(x,y,z)\mid x+y-2z=0\}$;　　(Ⅳ) $W_4=\{(x,y,z)\mid 3x-2y+z=1\}$;

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

(Ⅴ) $W_5 = \left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{1}\right\}$.

【分析】 要判断 W 是不是子空间，就是要检查 W 对于向量的加法及数乘这两个运算是否封闭. 如 W 是子空间，则 W 中向量的极大线性无关组就是一组基，而向量组的秩就是子空间的维数.

【解】 (Ⅰ) W_1 不是子空间，因为 W_1 对数乘向量不封闭. 例如 $\boldsymbol{\alpha} = (1,2,3) \in W_1$，但 $k < 0$ 时，$k\boldsymbol{\alpha} = (k,2k,3k) \notin W_1$.

(Ⅱ) W_2 是子空间. 因为 $\boldsymbol{\alpha} = (0,a,b)$，$\boldsymbol{\beta} = (0,c,d) \in W_2$，而

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (0,a+c,b+d) \in W_2, \quad k\boldsymbol{\alpha} = (0,ka,kb) \in W_2,$$

即 W_2 对于运算封闭，W_2 是子空间. 又 $(0,1,0),(0,0,1)$ 线性无关且能表示 W_2 中任一向量，因而是 W_2 的一组基，那么 $\dim W_2 = 2$.

(Ⅲ) W_3 是子空间，如 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in W_3$，即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是齐次方程 $x+y-2z=0$ 的解. 由于 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, k\boldsymbol{\alpha}$ 仍是解，故 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in W_3$，$k\boldsymbol{\alpha} \in W_3$，$W_3$ 对运算封闭，是子空间.

$$(-1,1,0),(2,0,1)$$

是基础解系，也就是 W_3 的一组基，那么 $\dim W_3 = 2$.

(Ⅳ) W_4 不是子空间. 因为非齐次方程组的解相加不再是此方程组的解，即 W_4 对加法不封闭.

(Ⅴ) W_5 不是子空间，因为条件等同于 $\begin{cases} x+2y = 1, \\ y+z = -2, \end{cases}$ 理由同(Ⅳ).

评注 n 维向量与 n 维向量空间是两个不同的概念：n 维向量是指每个向量有 n 个分量，而 n 维向量空间是指这个向量集合中，有 n 个线性无关的向量，而任意 $n+1$ 个向量是线性相关的. 例如，W_2 是 3 维向量的集合，但其中存在两个向量 $(0,1,0),(0,0,1)$ 线性无关，而任意 3 个向量必线性相关，所以 W_2 作为空间是 2 维的.

题型八 向量坐标、过渡矩阵及坐标变换

【例 3.41】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一组基，求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,1,1)$ 在这组基下的坐标.

【分析】 求 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标，也就是求 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出时的组合系数.

【解】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta}$，按分量写出，有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = -\frac{1}{4}.$$

因此，$\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标是 $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$.

【例 3.42】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，证明 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$ 也是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，并求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

【分析】 要证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 3 维空间的一组基，也就是要证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

www.TopSage.com

【证明】 由于$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3| = \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{vmatrix} = 4 \neq 0$,所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关,因此它是3维空间$\mathbf{R}^3$的一组基.

设由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$,则$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$,故

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}.$$

评注 求过渡矩阵$\boldsymbol{C}$可以先求$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$再作乘法,也可以作初等行变换

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 : \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\boldsymbol{E} : \boldsymbol{C}),$$

直接求出$\boldsymbol{C}$,可参看本章考试知识要点讲解中的矩阵方程.

【例3.43】 已知$\mathbf{R}^3$的两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

(Ⅰ)求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵;

(Ⅱ)求$\boldsymbol{\gamma} = (9,6,5)^{\mathrm{T}}$在这两组基下的坐标;

(Ⅲ)求向量$\boldsymbol{\delta}$,使它在这两组基下有相同的坐标.

【解】 (Ⅰ)设从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵是$\boldsymbol{C}$,则$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$,故

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}.$$

(Ⅱ)设$\boldsymbol{\gamma}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下坐标是$(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$,即$y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2 + y_3\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\gamma}$,亦即

$$\begin{cases} -y_2 + y_3 = 9,\\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 6,\\ y_1 + y_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow\quad y_1 = 0,\ y_2 = -4,\ y_3 = 5.$$

设$\boldsymbol{\gamma}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下坐标是$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,按坐标变换公式$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$,有

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},$$

可见$\boldsymbol{\gamma}$在这两组基下的坐标分别是$(1,2,4)^{\mathrm{T}}$和$(0,-4,5)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅲ)设$\boldsymbol{\delta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3$,即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\beta}_3) = \boldsymbol{0},$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0,\\ -x_1 - x_3 = 0,\\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow\quad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

所以,仅零向量在这两组基下有相同的坐标.

评注 请读者先求$\boldsymbol{\gamma}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标,再用过渡矩阵$\boldsymbol{C}$求$\boldsymbol{\gamma}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

【例3.44】 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是3维向量空间$\mathbf{R}^3$的一组基,则由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2 +$

$\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

【分析】　按过渡矩阵概念:(新基) = (旧基)·过渡矩阵,那么过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 应满足关系式

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = \left(\boldsymbol{\alpha}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{C}.$$

由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

又$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆,从而

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

所以应选(A).

【例 3.45】　设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 是坐标变换,证明 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{0}$.

【证明】　⇒ 必要性(反证法)　若 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ 与已知 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ 矛盾. 故 $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{0}$.

⇐ 充分性(反证法)　若 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$,由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{0}$,而 $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{0}$,知齐次线性方程组

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

有非 0 解,那么系数行列式 $|\boldsymbol{C}| = 0$,这与 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 是坐标变换,$\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵相矛盾,故 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$.

题型九　规范正交基

【例 3.46】　设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 5×4 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的一个规范正交基.

【解】　因为秩 $r(\boldsymbol{B}) = 2$,所以解空间的维数是 $n - r(\boldsymbol{B}) = 4 - 2 = 2$. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是解空间的一组基.

www.TopSage.com

令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = (-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}(-4,2,10,-6)^{\mathrm{T}},$$

再单位化,得 $\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}}$,

即是解空间的一个规范正交基.

评注 从 $r(\boldsymbol{B}) = 2$,知解空间的维数是 $n - r(\boldsymbol{B}) = 4 - 2 = 2$,那么,3 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 一定线性相关,应当先从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中筛选出基(不唯一),再 Schmidt 正交化.一些考生不判断解空间的维数也不判断 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的线性相关性,而是直接对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 用 Schmidt 正交化这是不妥的.本题解答不唯一.

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $k\boldsymbol{\alpha}$ 虽不同,但单位化后是一样的,即 $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} = \frac{k\boldsymbol{\alpha}}{\|k\boldsymbol{\alpha}\|}$.因此,对 $\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化时,为了简捷少出错,只需把 $(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}}$ 或 $(2,-1,-5,3)^{\mathrm{T}}$ 单位化即可.

【例 3.47】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,3,-2)^{\mathrm{T}}$,试把其扩充为 $\mathbf{R}^4$ 的一组规范正交基.

【分析】 要先判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性相关性,再扩充成 $\mathbf{R}^4$ 的一组基(可用阶梯形向量组是线性无关的),然后再用 Schmidt 正交化改造为规范正交基.

【解】 由 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,故可将其扩充为 $\mathbf{R}^4$ 的一组基.例如添加 $(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.那么,令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}\text{(已互相正交)},$$

而

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,0,-1)^{\mathrm{T}} - \frac{-1}{1}(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

$$= (1,2,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_4 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3)}\boldsymbol{\beta}_3$$

$$= (0,1,-1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{-1}{1}(0,0,1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{5}(1,2,0,0)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}(-2,1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

再单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\gamma}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0,0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\gamma}_4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0,0\right)^{\mathrm{T}},$$

就是合于所求的一组规范正交基.

评注 把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充成 $\mathbf{R}^4$ 的一组基不是唯一的,因而本题的答案也不唯一.在正交化时,可调动 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的顺序以使运算简化(除非题目已经限定了次序).

题型十 有关秩与直线平面的综合题

【例 3.48】 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的,则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_2-c_3}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置是

www.TopSage.com

(A) 相交于一点. (B) 重合.

(C) 平行但不重合. (D) 异面.

【分析】 初等变换不改变矩阵的秩,由

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 & c_3 - c_2 \end{bmatrix}$$

可知,后者的秩仍应是 3. 所以直线的方向向量 $\boldsymbol{S}_1 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$, $\boldsymbol{S}_2 = (a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 线性无关,因此排除(B),(C).

究竟是相交还是异面呢?在这两条直线上各取一点 (a_3, b_3, c_3) 与 (a_1, b_1, c_1),可构造向量 $\boldsymbol{S} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$,如果 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ 共面,则两直线相交,如 $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3$ 不共面,则两直线异面. 而三个向量的共面问题可用向量的混合积或线性相关性来判断. 例如

$$(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2) = \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

或 $\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{0}$,所以,应选(A).

【例 3.49】 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_i, b_i, c_i)^{\mathrm{T}}, i = 1,2,3$,则平面上三条直线 $a_1x + a_2y + a_3 = 0, b_1x + b_2y + b_3 = 0, c_1x + c_2y + c_3 = 0$ 交于一点的充分必要条件是

(A) $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = 0$. (B) $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| \neq 0$.

(C) $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

【分析】 三条直线交于一点的充要条件是方程组 $\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3 = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3 = 0, \\ c_1x + c_2y + c_3 = 0 \end{cases}$ 有唯一解,即 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出且表示法唯一. 故(D)正确.

(B)肯定错,它表示 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 方程组无解. 而(A),(C)均是交于一点的必要条件,仅行列式为 0 不能排除其中有平行直线,对于(C),因为秩可能是 1,也就可能有平行直线. 作为充要条件(A),(C)是不正确的.

【例 3.50】 设空间中有三个平面

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0,$$

如记 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_i, b_i, c_i)$ $(i = 1,2,3)$ 是平面的法向量,$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{bmatrix}$ 是方程组的系数矩阵,$\overline{\boldsymbol{A}}$ 是增广矩阵,$\boldsymbol{\beta}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的延伸向量.

(Ⅰ)平面两两不平行,有且仅有一个公共点的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.

这可从方程组有唯一解来推导,亦可从法向量来看,这时的三个法向量不共面,因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$,$\boldsymbol{\alpha}_i$ 延伸后 $\boldsymbol{\beta}_i$ 仍线性无关. 故 $\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.

(Ⅱ)三个平面两两相交,围成一个三棱柱的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,但任两个线性无关,且 $\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.

法向量在与三棱柱的棱垂直的平面上,因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面,但不共线,因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,但任两个线性无关,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$,此时方程组无解,$\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.

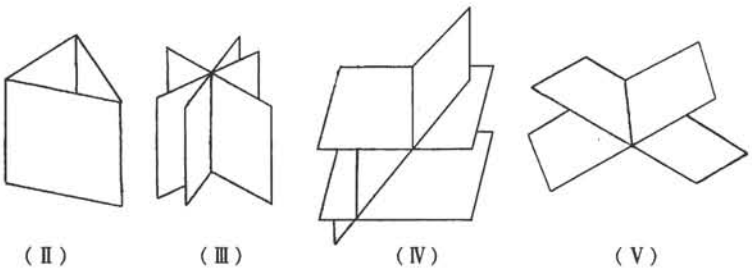
www.TopSage.com

（Ⅲ）三个平面两两不平行，并有一条公共直线的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，但任两个线性无关，且 $r(\overline{A})=2$.

评注 （Ⅱ）与（Ⅲ）法向量情况一样，区别仅在方程组有解或无解，从而 $r(A)=3$ 或 $r(\overline{A})=2$.

（Ⅳ）有两个平面平行（不重合），第三个平面与它们相交的充要条件是 α_1,α_2 线性相关，但 α_3 不能用 α_1,α_2 线性表出，且 $r(\overline{A})=3$.

（Ⅴ）有两个平面重合，第三个平面与它们相交的充要条件是 β_1,β_2 线性相关，但 α_3 不能用 α_1,α_2 线性表出，且 $r(\overline{A})=2$.



（Ⅱ）　（Ⅲ）　（Ⅳ）　（Ⅴ）

评注 对（Ⅱ）~（Ⅳ）都有法向量共面但不共线，因此 $r(A)=2$；（Ⅲ），（Ⅴ）有交点，$r(\overline{A})=2$；（Ⅱ），（Ⅳ）无公共点，$r(\overline{A})=3$.

题型训练

一、选择题

1. 设向量组 α,β,γ 线性无关，α,β,δ 线性相关，则

（A） α 必可由 β,γ,δ 线性表示.　（B） β 必不可由 α,γ,δ 线性表示.

（C） δ 必可由 α,β,γ 线性表示.　（D） δ 必不可由 α,β,γ 线性表示.

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是

（A） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均不是零向量.

（B） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

（C） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 线性无关.

（D） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表出.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是3维非零向量，则下列说法正确的是

（A） 若 α_1,α_2 线性相关，α_3,α_4 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_4$ 也线性相关.

（B） 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+\alpha_4,\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关.

（C） 若 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

（D） 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意三个向量均线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

4. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，那么下列线性相关的向量组是

（A） $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.　（B） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_3$.

（C） $-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　（D） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.

5. 设向量组 Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则

（A） 当 $r<s$ 时，向量组（Ⅱ）必线性相关.　（B） 当 $r>s$ 时，向量组（Ⅱ）必线性相关.

（C） 当 $r<s$ 时，向量组（Ⅰ）必线性相关.　（D） 当 $r>s$ 时，向量组（Ⅰ）必线性相关.

6. 若 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$，则

（A） 向量组中任意 $r-1$ 个向量均线性无关.　（B） 向量组中任意 r 个向量均线性无关.

（C） 向量组中任意 $r+1$ 个向量均线性相关.　（D） 向量组中向量个数必大于 r.

www.TopSage.com

7. 设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，下列命题中正确的是

(A) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，那么 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}+\alpha_s,\alpha_s+\alpha_1$ 也线性无关.

(B) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，那么和它等价的向量组也线性无关.

(C) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，A 是 $m\times n$ 非零矩阵，那么 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 也线性相关.

(D) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，那么 α_s 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表出.

8. 已知 $A=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$，$r(A^*)=1$，则

(A) $a=b\neq 0$.　　(B) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$.

(C) $a+2b\neq 0$;　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

9. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=m<n$，则下列命题中不正确的是

(A) A 经初等行变换必可化为 $(E_m,0)$.　　(B) $\forall b\in\mathbf{R}^m$，方程组 $Ax=b$ 必有无穷多解.

(C) 如 m 阶矩阵 B 满足 $BA=0$，则 $B=0$.　(D) 行列式 $|A^TA|=0$.

10. 设 $\alpha_0=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$，$\alpha_1=(l_1,m_1,n_1)$，$\alpha_2=(l_2,m_2,n_2)$，则空间中两条直线

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad 与\quad L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

交于一点的充要条件是

(A) $r(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=2$.　　(B) $r(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2)=1$.

(C) $r(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=2,r(\alpha_1,\alpha_2)=1$.　　(D) $r(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2$.

二、填空题

1. 向量组 $\alpha_1=(1,0,1,2)^T,\alpha_2=(1,1,3,1)^T,\alpha_3=(2,-1,a+1,5)^T$ 线性相关，则 $a=$ _____.

2. 已知 $\alpha_1=(a,a,a)^T,\alpha_2=(-a,a,b)^T,\alpha_3=(-a,-a,-b)^T$ 线性相关，则 a,b 满足关系式 _____.

3. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1+\alpha_2,a\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ 线性相关，则 $a=$ _____.

4. 若 $\beta=(1,3,0)^T$ 不能由 $\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,3,a)^T,\alpha_3=(1,a+2,-2)^T$ 线性表出，则 $a=$ _____.

5. 任意3维向量都可用 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-2,3)^T,\alpha_3=(a,1,2)^T$ 线性表出，则 $a=$ _____.

6. 已知 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,0,-1,1)^T,\alpha_3=(6,0,0,5)^T$，则向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$ _____，极大线性无关组是_____.

7. 向量组 $\alpha_1=(1,-1,3,0)^T,\alpha_2=(-2,1,a,1)^T,\alpha_3=(1,1,-5,-2)^T$ 的秩为2，则 $a=$ _____.

8. 已知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)=r,r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma)=r+1$，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma)=$ _____.

9. 设4阶矩阵 A 的秩为2，则 $r(A^*)=$ _____.

10. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&a&0\\-1&-3&3\end{bmatrix}$ 且 $AXA^*=B$，秩 $r(X)=2$，则 $a=$ _____.

11. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&a\\-1&2&3\end{bmatrix}$，$B$ 是3阶非0矩阵，且 $BA^T=0$，则 $a=$ _____.

12. 与 $\alpha_1=(1,-1,0,2)^T,\alpha_2=(2,3,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1,2)^T$ 都正交的单位向量是_____.

13. 已知三维向量空间的一组基是 $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(1,-1,0),\alpha_3=(2,1,1)$，则向量 $\beta=(3,2,1)$ 在这组基下的坐标是_____.

www.TopSage.com

14. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&2&3\\2&6&5&8\\3&9&4&5\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 解空间的规范正交基是_____.

15. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是三维向量空间的两组基，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵是_____.

三、计算题与证明题

1. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,a,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,5,-3,a+6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,0,2,b)^{\mathrm{T}}$，问 a,b 取何值时，(Ⅰ) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}$ 能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，且表示法唯一；(Ⅲ) $\boldsymbol{\beta}$ 能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，且表示法不唯一，并写出此时表达式.

2. 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，求 a,b 的值.

3. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是互不相同的数，n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,s)$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩.

4. 如果秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1})$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，证明任一 n 维列向量均可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出.

6. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$）线性相关的充分必要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant s)$ 能由它前面的那些向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表出.

7. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times p$ 矩阵，如 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=m$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times s$ 矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，如果秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，证明秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{C})$.

9. 用 Schmidt 正交化方法将下列向量组规范正交化：

   $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,3)^{\mathrm{T}}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量，如 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}$，证明 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.

11. 设 $W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1-2x_2+x_3=0\}$，求向量空间 W 的维数及一组规范正交基.

www.TopSage.com

第四章　线性方程组

内容概要与重难点提示

线性方程组是线性代数的基础内容之一，首先应当会解方程组，主要方法是高斯消元法，特殊情况可考虑用克莱姆法则. 特别地，当方程组中有参数时，讨论解的各种情况时不要遗漏；其次，齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 总是有解的，我们关心的问题是它何时有非零解？有多少非零解？如何表示每个解？这就有基础解系等概念，要掌握基础解系的求法；第三，对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，要理解解的结构，有解的判定等问题；第四，对于两个方程组要会判断是否有公共解？是否同解？若有公共解，如何求出所有的公共解？最后，应注意方程组与向量组线性表示及秩之间的联系.

考核知识要点讲解

一、线性方程组的各种表达形式及相关概念

$$\text{线性方程组}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{4.1}$$

可用矩阵乘法表示为：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，(4.2)

其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$.

如果对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，方程组又可有向量形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.\tag{4.3}$$

如果 n 维列向量 $\boldsymbol{\xi}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 满足方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}$，则称 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量.

二、基础解系的概念及其求法

(一) 基础解系的概念

齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 恒有解(必有零解). 当有非零解时，由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的全体解向量构成一个向量空间，称为该方程组的**解空间**. 解空间的维数是 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，解空间的一组基称为齐次方程组的**基础解系**.

称 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的**基础解系**，即(1) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；(2) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关；(3) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解都可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性表出. 所谓基础解系，其实就是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量组的一个极大无关组.

$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\eta}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的**通解**(或全部解)，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是任意常数.

基础解系中解向量的个数是 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，且 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 也是每个解向量中自由变量的个数.

www.TopSage.com

（二）基础解系的求法

求基础解系时，可对 A 作初等行变换化为阶梯形矩阵，通常称每个非零行中第一个非 0 系数所代表的未知数是主元（共有 $r(A)$ 个主元），那么剩余的其他未知数就是自由变量（共有 $n-r(A)$ 个），当然也可在加减消元后找出秩为 $r(A)$ 的行列式，那么其他各列的未知数就是自由变量．对自由变量按阶梯形赋值后，再代入求解就可得到基础解系．

例如，若某齐次方程组 $Ax=0$ 经高斯消元，化为

$$\cdots\to\begin{bmatrix}1&-1&2&-5&3\\&&1&-2&0\\&&&2&-3\end{bmatrix},$$

则 $n-r(A)=5-3=2$，说明基础解系由 2 个向量组成．此时 x_1,x_3,x_4 是主元，x_2,x_5 是自由变量，因而可对自由变量赋值为

$$\eta_1=(\ \ ,1,\ \ ,\ \ ,0)^{\mathrm{T}},\quad \eta_2=(\ \ ,0,\ \ ,\ \ ,2)^{\mathrm{T}}.$$

再由下往上代入求解，得 $\eta_1=(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=(-3,0,6,3,2)^{\mathrm{T}}$．即 $Ax=0$ 的基础解系．

因为 $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&-3\end{vmatrix}\neq 0$，所以也可取 x_1,x_4 为自由变量，然后赋值求解．

【注】 因为 $(1,0),(0,2)$ 线性无关，延伸后 η_1,η_2 必线性无关，在 η_2 中令 $x_5=2$，是考虑 x_4 的系数是 2，为回避分数运算而设定的，通常是令 $x_5=1$．要理解基础解系概念，应正确迅速求解．

三、齐次方程组有非零解的判定

【定理 4.1】 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$，亦即 A 的列向量线性相关．

特别地，

【定理 4.2】 如 A 是 n 阶矩阵，$Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$．

【定理 4.3】 $Ax=0$ 有非零解的充分条件是 $m<n$（即方程个数 < 未知数个数）．

【注】 齐次方程组有非零解，关键在于系数矩阵的秩要小于未知数的个数（亦是系数矩阵中列向量的个数），【定理 4.2】用行列式来描述是有条件的，不要混淆，而【定理 4.3】反映的是任意 $n+1$ 个 n 维向量必定线性相关，亦说明 n 维向量的集合至多有 n 个向量线性无关．特别地，如 $AB=0$，则 B 的每一列都是 $Ax=0$ 的解，当 $B\neq 0$ 时，蕴涵 $Ax=0$ 有非零解，进而有 $r(A)+r(B)\leqslant n$．

四、非齐次线性方程组有解的判定

【定理 4.4】 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩，即 $r(A)=r(\overline{A})$（或者说，b 可由 A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，亦等同于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 是等价向量组）．

【定理 4.5】 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax=b$，则

(1) 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})=n$． (4.4)

(2) 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})<n$． (4.5)

(3) 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A)+1=r(\overline{A})$ (4.6)

$\Leftrightarrow$ b 不能由 A 的列向量线性表出.

【注】 如 $Ax=b$ 有唯一解,则 $Ax=0$ 只有零解;反之,当 $Ax=0$ 只有零解时,$Ax=b$ 没有无穷多解(可能无解,也可能只有唯一解,这一点要理解清楚).

大家网 TopSage.com

五、非齐次线性方程组解的结构

【定理 4.6】 如 n 元线性方程组 $Ax=b$ 有解,设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是相应齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系,ξ_0 是 $Ax=b$ 的某个已知解,则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t+\xi_0$ 是 $Ax=b$ 的**通解**(或全部解),其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 为任意常数.

六、线性方程组解的性质

1. 如果 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=b$ 的两个解,则 $\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解.
2. 如果 η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的两个解,则其线性组合 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 仍是 $Ax=0$ 的解.
3. 如果 ξ 是 $Ax=b$ 的解,η 是 $Ax=0$ 的解,则 $\xi+\eta$ 仍是 $Ax=b$ 的解.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 线性方程组解的基本概念

【例 4.1】 选择题

(Ⅰ) 对于 n 元方程组,下列命题正确的是

(A) 如果 $Ax=0$ 只有零解,则 $Ax=b$ 有唯一解.

(B) 如果 $Ax=0$ 有非零解,则 $Ax=b$ 有无穷多解.

(C) 如果 $Ax=b$ 有两个不同的解,则 $Ax=0$ 有无穷多解.

(D) $Ax=b$ 有唯一解的充要条件是 $r(A)=n$.

(Ⅱ) 已知 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 是 $Ax=0$ 的基础解系,则此方程组的基础解系还可选用

(A) $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_4,\eta_4+\eta_1$.

(B) $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的等价向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(C) $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的等秩向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(D) $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3-\eta_4,\eta_4-\eta_1$.

(Ⅲ) 已知 β_1,β_2 是 $Ax=b$ 的两个不同的解,α_1,α_2 是相应齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系,k_1,k_2 是任意常数,则 $Ax=b$ 的通解是

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$.　(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$.　(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

www.TopSage.com

(Ⅳ) 设 A 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵，α_1 与 α_2 是方程组 $Ax=0$ 的两个不同的解向量，则 $Ax=0$ 的通解必定是

(A) $\alpha_1+\alpha_2$. (B) $k\alpha_1$. (C) $k(\alpha_1+\alpha_2)$. (D) $k(\alpha_1-\alpha_2)$.

(Ⅴ) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解，则对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

【分析】 (Ⅰ) 当 $r(A)=n$ 时，不一定有 $r(\overline{A})=n$. 注意，n 元方程组只表示 A 有 n 个列向量，并不反映列向量的维数(即方程的个数)，此时可以有 $r(\overline{A})>n$，那么方程组可能无解，所以(A)，(B)，(D)均不对. 对于(C)，从 $Ax=b$ 有不同的解，知 $Ax=0$ 有非零解，进而有无穷多解.

(Ⅱ) 本小题中(A)，(D) 均线性相关.

$$(\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)+(\eta_3+\eta_4)-(\eta_4+\eta_1)=0,$$

$$(\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)+(\eta_3-\eta_4)+(\eta_4-\eta_1)=0,$$

用简单的加减可排除(A)，(D). 关于(C)，因为等秩不能保证 α_i 是方程组的解，也就不可能是基础解系. 至于(B)，由等价知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是解，从 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=4$，得到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，故(B) 正确.

(Ⅲ) $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ 不是 $Ax=b$ 的解，从解的结构来看应排除(A)，(C)，虽 $\beta_1-\beta_2,\alpha_1$ 都是 $Ax=0$ 的解，但是否线性无关不能保证，能否成为基础解系不明确，(D) 应排除. 由 α_1,α_2 是基础解系，得 $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2$ 线性无关是基础解系，而 $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 是 $Ax=b$ 的解，故(B) 正确.

(Ⅳ) 因为通解中必有任意常数，显见(A) 不正确. 由 $n-r(A)=1$ 知 $Ax=0$ 的基础解系由一个非零向量构成. $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2$ 与 $\alpha_1-\alpha_2$ 中哪一个一定是非零向量呢?

已知条件只是说 α_1,α_2 是两个不同的解，那么 α_1 可以是零解，因而 $k\alpha_1$ 可能不是通解. 如果 $\alpha_1=-\alpha_2\neq 0$，则 α_1,α_2 是两个不同的解，但 $\alpha_1+\alpha_2=0$，即两个不同的解不能保证 $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$. 因此要排除(B)、(C). 由于 $\alpha_1\neq\alpha_2$，必有 $\alpha_1-\alpha_2\neq 0$. 可见(D) 正确.

(Ⅴ) 本题考查齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系中解向量的个数. 也就是要求出矩阵 A 的秩. 由于

$$r(A^*)=\begin{cases}n, & \text{如 } r(A)=n,\\ 1, & \text{如 } r(A)=n-1,\\ 0, & \text{如 } r(A)<n-1,\end{cases}$$

因为 $A^*\neq 0$，必有 $r(A^*)\geqslant 1$，故 $r(A)=n$ 或 $n-1$. 又因 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是 $Ax=b$ 互不相同的解，知 $\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的非零解，而必有 $r(A)<n$. 从而 $r(A)=n-1$. 因此 $n-r(A)=n-(n-1)=1$，即 $Ax=0$ 只有一个线性无关的解. 故应选(B).

【例 4.2】 设 A 是 n 阶矩阵，对于齐次线性方程组 $Ax=0$.

(Ⅰ) 如 A 中每行元素之和均为 0，且 $r(A)=n-1$，则方程组的通解是_____;

(Ⅱ) 如每个 n 维向量都是方程组的解，则 $r(A)=$_____;

(Ⅲ) 如 $r(A)=n-1$，且代数余子式 $A_{11}\neq 0$，则 $Ax=0$ 的通解是_____，$A^*x=0$ 的通解是_____，$(A^*)^*x=0$ 的通解是_____.

【分析】 (Ⅰ) 从 $r(A)=n-1$ 知 $Ax=0$ 的基础解系由1 个解向量组成，因此任一非零解都可成为基础解系. 因为每行元素之和都为 0，有

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=1\cdot a_{i1}+1\cdot a_{i2}+\cdots+1\cdot a_{in}=0,$$

所以，$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 满足每一个方程，是 $Ax=0$ 的解，故通解是 $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ) 每个 n 维向量都是解，因而有 n 个线性无关的解，那么解空间的维数是 n，又因解空间维数是

www.TopSage.com

$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，故 $n=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=0$.

（Ⅲ）对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，从 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$ 知基础解系由 1 个解向量所构成. 因为 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 现已知 $A_{11}\neq 0$，故 $(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，即是基础解系，所以通解是 $k(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^{\mathrm{T}}$.

对 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，从 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$ 知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$（参看【例 3.31】），那么 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=n-1$ 个向量所构成，从 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的每一列都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，由于代数余子式 $A_{11}\neq 0$，知 $n-1$ 维向量

$$(a_{22},a_{32},\cdots,a_{n2})^{\mathrm{T}},(a_{23},a_{33},\cdots,a_{n3})^{\mathrm{T}},\cdots,(a_{2n},a_{3n},\cdots,a_{nn})^{\mathrm{T}}$$

线性无关，那么延伸为 n 维向量

$$(a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2})^{\mathrm{T}},(a_{13},a_{23},\cdots,a_{n3})^{\mathrm{T}},\cdots,(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{nn})^{\mathrm{T}}$$

仍线性无关（参看【定理 3.3】），即是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，通解略.

对 $(\boldsymbol{A}^*)^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，同上知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$，据【例 3.31】知当 $n\geqslant 3$ 时，$\mathrm{r}((\boldsymbol{A}^*)^*)=0$，那么任意 n 个线性无关的向量都可构成基础解系. 例如，取

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

得通解 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n$.

如 $n=2$，对于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{bmatrix}$. 于是 $(\boldsymbol{A}^*)^*=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$，

那么 $(\boldsymbol{A}^*)^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解是 $k\begin{bmatrix}a_{22}\\-a_{21}\end{bmatrix}$（注：$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{0}$，$A_{11}=a_{22}\neq 0$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$）.

【例 4.3】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-ax_3=3,\\2x_1-3x_3=1,\\-2x_1+ax_2+10x_3=4\end{cases}$$

的两个不同的解向量，则 $a=$ _____.

【分析】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组两个不同的解，故方程组有无穷多解. 因此秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})<3$，对增广矩阵作初等行变换有

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-a&3\\2&0&-3&1\\-2&a&10&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-a&3\\0&2&2a-3&-5\\0&a-2&10-2a&10\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-a&3\\0&2&2a-3&-5\\0&0&2a^2-3a-14&-5a-10\end{array}\right].$$

易见仅当 $a=-2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$. 故知 $a=-2$.

【例 4.4】 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 3 的 5×4 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个不同的解，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,6,8)^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是_____.

【分析】 由于秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，所以齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $4-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$ 个向量所构成. 又因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)-(3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=(0,-4,-6,-8)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，即其基础解系可以是 $(0,2,3,4)^{\mathrm{T}}$. 由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2+2\boldsymbol{A\alpha}_3=4\boldsymbol{b},$$

知 $\frac{1}{4}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解. 那么根据方程组解的结构知其通解是

$$\left(\frac{1}{2},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}+k(0,2,3,4)^{\mathrm{T}}.$$

评注 本题考查方程组解的性质与解的结构. 要会用“减”的方法求齐次方程组的解，用“除”的方法求非齐次方程组的解.

www.TopSage.com

【例 4.5】 已知 $\xi_1=(-9,1,2,11)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(1,-5,13,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=(-7,-9,24,11)^{\mathrm{T}}$ 是方程组

$$\begin{cases}2x_1+a_2x_2+3x_3+a_4x_4=d_1,\\3x_1+b_2x_2+2x_3+b_4x_4=4,\\9x_1+4x_2+x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$$

的三个解，求此方程组的通解.

【分析】 求 $Ax=b$ 的通解关键是求 $Ax=0$ 的基础解系，$\xi_1-\xi_2$，$\xi_2-\xi_3$ 都是 $Ax=0$ 的解，现在就要判断秩 $\mathrm{r}(A)$，以确定基础解系中解向量的个数.

【解】 A 是 3×4 矩阵，$\mathrm{r}(A)\leqslant3$，由于 A 中第 2,3 两行不成比例，故 $\mathrm{r}(A)\geqslant2$，又因

$$\eta_1=\xi_1-\xi_2=(-10,6,-11,11)^{\mathrm{T}},\ \eta_2=\xi_2-\xi_3=(8,4,-11,-11)^{\mathrm{T}}$$

是 $Ax=0$ 的两个线性无关的解，于是 $4-\mathrm{r}(A)\geqslant2$，因此 $\mathrm{r}(A)=2$，所以 $\xi_1+k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 是通解.

评注 不要花时间去求出方程组，那是烦琐的. 由于 $\xi_1-\xi_2$，$\xi_1-\xi_3$ 或 $\xi_3-\xi_1$，$\xi_3-\xi_2$ 等都可构成齐次方程组的基础解系，ξ_1，ξ_2，ξ_3 都是特解，本题答案不唯一.

题型二 线性方程组的求解

【例 4.6】 解齐次方程组 $\begin{cases}2x_1-4x_2+2x_3+7x_4=0,\\3x_1-6x_2+4x_3+3x_4=0,\\5x_1-10x_2+4x_3+25x_4=0.\end{cases}$

【解】 对系数矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix}2&-4&2&7\\3&-6&4&3\\5&-10&4&25\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&2&-2&4\\3&-6&4&3\\5&-10&4&25\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&2&-2&4\\&&-2&15\\&&-6&45\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&2&-4\\&&2&-15\\&&&0\end{bmatrix},$$

由 $n-\mathrm{r}(A)=4-2=2$，基础解系由 2 个向量组成，每个解中有 2 个自由变量.

令 $x_2=1,x_4=0$，解得 $x_3=0$，$x_1=2$；令 $x_2=0,x_4=2$，解得 $x_3=15$，$x_1=-22$.

于是得到 $\eta_1=(2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=(-22,0,15,2)^{\mathrm{T}}$，通解是 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$.

评注 ① 此时，阶梯形矩阵所描述的同解方程组是

$$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3-4x_4=0,\\2x_3-15x_4=0,\end{cases}$$

由于 $\mathrm{r}(A)=2$，可将 x_1,x_3 留在等号的左端，而把 x_2,x_4 移到等号的右端，有

$$\begin{cases}x_1+2x_3=2x_2+4x_4,\\2x_3=15x_4.\end{cases}$$

这时 x_2,x_4 是自由变量，按 1,0 与 0,1 分别赋值就求出基础解系 η_1 与 η_2.

② 试问在本题中，x_2 与 x_3 能作自由变量吗？x_1 与 x_4 能作自由变量吗？

③ 要掌握确定自由变量的原则. 在给自由变量赋值时，首先要确保延伸后的解向量组线性无关；其次应考虑到便于计算. 在高斯消元时，可先作变换化 x_1 的系数为 $+1$ 或 -1，然后再消元.

【例 4.7】 解方程组 $\begin{cases}6x_1-2x_2+2x_3+x_4=3,\\x_1-x_2+x_4=1,\\2x_1+x_3+3x_4=2.\end{cases}$

www.TopSage.com

【解】 对增广矩阵高斯消元化为阶梯形

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}6&-2&2&1&3\\1&-1&0&1&1\\2&0&1&3&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\2&0&1&3&2\\6&-2&2&1&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\&2&1&1&0\\&4&2&-5&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\&2&1&1&0\\&&&7&3\end{array}\right],$$

由 $r(A)=r(\overline{A})=3$,方程组有解,$n-r(A)=1$ 有 1 个自由变量.

先求相应齐次线性方程组的基础解系,令 $x_3=2$,解出 $x_4=0$,$x_2=-1$,$x_1=-1$,所以齐次方程组通解是 $k(-1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$.

再求非齐次线性方程组的特解,令 $x_3=0$,解出 $x_4=\frac{3}{7}$,$x_2=-\frac{3}{14}$,$x_1=\frac{5}{14}$,特解为 $\left(\frac{5}{14},-\frac{3}{14},0,\frac{3}{7}\right)^{\mathrm{T}}$. 所以,方程组的通解是:$\left(\frac{5}{14},-\frac{3}{14},0,\frac{3}{7}\right)^{\mathrm{T}}+k(-1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$.


评注 ① 化矩阵为阶梯形的同解方程组是

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_4=1,\\2x_2+x_3+x_4=0,\\7x_4=3,\end{cases}$$

由于 $r(A)=3$,可将 x_1,x_2,x_4 留在等号的左端,其 x_3 都要等号右边,得

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_4=1,\\2x_2+x_4=-x_3,\\7x_4=3,\end{cases}$$

x_3 是自由变量,令 $x_3=0$ 可得非齐次线性方程组的特解,令 $x_3=1$,可得导出组的基础解系.

② 用高斯消元化阶梯形时,必须仔细计算,否则下面的计算都是徒劳的,求基础解系时,不要把方程组的系数项混进去作运算.

【例 4.8】 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}$,$\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求满足 $A\xi_2=\xi_1$,$A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中任意向量 ξ_2,ξ_3,证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

【分析】 其实求 ξ_2 和 ξ_3 就是分别求方程组 $Ax=\xi_1$ 与方程组 $A^2x=\xi_1$ 的通解.

【解】 (Ⅰ)对增广矩阵 $(A\vdots\xi_1)$ 作初等行变换,有

$$(A\vdots\xi_1)=\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

得 $Ax=0$ 的基础解系 $(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 和 $Ax=\xi_1$ 的特解 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $\xi_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 或 $\xi_2=(k,-k,2k+1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

因为 $A^2=\begin{bmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{bmatrix}$,对增广矩阵 $(A^2\vdots\xi_1)$ 作初等行变换,有

$$(A^2\vdots\xi_1)=\left[\begin{array}{ccc:c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

得 $A^2x=0$ 的基础解系 $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 又 $A^2x=\xi_1$ 有特解 $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$,故

www.TopSage.com

$$\xi_3=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}+t_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+t_2(0,0,1)^{\mathrm{T}}\text{ 或 }\xi_3=\left(-\frac{1}{2}-t_1,t_1,t_2\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 t_1,t_2 为任意常数.

TopSage.com

（Ⅱ）因为

$$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}-1 & k & -\frac{1}{2}-t_1\\ 1 & -k & t_1\\ -2 & 2k+1 & t_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -k & t_1\\ -2 & 2k+1 & t_2\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -k\\ -2 & 2k+1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 必线性无关.

评注 如能注意到本题中

$$A\xi_1=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

以及 $A\xi_2=\xi_1,A^2\xi_3=\xi_1$ 的条件，关于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关的证明亦可用定义法，证明如下：

设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=\mathbf{0}$， ①

用 A 乘①式，有 $k_2\xi_1+k_3A\xi_3=\mathbf{0}$， ②

再用 A 乘②式，有 $k_3A^2\xi_3=\mathbf{0}$，即 $k_3\xi_1=\mathbf{0}$.

由于 $\xi_1\neq\mathbf{0}$，故 $k_3=0$. 代入②得 $k_2=0$，进而由①知 $k_1=0$.

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 必线性无关.

题型三　含有参数的方程组解的讨论

【例 4.9】 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$.

已知方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a 的值并求其通解.

【解】 线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\overline{A})<n$. 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 3\\ 1 & a & -2 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & a-2 & -3 & -1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -a & -1\\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a-3\end{array}\right].$$

当 $a=3$ 时，$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\overline{A})=2<3$，此时

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 7 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

于是方程组的通解为：$(3,-1,0)^{\mathrm{T}}+k(-7,3,1)^{\mathrm{T}}$.

【例 4.10】 讨论 a,b 取何值时，下列方程组无解、有唯一解、有无穷多解，有解时求出其解.

www.TopSage.com

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + ax_4 = 0, \\ 3x_1 + ax_3 + 6x_4 = 18, \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 + 13x_4 = b. \end{cases}$$

【解】 将增广矩阵用初等行变换化为阶梯形,即

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & a & 0 \\ 3 & 0 & a & 6 & 18 \\ 4 & -1 & 9 & 13 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ & 1 & -1 & a-4 & -12 \\ & 0 & a-6 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 5 & b-24 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ & 1 & -1 & a-4 & -12 \\ & & a-6 & 0 & 0 \\ & & & a+1 & b-36 \end{array}\right].$$

讨论:(Ⅰ)当 $a=-1, b\neq 36$ 时,$r(A)=3$, $r(\overline{A})=4$ 方程组无解;

(Ⅱ)当 $a\neq -1, a\neq 6$ 时,$r(A)=r(\overline{A})=4$,方程组有唯一解,由下往上依次可解出

$$x_4=\frac{b-36}{a+1},\quad x_3=0,\quad x_2=-12-\frac{(a-4)(b-36)}{a+1},\quad x_1=6-\frac{2(b-36)}{a+1};$$

(Ⅲ)当 $a=-1, b=36$ 时,$r(A)=r(\overline{A})=3$,方程组有无穷多解,此时方程组化为

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ & 1 & -1 & -5 & -12 \\ & & -7 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

令 $x_4=0$,有 $x_3=0$, $x_2=-12$, $x_1=6$,即特解是 $\boldsymbol{\xi}=(6,-12,0,0)^{\mathrm{T}}$.

令 $x_4=1$,解齐次方程组有 $x_3=0, x_2=5, x_1=-2$,即 $\boldsymbol{\eta}=(-2,5,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是基础解系.

所以通解为 $\boldsymbol{\xi}+k\boldsymbol{\eta}=(6,-12,0,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,5,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅳ)当 $a=6$ 时,$r(A)=r(\overline{A})=3$,方程组有无穷多解,此时方程组化为

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ & 1 & -1 & 2 & -12 \\ & & & 7 & b-36 \end{array}\right].$$

令 $x_3=0$,有特解 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{7}(114-2b), -\frac{1}{7}(12+2b), 0, \frac{1}{7}(b-36)\right)^{\mathrm{T}}$.

令 $x_3=1$,有齐次方程组基础解系 $\boldsymbol{\beta}=(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

所以通解是 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}=\left(\frac{1}{7}(114-2b), -\frac{1}{7}(12+2b), 0, \frac{1}{7}(b-36)\right)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

【例 4.11】 设 $A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解,

(Ⅰ)求 λ, a;

(Ⅱ)求方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

【解】 (Ⅰ)因为线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有 2 个不同的解,所以 $r(A)=r(\overline{A})<n$.

由
$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0,$$

知 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时,必有 $r(A)=1, r(\overline{A})=2$. 此时线性方程组无解.

而当 $\lambda=-1$ 时,

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right],$$

www.TopSage.com

若 $a=-2$,则 $r(A)=r(\overline{A})=2$,方程组 $Ax=b$ 有无穷多解.

故 $\lambda=-1,a=-2$.

(Ⅱ)当 $\lambda=-1,a=-2$ 时,

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

所以方程组 $Ax=b$ 的通解为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+k(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 是任意常数.

评注 ①解本题的出发点是理解非齐次方程组 $Ax=b$ 存在2个不同的解这个条件,若解不是唯一的,或 $r(A)=r(\overline{A})<3$,或设 α_1,α_2 为其2个不同的解,则 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的一个非零解,从而可得出系数行列式 $|A|=0$,进而确定系数 λ 与 a.

②本题亦可对增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{array}\right].$$

由于 $Ax=b$ 有无穷多解,故 $r(A)=r(\overline{A})<3$,易见 $\lambda=1$ 时无解,$\lambda=-1,a=-2$ 时合乎要求.

【例4.12】 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\\cdots\cdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $a\neq0,b\neq0,n\geqslant2$.试讨论 a,b 为何值时,方程组仅有零解,有无穷多解?当有无穷多解时,求出其全部解,并用基础解系表示全部解.

【解】 对系数矩阵作初等行变换,把第1行的 -1 倍分别加至第2行到第 n 行,有

$$\left[\begin{array}{cccccc}a&b&b&\cdots&b&b\\b&a&b&\cdots&b&b\\b&b&a&\cdots&b&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b&b&b&\cdots&a&b\\b&b&b&\cdots&b&a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccccc}a&b&b&\cdots&b&b\\b-a&a-b&0&\cdots&0&0\\b-a&0&a-b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b-a&0&0&\cdots&a-b&0\\b-a&0&0&\cdots&0&a-b\end{array}\right].$$

(Ⅰ)如果 $a=b$,方程组的同解方程组是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$.

由于 $n-r(A)=n-1$,取自由变量为 $x_2,x_3,\cdots,x_n$,得到基础解系为:

$$\alpha_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

方程组通解是:$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

(Ⅱ)如果 $a\neq b$,对系数矩阵作初等行变换,有

$$A\to\left[\begin{array}{cccccc}a&b&b&\cdots&b&b\\1&-1&0&\cdots&0&0\\1&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&-1&0\\1&0&0&\cdots&0&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccccc}a+(n-1)b&0&0&\cdots&0&0\\1&-1&0&\cdots&0&0\\1&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&-1&0\\1&0&0&\cdots&0&-1\end{array}\right].$$

www.TopSage.com

若 $a \neq (1-n)b$,则秩 $r(A) = n$,此时齐次方程组只有零解.

若 $a = (1-n)b$,则秩 $r(A) = n-1$.取 x_1 为自由变量,则基础解系为 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,\cdots,1)^T$,于是方程组的通解是:$k\boldsymbol{\alpha}$,其中 k 为任意常数.

评注 本题是 n 个方程 n 个未知数,就是可由行列式入手,当 $|A| \neq 0$ 时,方程组只有零解;当 $|A| = 0$ 时再根据 a,b 的取值进一步求解.

题型四 关于线性方程组公共解、同解问题

【例 4.13】 设方程组(Ⅰ)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程组(Ⅱ)$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解,求 a 的值及所有公共解.

【分析】 本题有两种解法:一是根据两个方程组有公共解的条件知,把这两个方程组联立后的方程组也应有解,且其解即为所求的公共解;二是把一个方程组的解代入到另一个方程组,确立它们的公共解.

【解法一】 把方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)联立,得方程组(Ⅲ)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + a^2x_3 = a - 1, \end{cases}$$

则方程组(Ⅲ)的解就是方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解.

对方程组(Ⅲ)的增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right],$$

则方程组(Ⅲ)有解 $\Leftrightarrow (a-1)(a-2) = 0$.

当 $a = 1$ 时,$\overline{A} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,此时方程组(Ⅲ)的通解为 $k(-1,0,1)^T$(k 为任意常数),即为方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解.

当 $a = 2$ 时,$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,此时方程组(Ⅲ)有唯一解 $(0,1,-1)^T$,这亦是方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的唯一公共解.

【解法二】 先求出方程组(Ⅰ)的解,其系数行列式

www.TopSage.com

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{vmatrix} = (a-1)(a-2),$$

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时,齐次方程组(Ⅰ)只有零解,但零向量不是方程组(Ⅱ)的解,所以方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解只在 $a = 1$ 或 $a = 2$ 时才有可能.

当 $a = 1$ 时,对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得到方程组(Ⅰ)的通解为 $k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,而此解也是方程组(Ⅱ)的解.故方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解为:$k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,k 为任意常数.

当 $a = 2$ 时,对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 4 & 4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故方程组(Ⅰ)的通解为 $k(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$,k 为任意常数.

把 $x_1 = 0, x_2 = -k, x_3 = k$ 代入方程组(Ⅱ)解出 $k = -1$.

因此方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

【例 4.14】 设 4 元齐次线性方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases}2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,\\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0,\end{cases}$$

而已知另一 4 元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?若有,求出其所有非零公共解.

【分析】 要求 n 元线性方程组的基础解系必须知道该线性方程组系数矩阵的秩 r 为多少,才能确定基础解系中所含线性无关的解的个数 $n-r$.任意选取 $n-r$ 个线性无关的解便是基础解系,因此,首先应求出或判定出方程组(Ⅰ)的系数矩阵的秩.

【解】 (1) 对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -3 & 2\end{bmatrix}.$$

由于 $n - r(\boldsymbol{A}) = 4 - 2 = 2$,基础解系由 2 个线性无关的解向量所构成,取 x_3, x_4 为自由变量,得

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (5,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2 = (-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

是方程组(Ⅰ)的基础解系.

(2) 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解,则

$\boldsymbol{\eta} = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 k_1, k_2 与 l_1, l_2 均是不全为 0 的常数.

由 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 - l_1\boldsymbol{\alpha}_1 - l_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$,得齐次方程组(Ⅲ)

$$\begin{cases}5k_1 - 3k_2 - 2l_1 + l_2 = 0,\\ -3k_1 + 2k_2 + l_1 - 2l_2 = 0,\\ k_1 - (a+2)l_1 - 4l_2 = 0,\\ k_2 - l_1 - (a+8)l_2 = 0,\end{cases}$$

对方程组(Ⅲ)的系数矩阵作初等行变换,有

www.TopSage.com

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \\ 0 & -3 & 5a+8 & 21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 5a+5 & -3a-3 \end{bmatrix}.$$

如果 $a \neq -1$,则(Ⅲ)$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. 那么方程组(Ⅲ)只有零解,即 $k_1 = k_2 = l_1 = l_2 = 0$. 于是 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}$. 不合题意.

当 $a = -1$ 时,方程组(Ⅲ)同解变形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,解出 $k_1 = l_1 + 4l_2, k_2 = l_1 + 7l_2$.

于是 $\boldsymbol{\eta} = (l_1 + 4l_2)\boldsymbol{\beta}_1 + (l_1 + 7l_2)\boldsymbol{\beta}_2 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

所以 $a = -1$ 时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解,且公共解是

$$l_1(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}} + l_2(-1,2,4,7)^{\mathrm{T}}.$$

【例 4.15】 已知 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组(Ⅰ)的基础解系,$\boldsymbol{\eta}_1 = (0,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = (-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组(Ⅱ)的基础解系,求齐次线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解.

【解法一】 设齐次线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解是 $\boldsymbol{\gamma}$,则

$$\boldsymbol{\gamma} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 = d_1\boldsymbol{\eta}_1 + d_2\boldsymbol{\eta}_2,$$

从而 $c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 - d_1\boldsymbol{\eta}_1 - d_2\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{0}$. 解齐次线性方程组(Ⅲ)$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, -\boldsymbol{\eta}_1, -\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,由

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, -\boldsymbol{\eta}_1, -\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

得(Ⅲ)的通解为 $t(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,即 $c_1 = c_2 = t, d_1 = -t, d_2 = t$.

从而方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)有非零公共解 $t(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) = t(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

【解法二】 若(Ⅱ)的解 $l_1\boldsymbol{\eta}_1 + l_2\boldsymbol{\eta}_2 = (-l_2, l_1 + 2l_2, l_1 + 2l_2, l_2)^{\mathrm{T}}$ 是公共解,则它可由(Ⅰ)的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 线性表出.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -l_2 \\ 0 & 1 & l_1 + 2l_2 \\ 1 & 0 & l_1 + 2l_2 \\ 0 & 1 & l_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 + 2l_2 \\ & 1 & l_2 \\ & 0 & l_1 + l_2 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

可见 $l_1 = -l_2$ 时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, l_1\boldsymbol{\eta}_1 + l_2\boldsymbol{\eta}_2) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = 2$.

故公共解是 $l(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) = l(1,-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

评注 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可分别由方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的基础解系线性表出,同时又满足这两个方程组.

www.TopSage.com

【例 4.16】 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$,其中 A,B 均为 $m \times n$ 矩阵,则下列命题

① 若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解,则秩 $r(A) \geqslant r(B)$

② 若秩 $r(A) \geqslant r(B)$,则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解

③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解,则秩 $r(A) = r(B)$

④ 若秩 $r(A) = r(B)$,则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

中正确的是

(A) ①,②. (B) ①,③. (C) ②,④. (D) ③,④.

【分析】 命题④显然错误,可排除(C)、(D).对于(A)和(B)必有一个是正确的.因此命题①必正确.

由①正确,可知③必正确.所以应选(B).

请读者直接证明命题①正确,并举例说明②不正确.

评注 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{t\times n}$ 的行向量组等价(就是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 可互推)的充要条件是齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

【例 4.17】 已知齐次线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \text{和} \quad (\text{Ⅱ})\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解,求 a,b,c 的值.

【解】 因为方程组(Ⅱ)中"方程个数 < 未知数个数",所以方程组(Ⅱ)必有非零解.因此方程组(Ⅰ)必有非零解.从而(Ⅰ)的系数行列式必为0,即有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a = 0 \Rightarrow \quad a = 2.$$

对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可求出方程组(Ⅰ)的通解是 $k(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

由于 $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组(Ⅱ)的解,故有

$$\begin{cases} -1 - b + c = 0, \\ -2 - b^2 + c + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad b = 1, c = 2 \text{ 或 } b = 0, c = 1.$$

当 $b = 1, c = 2$ 时,方程组(Ⅱ)为 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$ 其通解是 $k(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,所以方程组(Ⅰ)与Ⅱ同解.

当 $b = 0, c = 1$ 时,方程组(Ⅱ)为 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 = 0, \end{cases}$ 由于秩 $r(\text{Ⅱ}) = 1$,而 $r(\text{Ⅰ}) = 2$,所以方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)不同解.故 $b = 0, c = 1$ 应舍去.

从而当 $a = 2, b = 1, c = 2$ 时方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

【例 4.18】 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵,A^{T} 是 A 的转置矩阵,证明方程组(Ⅰ):$Ax = 0$ 和(Ⅱ):$A^{\mathrm{T}}Ax = 0$ 是同解方程组.

【分析】 所谓方程组同解即(Ⅰ)的解全是(Ⅱ)的解,(Ⅱ)的解也全是(Ⅰ)的解,显然本题的难点是如何证(Ⅱ)的解必是(Ⅰ)的解.

www.TopSage.com

【证明】 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅰ)的解,那么 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$,而 $\boldsymbol{A^{\mathrm{T}}A\alpha}=\boldsymbol{A^{\mathrm{T}}0}=\boldsymbol{0}$,可见 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅱ)的解.

如果 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 是(Ⅱ)的解,即 $\boldsymbol{A^{\mathrm{T}}A\alpha}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\alpha}=0 \Rightarrow (\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\alpha})=0$. 不妨设 $\boldsymbol{A\alpha}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$,则 $(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\alpha})=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2=0$. 从而 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$,即 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$,所以(Ⅱ)的解必是(Ⅰ)的解. 因此,(Ⅰ)与(Ⅱ)是同解方程组.

评注 从本题知(Ⅰ)与(Ⅱ)有相同的基础解系,则 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A^{\mathrm{T}}A})$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A^{\mathrm{T}}A})$.

【例 4.19】 已知 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解全是 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,证明 $\boldsymbol{A}_2$ 的行向量可以由 $\boldsymbol{A}_1$ 的行向量线性表出.

若线性方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 都有解,且(Ⅰ)的解全是(Ⅱ)的解,则 $(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{b}_2)$ 的行向量组可以由 $(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{b}_1)$ 的行向量组线性表出.

【证明】 因为 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解全是 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \text{ 与} \begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\end{cases}\text{同解}.$$

那么 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)=n-\mathrm{r}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)=\mathrm{r}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{A}_2$ 的行向量可以由 $\boldsymbol{A}_1$ 的行向量线性表出.

因为 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 的解全是 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 的解,所以

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1 \text{ 与} \begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2\end{cases}\text{同解}.$$

如果 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{b}_1$,$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$,则因 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 的解全是 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 的解,那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}$ 都是 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 的解,而有 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{b}_2$ 及 $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{b}_2$,从而 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$. 说明此时 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解全是 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,那么

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{b}_1)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)=\mathrm{r}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}=\mathrm{r}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}.$$

所以 $(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{b}_2)$ 的行向量组可以由 $(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{b}_1)$ 的行向量组线性表出.

评注 若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 同解,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{b}_1)=\mathrm{r}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{b}_2)$.

题型五 有关基础解系的问题

【例 4.20】 求出一个齐次线性方程组,使它的基础解系是 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,2,4,7)^{\mathrm{T}}$.

【分析】 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0}$ 有 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,可见 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量(即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量).

【解】 由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,知 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. 对于齐次方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,有

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 4 & 7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix},$$

www.TopSage.com

得基础解系$(-2,-3,1,0)^{\mathrm{T}},(-3,-5,0,1)^{\mathrm{T}}$.

所以$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\3x_1+5x_2-x_4=0\end{cases}$为所求.

【例4.21】 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系,证明$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也是该方程组的一个基础解系.

【分析】 按基础解系的定义,要证三个方面:①$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$是解;②它们线性无关;③向量个数等于$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

【证明】 由$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$知,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.类似可知$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

若$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$,即

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是基础解系,它们是线性无关的,故

$$\begin{cases}k_1+k_3=0;\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0.\end{cases}$$

由于此方程组系数行列式$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$,故必有$k_1=k_2=k_3=0$,所以$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

根据题设,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系含有3个线性无关的向量,所以$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

【例4.22】 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\\a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0\end{cases}$$

的系数矩阵记为$\boldsymbol{A},M_j(j=1,2,\cdots,n)$是矩阵$\boldsymbol{A}$中划去第$j$列所得到的行列式,证明:如果$M_j$不全为0,则$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)^{\mathrm{T}}$是该方程组的基础解系.

【证明】 因为$\boldsymbol{A}$是$(n-1)\times n$矩阵,若M_j不全为0,即$\boldsymbol{A}$中有$n-1$阶子式非零,故$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$.那么齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系由$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$个非零向量所构成.

令$D_i=\begin{vmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{vmatrix}\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$,

按第一行展开,有$D_i=a_{i1}M_1-a_{i2}M_2+\cdots+a_{in}(-1)^{1+n}M_n$.

又因D_i中第一行与第$i+1$行相同,知$D_i=0$.因而

$$a_{i1}M_1-a_{i2}M_2+\cdots+a_{in}(-1)^{n-1}M_n=0.$$

即$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)^{\mathrm{T}}$满足第$i$个方程$(i=1,2,\cdots,n-1)$,从而它是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的非零解,也就是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

www.TopSage.com

评注 根据本题我们立即知道齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系是

$$\left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}}.$$

【例 4.23】 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵，其 m 个行向量是齐次线性方程组 $Cx = 0$ 的基础解系，B 是 m 阶可逆矩阵，证明 BA 的行向量也是齐次方程组 $Cx = 0$ 的基础解系.

【证明】 因为 A 的行向量是 $Cx = 0$ 的解，即 $CA^{\mathrm{T}} = 0$，那么 $C(BA)^{\mathrm{T}} = CA^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = 0B^{\mathrm{T}} = 0$. 可见 BA 的行向量是方程组 $Cx = 0$ 的解.

由于 A 的行向量是基础解系，所以 A 的行向量线性无关，于是 $m = \mathrm{r}(A) = n - \mathrm{r}(C)$.

又因 B 是可逆矩阵，$\mathrm{r}(BA) = \mathrm{r}(A) = m = n - \mathrm{r}(C)$，所以 BA 的行向量线性无关，其向量个数正好是 $n - \mathrm{r}(C)$，从而是方程组 $Cx = 0$ 的基础解系.

题型六 有关线性方程组的证明题

【例 4.24】 证明方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = b \end{cases}$$

有解的必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & b \end{vmatrix} = 0.$$

并举例说明该条件是不充分的.

【证明】 如果方程组 $Ax = b$ 有解，则 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\overline{A})$；因为 A 是 $(n+1) \times n$ 阶矩阵，必有 $\mathrm{r}(A) \leqslant n$，所以 $\mathrm{r}(\overline{A}) \leqslant n$. 那么，必有 $n+1$ 阶行列式

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & b \end{vmatrix} = 0.$$

例如，方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$ 虽然行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$，但该方程组无解.

【例 4.25】 已知方程组

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

www.TopSage.com

有解,证明方程组

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 1 \end{cases}$$

无解.

【证明】 用 $\boldsymbol{A}_1, \overline{\boldsymbol{A}}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2, \overline{\boldsymbol{A}}_2$ 分别表示方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的系数矩阵和增广矩阵,易见 $\boldsymbol{A}_2 = \overline{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}$(或 $\overline{\boldsymbol{A}}_1 = \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}$). 因为方程组(Ⅰ)有解,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}_1)$.

又由于 $(b_1, b_2, \cdots, b_m, 1)$ 不能由 $(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}, 0), (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}, 0), \cdots, (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn}, 0)$ 线性表出,所以

$$\mathrm{r}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix} \neq \mathrm{r}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}_2).$$

又

$$\mathrm{r}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{r}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}),$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}) \neq \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}_2)$,但 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}_1) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2)$,可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) \neq \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}_2)$,即方程组(Ⅱ)无解.

【例 4.26】 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是 n 维行向量,如果方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解全是方程(Ⅱ)$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$ 的解,证明 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{A}$ 的行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

【证明】 构造一个联立方程组

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0, \end{cases}$$

简记为 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$,显然,(Ⅲ)的解必是(Ⅰ)的解,又因(Ⅰ)的解全是(Ⅱ)的解,于是(Ⅰ)的解也必全是(Ⅲ)的解,所以(Ⅰ),(Ⅲ)是同解方程组,它们有相同的解空间. 从而 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{C})$,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{C})$,亦即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta})$.

因此极大线性无关组所含向量个数相等,这样 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大线性无关组也必是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 的极大线性无关组,从而 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

【例 4.27】 已知方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = b_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = b_m \end{cases}$$

有解,证明:方程组

大家网 TopSage.com

$$(\text{Ⅱ})\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

的任意一组解必是方程(Ⅲ) $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 0$ 的解.

【证法一】 记方程组(Ⅰ)的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$,增广矩阵是 $\overline{\boldsymbol{A}}$,由于(Ⅰ)有解,故 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 那么 $(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ 可用 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出. 联立(Ⅱ)、(Ⅲ),得方程组

$$(\text{Ⅳ})\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 0. \end{cases}$$

显然,系数矩阵是 $\overline{\boldsymbol{A}}^T$,由于 $r(\overline{\boldsymbol{A}}^T) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T)$,可见方程组(Ⅳ)中最后一个方程是多余的,即(Ⅱ)与(Ⅳ)是同解方程组,这就是(Ⅱ)的任一解必是(Ⅲ)的解.

【证法二】 记 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$.

由于(Ⅰ)有解,故存在 $\boldsymbol{y}$ 使 $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}$,那么 $\boldsymbol{b}^T = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^T$. 设 $\boldsymbol{x}$ 是方程组(Ⅱ) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的任一解,于是 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$,即 $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 0$,即(Ⅱ)的解必是(Ⅲ)的解.

题型训练

一、选择题

1. 要使 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,只要系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. 设齐次线性方程组经高斯消元化成的阶梯形矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,则自由变量不能取成

(A) x_4, x_5.　　(B) x_2, x_3.　　(C) x_2, x_4.　　(D) x_1, x_3.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,则下列命题正确的是

(A) 如 $m < n$,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

(B) 如 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(C) 如 $\boldsymbol{A}$ 有 n 阶子式不为零,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(D) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

4. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 中未知量的个数为 n,方程个数为 m,系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则正确命题是

(A) $r = m$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解.　　(B) $r = n$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(C) $m = n$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.　　(D) $r < n$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

5. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,则此方程组的基础解系还可以是

(A) $\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_4 + \boldsymbol{\eta}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_4$.

www.TopSage.com

(C) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的一个等价向量组. (D) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的一个等秩的向量组.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5×4 矩阵,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,若 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$. (C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

二、填空题

1. 已知方程组 $\begin{bmatrix}1&-1&-3\\0&1&a-2\\3&a&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\a\\16\end{bmatrix}$ 有无穷多解,则 $a=$ _____.

2. 已知方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=b_1,\\ \lambda x_1-x_2+x_3=b_2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=b_3\end{cases}$ 总有解,则 λ 应满足_____.

3. 四元方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0\end{cases}$ 的基础解系是_____.

4. 四元方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$,如 $r(\boldsymbol{A})=3$,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是_____.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶非零矩阵,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解是_____.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解是_____.

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,如果 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 仍是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,则 $c_1+c_2+\cdots+c_t=$ _____.

8. 已知方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+bx_3+2x_4=c,\\ x_1+bx_2-x_3-2x_4=4,\\ -2x_1+x_2-x_3-5x_4=1\end{cases}$ 的通解是 $(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}+k(-1,2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,则 $a=$ _____.

9. 已知 $\boldsymbol{\xi}_1=(-3,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,-2)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_4,\\ x_1+2x_2-x_3=1,\\ 2x_1+x_2+x_3=-4\end{cases}$ 的两个解,则此方程组的通解是_____.

三、计算题与证明题

1. 求齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 3x_1+2x_2+ax_3-3x_4=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3-x_4=0\end{cases}$ 的基础解系.

2. 求线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4=1,\\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3,\\ x_1-x_3+x_4=2,\\ 3x_1-x_2+3x_4=5\end{cases}$ 的通解,并求满足条件 $x_1^2=x_2^2$ 的所有解.

www.TopSage.com

3. 当 a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_2 + bx_3 = 2, \\ 2ax_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多解？当方程组有解时，求其解.

4. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$ 已知 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解，求方程组所有的解.

5. 已知 a,b,c 不全为零，证明方程组 $\begin{cases} ax_2 + bx_3 + cx_4 = 0, \\ ax_1 + x_2 = 0, \\ bx_1 + x_3 = 0, \\ cx_1 + x_4 = 0 \end{cases}$ 只有零解.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，证明方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

7. 证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系.

www.TopSage.com

第五章　矩阵的特征值与特征向量

内容概要与重难点提示

矩阵的特征值问题一直是考研数学的热门话题，读者应认真复习．

首先，要会求特征值与特征向量．对于抽象给出的矩阵要会用定义求解（实际是求特征值的取值范围）；对于具体的数字矩阵，一般先从特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 求出特征值（应有 n 个，含重根），再解齐次方程组 $(\lambda E - A)x = 0$，基础解系就是 λ 所对应的线性无关的特征向量；还要会通过相似用转换来求特征值与特征向量．

相似对角化是重点，要掌握能对角化的条件，注意一般矩阵与实对称矩阵在对角化方面的联系与区别，既要能求出矩阵 A 的相似标准形 Λ（当 A 能对角化时）及可逆矩阵 P，也要会用特征值、特征向量、相似、可对角化等确定 A 的参数，乃至反求 A．要会利用对角化求 A^n．

考核知识要点讲解

一、矩阵的特征值与特征向量的概念、性质及求法

（一）矩阵的特征值与特征向量及其相关概念

▶1. 矩阵的特征值与特征向量的概念

设 A 是 n 阶矩阵，若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 α，使得

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0) \tag{5.1}$$

成立，则称 λ 是矩阵 A 的**特征值**，称非零向量 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的**特征向量**．

【注】　特征向量是非零向量，这一点在推导论证过程中是常用的．

▶2. 矩阵的特征多项式与特征方程的概念

行列式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 称为矩阵 A 的**特征多项式**．$|\lambda E - A| = 0$ 称为矩阵 A 的**特征方程**．

特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 是 λ 的 n 次方程，它的 n 个根就是矩阵 A 的 n 个特征值．

如 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵，则矩阵 A 的特征多项式为：

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum_{i=1}^{3} a_{ii}\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda - |A|. \tag{5.2}$$

【注】　(1) 因为特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 是 λ 的三次方程，而三次方程求根是麻烦的，因此求特征值最好不用(5.2)直接展开．最好用观察法用行列式性质化简使某行（或列）有 $\lambda - \lambda_1$ 的公因式．参看【例 5.8】．

(2) 如 λ 是 A 的特征值，则 $|\lambda E - A| = 0$，因此 $\lambda E - A$ 是不可逆矩阵；如 λ 不是 A 的特征值，则 $|\lambda E - A| \neq 0$，从而 $\lambda E - A$ 是可逆矩阵．特别地，0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$ 不可逆．$Ax = 0$ 的基础解系就是 $\lambda = 0$ 的线性无关的特征向量．

(3) 若 $r(A) = 1$，则(5.2)简化为 $|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda^{n-1}$．

可见，若 $r(A)=1$，则 A 的 n 个特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii}$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

大家网 TopSage.com

【例 5.1】 （Ⅰ）设 A 是 n 阶矩阵，$\lambda=2$ 是 A 的一个特征值，则 $2A^2-3A+5E$ 必有特征值_____；

（Ⅱ）已知 A,B 都是 n 阶矩阵，且 $P^{-1}AP=B$，若 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 B 必有特征向量_____.

【分析】 （Ⅰ）如 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $A^2\alpha=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$.

因此 $(2A^2-3A+5E)\alpha=2A^2\alpha-3A\alpha+5\alpha=(2\lambda^2-3\lambda+5)\alpha$.

所以 $2\cdot2^2-3\cdot2+5=7$ 必是 A 的特征值.

（Ⅱ）因 $P^{-1}AP=B\Rightarrow P^{-1}A=BP^{-1}$，又 $A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow P^{-1}A\alpha=BP^{-1}\alpha\Rightarrow B(P^{-1}\alpha)=P^{-1}(\lambda\alpha)=\lambda(P^{-1}\alpha)$. 所以 B 必有特征向量 $P^{-1}\alpha$.

【例 5.2】 若 λ_1,λ_2 是矩阵 A 不同的特征值，α_1 是对应于 λ_1 的特征向量，则 α_1 不是 λ_2 的特征向量.

【证明】（反证法） 若 α_1 是 λ_2 所对应的特征向量，则 $\lambda_1\alpha_1=A\alpha_1=\lambda_2\alpha_1$. 于是 $(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1=0$. 从 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 得到 $\alpha_1=0$，与特征向量非零相矛盾.

（二）特征值与特征向量的性质

►1. 如果 α_1,α_2 都是特征值 λ_i 所对应的特征向量，则 α_1,α_2 的线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（非 0 时）仍是属于 λ_i 的特征向量.

【注】 该性质说明 λ_i 的特征向量不是唯一的. 但反过来，一个特征向量只能属于一个特征值（【例 5.2】）.

►2. 属于不同特征值的特征向量是线性无关的，并且当 λ_i 是矩阵 A 的 k 重特征值时，矩阵 A 属于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数不超过 k 个.

【注】 因 A 只有 n 个特征值，故 A 的特征向量虽有无穷多个，但线性无关的至多只有 n 个. 并且，若 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的不同特征值，α_1,α_2 分别是 λ_1,λ_2 的特征向量，则 α_1 与 α_2 的线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 不再是 A 的特征向量.（请用反证法证明，并且不要与性质 1 相混淆！往届考生在这出错较多）

►3. 特征值的和等于矩阵主对角线上元素之和，特征值的乘积等于矩阵 A 行列式的值. 即

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\quad\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|. \tag{5.3}$$

【注】 这两个公式在相似、证明可逆、求行列式的值等方面非常好用.

►4. n 阶矩阵 A 和它的转置矩阵 A^{T} 有相同的特征值.

►5. n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是，它的任一特征值均不等于零.

►6. 若 λ 是矩阵 A 的特征值，则对任何正整数 k，λ^k 是 A^k 的特征值.

【例 5.3】 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&1&b\\2&3&4\\-1&1&-1\end{bmatrix}$ 的特征值之和为 3，特征值之积为 -24，则 $b=$_____.

【分析】 由公式(5.3)知 $a+3+(-1)=\sum\lambda_i=3$，则 $a=1$.

又 $$\prod\lambda_i=\begin{vmatrix}a&1&b\\2&3&4\\-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&b\\2&3&4\\-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&b\\0&1&4-2b\\0&2&b-1\end{vmatrix}=5b-9=-24,$$

所以，$b=-3$.

www.TopSage.com

（三）特征值与特征向量的求法

▶1. 对于抽象矩阵，要根据特征值与特征向量的定义及其性质推导出特征值的取值.

▶2. 对于具体的数字矩阵，应先由特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 求出矩阵 A 的全部特征值 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$，其中可能有重根. 然后对每个不同的特征值 λ_i，分别解齐次方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$. 设 $r(\lambda_i E - A) = r_i$，如果求出方程组的基础解系（即矩阵 A 关于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量）$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r_i}$，则矩阵 A 属于特征值 λ_i 的全部特征向量为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r_i}\xi_{n-r_i}$，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r_i}$ 是不全为零的任意常数.

【例 5.4】 （Ⅰ）矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值是

(A) 1,1,0. (B) 1,−1,−2. (C) 1,−1,2. (D) 1,1,2.

（Ⅱ）设 α, β 均为 3 维列向量，且满足 $\alpha^T\beta = 5$，则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的特征值为_____.

【分析】 （Ⅰ）本题可以由特征方程 $|\lambda E - A| = 0$，即

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2),$$

直接求出 A 的特征值，再来确定选项.

但也可利用(5.3)来解. 由于 $\sum a_{ii} = 2$，故(B)，(D)应排除. 那么，只要再计算 $|A|$ 的值就可知应选(A)还是选(C)(如 $|A| = 0$，选(A)，否则选(C)).

（Ⅱ）因为矩阵 $A = \beta\alpha^T$ 的秩为 1，由公式(5.2)的特例知，矩阵 A 的特征值为 $\sum a_{ii}, 0, 0$.

又因矩阵特征值之和等于矩阵的迹（即矩阵主对角线元素之和），由于 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$ 正是矩阵的迹，所以矩阵 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 5,0,0.

【例 5.5】 （Ⅰ）矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征向量是

(A) $(1,2,-1)^T$. (B) $(1,-1,2)^T$. (C) $(1,-2,3)^T$. (D) $(-1,1,-2)^T$.

（Ⅱ）设 A 是 3 阶矩阵，如果矩阵 A 的每行元素之和都为 2，则矩阵 A 必有特征向量_____.

【分析】 （Ⅰ）如果 $(1,-1,2)^T$ 是矩阵 A 的特征向量，则 $(-1,1,-2)^T$ 亦是 A 的特征向量. 所以(B)，(D)均错误.

又 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ -14 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，所以(A)不正确，故应选(C).

事实上由 $A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 18 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$，知 $(1,-2,3)^T$ 是矩阵 A 特征值 $\lambda = 6$ 的特征向量.

（Ⅱ）由于矩阵 A 的每行元素之和都为 2，所以有

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 2, \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 2, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 2, \end{cases} \text{即} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{亦即} A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

可见矩阵 A 必有特征向量 $(1,1,1)^T$.

www.TopSage.com

二、相似矩阵的概念与性质

(一) 相似矩阵的概念

设 A,B 是 n 阶矩阵,如存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = B$,则称矩阵 A 与 B **相似**,记为 $A \sim B$.

(二) 相似矩阵的性质

▶1. 如 $A \sim B$,

$\Rightarrow$ $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$,从而 A,B 有相同的特征值 (5.4)

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ (A,B 有相同的迹) (5.5)

$\Rightarrow$ $r(A) = r(B)$ (5.6)

$\Rightarrow$ $|A| = |B|$. (5.7)

【注】 这些都是必要条件,可用来排除哪些矩阵不相似,亦可用来确定相似矩阵的一些参数.

▶2. 如 $A \sim B$,设 $P^{-1}AP = B$,则 $P^{-1}(A + kE)P = B + kE$, $P^{-1}A^nP = B^n$. 因此

由 $A \sim B$ 要联想到 $A + kE \sim B + kE$,进而知 $|A + kE| = |B + kE|$ 及 $r(A + kE) = r(B + kE)$;

由 $A \sim B$ 要联想到 $A^n \sim B^n$(n 为正整数),进而可用相似求方幂,即 $A^n = PB^nP^{-1}$.

▶3. 如 $A \sim B$,则 $A^T \sim B^T$.

▶4. 如 $A \sim B$,且 A,B 都可逆,则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

▶5. 如 $A \sim B,B \sim C$,则 $A \sim C$.

设 $P_1^{-1}AP_1 = B,P_2^{-1}BP_2 = C$,则 $P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = C$. 令 $P = P_1P_2$,有 $P^{-1}AP = C$.

三、矩阵可相似对角化的充分必要条件及解题步骤

(一) 矩阵可相似对角化的概念

如果 n 阶矩阵 A 与对角矩阵 Λ 相似,则称 A 可以**相似对角化**,记成 $A \sim \Lambda$,并称 Λ 是 A 的**相似标准形**.

【注】 若 $P^{-1}AP = \Lambda$,则 Λ 对角线上的元素是 A 的全部特征值,P 的每一列是对应的特征向量.

(二) 矩阵可相似对角化的充分必要条件

▶1. A 与对角矩阵相似的充分必要条件

(1) A 有 n 个线性无关的特征向量; (5.8)

(2) 对于矩阵 A 的每一个 n_i 重特征值 λ_i,其线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数 n_i. 亦即秩 $r(\lambda_iE - A) = n - n_i$. (5.9)

【注】 如果 $A \sim \Lambda$,且 λ_0 是 n_i 重特征值,则 λ_0 应有 n_i 个线性无关的特征向量,即齐次方程组 $(\lambda_0E - A)x = 0$ 的基础解系应含 $n - r(\lambda_0E - A) = n_i$ 个向量,故可通过秩 $r(\lambda_0E - A)$ 来判断 A 是否能对角化.

▶2. A 与对角矩阵相似的充分条件

(1) A 有 n 个不同的特征值;(2) A 是实对称矩阵. (5.10)

www.TopSage.com

（三）相似对角化 A 为对角矩阵 Λ 的解题步骤

第一步，先求出 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

第二步，再求所对应的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$；

第三步，构造可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$.

【例 5.6】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解】 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 0\\ -2 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2=0$，

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=0$.

当 $\lambda=3$ 时，对 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=0$ 时，对 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

那么，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{bmatrix}$.

（四）实对称矩阵的特性及用正交矩阵化 A 为相似标准形的解题步骤

▶1. 实对称矩阵的特性

（1）实对称矩阵必可对角化；

（2）特征值全是实数，特征向量都是实向量；　　(5.11)

（3）不同特征值的特征向量互相正交；　　(5.12)

（4）n_i 重特征值必有 n_i 个线性无关的特征向量，或者说必有秩 $\mathrm{r}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$.　　(5.13)

▶2. 用正交矩阵化 A 为相似标准形的解题步骤

可用正交变换化 $\boldsymbol{A}$ 为相似标准形，解题步骤类同（三），只是要保证 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵，为此当求出特征向量后应改造特征向量.

（1）当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同时，仅需把特征向量单位化就可用来构造矩阵 $\boldsymbol{P}$；

（2）当特征值有重根 λ_i 时，要检查特征向量是否正交，否则必须对 λ_i 的特征向量用 Schmidt 正交化方法处理，才能构造出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

【注】 ① 要掌握用正交变换化实对称矩阵为对角形的方法，这类问题也经常与二次型联系在一起. 往届考生在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 上出错较多，或者忘了单位化，或者对重特征值没有判断是否要 Schmidt 正交化，要不就是求错了特征向量，希望考生引以为戒.

②仅实对称矩阵才能用正交变换化为对角形.当 A 不是对称矩阵时,特征值不同的特征向量没有正交性,即使用 Schmidt 正交化,所得 $k_1\alpha_1+\alpha_2$ 亦不再是特征向量(参看(二)特征向量性质2的【注】),也就不能构造矩阵 P.

【例5.7】 已知 A 是3阶实对称矩阵,且 $A\alpha=\alpha$,其中 $\alpha=(1,1,2)^T$.

(Ⅰ)如果 A 的另外两个特征值是2和 -1,又 $\lambda=2$ 的特征向量是 $(2,0,-1)^T$,则 $\lambda=-1$ 的特征向量是_____;

(Ⅱ)如果 A 的另外两个特征值是3(二重根),则 $\lambda=3$ 的特征向量是_____.

【分析】 对于实对称矩阵,特征值不同特征向量相互正交.

(Ⅰ)设 $\lambda=-1$ 的特征向量是 $(x_1,x_2,x_3)^T$,则

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0,\\2x_1-x_3=0,\end{cases}\quad\text{得基础解系}(1,-5,2)^T.$$

所以 $\lambda=-1$ 的特征向量是 $k(1,-5,2)^T$, $k\neq0$.

(Ⅱ)设 $\lambda=3$ 的特征向量是 $(x_1,x_2,x_3)^T$,则

$$x_1+x_2+2x_3=0,$$

得基础解系 $(-1,1,0)^T,(-2,0,1)^T$.

所以 $\lambda=3$ 的特征向量是 $k_1(-1,1,0)^T+k_2(-2,0,1)^T$, k_1,k_2 不全为0.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 求矩阵的特征值和特征向量

【解题思路】 (1)由 $|\lambda E-A|=0$ 求特征值 λ_i,再由 $(\lambda_iE-A)x=0$ 求基础解系得特征向量;(2)用定义法;(3)用相似.

【例5.8】 求 $A=\begin{bmatrix}3&-2&-4\\-2&6&-2\\-4&-2&3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&4\\2&\lambda-6&2\\4&2&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-7&2&4\\0&\lambda-6&2\\7-\lambda&2&\lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-7)(\lambda^2-5\lambda-14)=(\lambda-7)^2(\lambda+2),$$

当 $\lambda=7$ 时, $7E-A=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,得 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$;

当 $\lambda=-2$ 时, $-2E-A=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$,得 $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$.

所以 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=7,\lambda_3=-2$,相应的特征向量分别是

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,k_3\alpha_3,\text{其中}(k_1,k_2)\neq(0,0),k_3\neq0.$$

www.TopSage.com

评注 ①这是基本计算题,复习时要重视,不要掉以轻心.对这类基本题必须掌握解题步骤,解题要熟练、正确,考生复习时应多做练习,不能停留在理论上会做.

②求特征值时,最好先用行列式的性质提取出λ的一次因子,然后再展开(如【例5.8】).麻烦地,也可考虑用(5.2)硬性展开再求解.例如,在【例5.8】中经计算有

$$\sum_i a_{ii} = 12,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 21,\quad |\boldsymbol{A}| = -98,$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征方程是:$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98 = 0$.设特征值是$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\boldsymbol{A}| = 98$(即(5.3)),故可从$|\boldsymbol{A}|$的因子来分析$\boldsymbol{A}$的特征值.

注意,若$f(x)$是x的多项式,有 $f(x) = (x-a)q(x) + r$,其中$q(x)$是$f(x)$被$x-a$除时的商式,r是余数.显然,在上式中令$x = a$,就有$r = f(a)$.因此,$x-a$是$f(x)$的因式的充分必要条件是余式$r = f(a) = 0$.

在【例5.8】中,对于$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98$我们可以用98的因数$\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$试除.由于$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2)^2 + 21(-2) + 98 = 0$,即$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98$含$\lambda + 2$的因式,亦即$\lambda = -2$是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.再用多项式除法就可得到

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98 = (\lambda + 2)(\lambda - 7)^2,$$

也就求出矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

【例5.9】 求$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -a-2 & 2a \end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

【解】
$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ -3 & a+2 & \lambda - 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ -3 & a+2 & \lambda - 2a \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)[\lambda^2 - (2a+1)\lambda + 4a - 2] = (\lambda - 1)(\lambda - 2)[\lambda - (2a - 1)],$$

当$\lambda = 1$时, $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & a+2 & 1-2a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & a+2 & 1-2a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,得$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} a+2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$;

当$\lambda = 2$时, $2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & a+2 & 2-2a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,得$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

当$\lambda = 2a - 1$时,

$$(2a-1)\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2a-2 & 0 & -2 \\ 0 & 2a-2 & -2 \\ -3 & a+2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{如 } a \neq 1} \begin{bmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\text{得 } \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a-1 \end{bmatrix}.$$

若$a = 1$,即$\lambda = 1$,显然其特征向量就是$\boldsymbol{\alpha}_1$.所以,$\boldsymbol{A}$的特征值是1,2,$2a-1$;相应的特征向量依次是$k_1\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_2, k_3\boldsymbol{\alpha}_3$($k_1, k_2, k_3$全不为0).

评注 当$a = \dfrac{3}{2}$时,$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是线性相关的,仅当$a \neq 1$且$a \neq \dfrac{3}{2}$时,矩阵$\boldsymbol{A}$才有三个线性无关的特征向量.

【例5.10】 已知$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵,满足$\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$,求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

【解】 设λ是矩阵$\boldsymbol{A}$的任意一个特征值,$\boldsymbol{\alpha}$是λ所对应的特征向量,即$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$.

那么$(\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \xrightarrow{\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha} = \lambda^n\boldsymbol{\alpha}} (\lambda^2 - 2\lambda - 3)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}} \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$

www.TopSage.com

所以矩阵 A 的特征值是 3 或 -1.

评注 (1) 由于满足条件 $A^2 - 2A - 3E = 0$ 的矩阵是很多的,例如:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

等等. 我们只是给出这一类矩阵特征值的取值范围. 若想明确矩阵 A 的特征值有没有 3?有几个 3?有没有 0,有几个 0?则还需增加题目的已知条件.

(2) 由本题我们还应当注意到,若矩阵 A 满足 $f(A) = 0$,则矩阵 A 的特征值也满足 $f(\lambda) = 0$.

(3) 请同学证明:若 $A^2 = A$,则 A 的特征值只能是 0 或 1.

【例 5.11】 设 A 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量,且

$$A\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad A\boldsymbol{\alpha}_2 = 4\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3,\quad A\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}.$$

求矩阵 A 的特征值和特征向量.

【解】 由 $A\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_3$,知 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda = 0$ 的特征向量.

由已知条件,有

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) &= (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3, \mathbf{0}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

记 $P = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$,由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,知矩阵 P 可逆,进而

$$P^{-1}AP = B,\quad \text{其中 } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为相似矩阵有相同的特征值,而矩阵 B 的特征多项式

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & 0 \\ 1 & \lambda + 3 & 0 \\ -3 & -5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)^2,$$

所以矩阵 A 的特征值是:$-1, -1, 0$.

对于矩阵 B,

$$-E - B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以矩阵 B 关于特征值 $\lambda = -1$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\beta} = (-2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

若 $B\boldsymbol{\beta} = \lambda\boldsymbol{\beta}$,即 $(P^{-1}AP)\boldsymbol{\beta} = \lambda\boldsymbol{\beta}$,亦即 $A(P\boldsymbol{\beta}) = \lambda(P\boldsymbol{\beta})$,那么矩阵 A 关于特征值 $\lambda = -1$ 的特征向量是

$$P\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3.$$

因此 $k_1(-2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3)$,$k_2\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别是矩阵 A 关于特征值 $\lambda = -1$ 和 $\lambda = 0$ 的特征向量,$(k_1 k_2 \neq 0)$.

【例 5.12】 设 A 是 n 阶矩阵,$A = E + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 都是 $n \times 1$ 矩阵,且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 2$,求 A 的特征值、特征向量.

【分析】 令 $B = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$,则 $A = E + B$,如 λ 是 B 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量,那么

$$A\boldsymbol{\alpha} = (B + E)\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} = (\lambda + 1)\boldsymbol{\alpha}.$$

可见 $\lambda + 1$ 就是 A 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 关于 $\lambda + 1$ 的特征向量. 反之,若 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$,则有 $B\boldsymbol{\alpha} = (\lambda - 1)\boldsymbol{\alpha}$.

www.TopSage.com

所以,为求 A 的特征值、特征向量就可转化为求 B 的特征值、特征向量.

【解】 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,则 $\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{B}$,

可见 $\boldsymbol{B}$ 的特征值只能是 0 或 2.

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$,故齐次方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量组成,则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

基础解系是:$\boldsymbol{\alpha}_1=(-y_2,y_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-y_3,0,y_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-y_n,0,0,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}}$. 这正是 $\boldsymbol{B}$ 的关于 $\lambda=0$,也就是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=1$ 的 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

由于 $\boldsymbol{B}^2=2\boldsymbol{B}$,对 $\boldsymbol{B}$ 按列分块,记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,则 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=2(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}_i=2\boldsymbol{\beta}_i$. 可见 $\boldsymbol{\alpha}_n=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 关于 $\lambda=2$,也就是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=3$ 的特征向量.

那么,$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1($n-1$ 重) 和 3,特征向量分别是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1},k_n\boldsymbol{\alpha}_n,\text{其中 } k_1,k_2,\cdots,k_{n-1} \text{ 不全为 } 0,k_n\neq 0.$$

【例 5.13】 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 3 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,证明 0 和 1 必是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值,并且若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=1$ 的特征向量,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 必是 $\boldsymbol{B}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量.

【证明】 由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0 或 1(【例 5.10】),又因 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,知齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,故 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$,即 $\lambda=1$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 据 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,那么 $|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|=0$,故 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

由于已知条件的对称性,0 与 1 必是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值. 对于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,同时左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$,得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量.

题型二 n 阶矩阵 A 能否相似对角化的判定

【解题思路】 先求特征值,若特征值不同,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$;若特征值有重根,则求秩 $\mathrm{r}(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,检查 $n-\mathrm{r}(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,看齐次方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有几个线性无关的解,即 λ_i 有几个线性无关的特征向量. 如果 k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,否则 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

【例 5.14】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & a & 2\\5 & b & 3\\-1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ 有特征值 ±1,问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化?说明理由.

【解】 由于 ±1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,将其代入特征方程,有

$$\begin{cases}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-7(a+1)=0 \Rightarrow a=-1,\\|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-2(b+3)=0 \Rightarrow b=-3,\end{cases}$$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\5 & -3 & 3\\-1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

www.TopSage.com

据(5.3),$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}\Rightarrow 1+(-1)+\lambda_3=2+(-3)+(-1)$ 得 $\lambda_3=-2$. 那么,A 有 3 个不同的特征值,故 A 可以对角化.

【例 5.15】 已知 $\lambda=0$ 是 $A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{bmatrix}$ 的特征值,判断 A 能否对角化,并说明理由.

【解】 因为 $\lambda=0$ 是特征值,故由

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{vmatrix}=-(k-1)^2=0\Rightarrow k=1.$$

由特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\1&\lambda-1&-1\\-4&-1&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)$,知 $\lambda=0$ 是 A 的二重特征值.

由于 $r(0E-A)=r(A)=r\begin{bmatrix}3&2&-2\\-1&1&1\\4&1&-3\end{bmatrix}=2$,那么 $n-r(0E-A)=1$,说明齐次方程组 $(0E-A)x=0$ 只有一个线性无关的解,亦即 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 只有一个线性无关的特征向量,从而 A 不能相似对角化.

【例 5.16】 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{bmatrix}$ 的特征值有一个二重根,求 a 的值,并讨论矩阵 A 是否可相似对角化.

【解】 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a),$$

(Ⅰ) 如果 $\lambda=2$ 是单根,则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 是完全平方,那么有 $18+3a=16$,即 $a=-\frac{2}{3}$.

由于矩阵 A 的特征值是 2,4,4,而秩 $r(4E-A)=r\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}=2$,故 $\lambda=4$ 只有一个线性无关的特征向量,从而 A 不能相似对角化.

(Ⅱ) 如果 $\lambda=2$ 是二重特征值,则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a=(\lambda-2)(\lambda-6)$,那么有 $18+3a=12$,即 $a=-2$.

由于矩阵 A 的特征值是 2,2,6,而秩 $r(2E-A)=r\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}=1$,故 $\lambda=2$ 有 2 个线性无关的特征向量.从而 A 可以相似对角化.

【例 5.17】 设 A 是 n 阶矩阵,$A^2=A$,$r(A)=r$,证明 A 能对角化,并求 A 的相似标准形.

【证法一】 对 A 按列分块,记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 由 $r(A)=r$,知 A 中有 r 个列向量线性无关,不妨设为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,因为 $A^2=A$,即 $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,所以

$$A\alpha_1=\alpha_1=1\cdot\alpha_1,\quad\cdots,\quad A\alpha_r=\alpha_r=1\cdot\alpha_r.$$

那么 $\lambda=1$ 是 A 的特征值,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是其线性无关的特征向量.

对于齐次线性方程组 $Ax=0$,其基础解系由 $n-r(A)=n-r$ 个向量组成. 因此,0 是 A 的特征值,

www.TopSage.com

基础解系是 $\lambda=0$ 的特征向量. 从而 A 有 n 个线性无关的特征向量，A 可以对角化（$\lambda=1$ 是 r 重根，$\lambda=0$ 是 $n-r$ 重根），且有

$$A\sim\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix}\quad(r\text{个})$$

【证法二】 因为 $A^2=A$，所以 A 的特征值只能是 0 或 1（【例 5.10】）.

又因 $A(E-A)=0$，有 $r(A)+r(E-A)\leqslant n$，而 $r(A)+r(E-A)\geqslant r[A+(E-A)]=r(E)=n$. 可见 $r(A)+r(E-A)=n$，又 $r(A)=r$，所以 $r(E-A)=n-r$.

当 $\lambda=1$ 时，$(E-A)x=0$ 的基础解系由 $n-r(E-A)=n-(n-r)=r$ 个向量组成；

当 $\lambda=0$ 时，$(0E-A)x=0$ 的基础解系由 $n-r(A)=n-r$ 个向量组成.

这样 A 有 n 个线性无关的特征向量，下略.

评注 要理解 A 能对角化的条件(5.8) ~ (5.10)，矩阵 A 能否相似对角化首先看 $A^T=A$？若 A 不是对称矩阵，则求 A 的特征值，检查 A 是否有 n 个不同的特征值，否则当 A 的特征值 λ_0 有 n_i 重根时，关键是看 $r(\lambda_0E-A)$ 是否等于 $n-n_i$，它关系到 λ_0 是否有 n_i 个线性无关的特征向量.

题型三 求相似时的可逆矩阵 P

【解题思路】 如果 $P^{-1}AP=\Lambda$，那么求出矩阵 A 的线性无关的特征向量就可构成可逆矩阵 P.

【例 5.18】 已知 $A=\begin{bmatrix}1&4&-2\\0&-1&0\\1&2&-2\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 P，化 A 为相似标准形 Λ，并写出对角矩阵 Λ.

【解】 先求 A 的特征值、特征向量. 由特征多项式，有

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&2\\0&\lambda+1&0\\-1&-2&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda),$$

于是 A 的特征值是 -1（二重），0.

对 $\lambda=-1$，解齐次方程组 $(-E-A)x=0$，$\begin{bmatrix}-2&-4&2\\0&0&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，

得到特征向量 $\alpha_1=(-2,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$.

对 $\lambda=0$，解方程组 $Ax=0$，$\begin{bmatrix}1&4&-2\\0&-1&0\\1&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-2\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $\alpha_3=(2,0,1)^T$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}-2&1&2\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$.

www.TopSage.com

评注 ① 这是一个基础题，要掌握解题思路、解题步骤. 注意可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ 要匹配，P 即为以 3 个线性无关特征向量为列构成的矩阵，$P^{-1}AP$ 即为以特征值为对角线元素的对角阵.

② 本题虽 $\lambda=-1$ 是二重根，但 $r(-E-A)=1$，有两个线性无关的特征向量，所以 A 能对角化(5.9).

【例 5.19】 已知 $A=\begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix}$ 是 n 阶矩阵，求 A 的特征值、特征向量并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

【解法一】 由 A 的特征多项式，得

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-n & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2n+1 & \lambda-2n+1 & \cdots & \lambda-2n+1 \\ -1 & \lambda-n & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \lambda-n & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix}=(\lambda-2n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda-n+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2n+1)(\lambda-n+1)^{n-1},$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2n-1$，$\lambda_2=n-1$ ($n-1$ 重根).

对于 $\lambda_1=2n-1$，解齐次方程组 $(\lambda_1E-A)x=0$，

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

得到基础解系 $\alpha_1=(1,1,\cdots,1)^T$.

对于 $\lambda_2=n-1$，齐次方程组 $(\lambda_2E-A)x=0$ 等价于 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，得到基础解系

$$\alpha_2=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\quad \alpha_3=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\quad \alpha_n=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

所以 A 的特征向量是：$k_1\alpha_1$ 及 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_n\alpha_n$.

令 $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2n-1 & & & \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{bmatrix}$.

【解法二】 由于 $A=(n-1)E+B$，其中

www.TopSage.com

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}(1,1,\cdots,1),$$

而
$$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}(1,1,\cdots,1)\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}(1,1,\cdots,1)=n\boldsymbol{B},$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值只能是0或 n(参看【例5.10】). 由于 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=n$,故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值必是0($n-1$重),n(单根),那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $n-1$ ($n-1$重),$2n-1$ (单根).

对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块,记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,那么由 $\boldsymbol{B}^2=n\boldsymbol{B}$ 有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)=n(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n).$$

从而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma}_1=n\boldsymbol{\gamma}_1$,即 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 $\lambda=n$ 的特征向量,亦即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=2n-1$ 的特征向量.

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\to\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$,可求出 $(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量,亦是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=n-1$ 的特征向量,下略.

评注 特征向量的求法除了【解法一】之外,亦可类似于【例5.12】类求,请读者练习.

【例5.20】 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

【分析】 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似,为求矩阵 $\boldsymbol{P}$ 应当用相似的性质先求出 a,b,然而再求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量. 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 即为特征值2和 b 对应的线性无关特征向量构成的矩阵.

【解】 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,据(5.5)及(5.7)有

$$\begin{cases}1+4+a=2+2+b,\\|\boldsymbol{A}|=6a-6=4b=|\boldsymbol{B}|\end{cases}\Rightarrow\quad a=5,b=6.$$

由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

当 $\lambda=2$ 时,解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得到基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,即 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量.

当 $\lambda=6$ 时,解齐次线性方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得到基础解系是 $(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$,即 $\lambda=6$ 的特征向量.

那么,令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$,则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

评注 若对(5.5)不熟悉,亦可从特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)]$$

来分析，由于 $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，故 2 是方程 $\lambda^2+(a+3)\lambda+3(a+1)=0$ 的根，可求出 $a=5$.

【例 5.21】 设 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量，且满足 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$.

（Ⅰ）求矩阵 A 的特征值；（Ⅱ）求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

【解】 （Ⅰ）由已知条件有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+3\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}.$$

记 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$，则有 $AP_1=P_1B$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，矩阵 P_1 可逆，所以 $P_1^{-1}AP_1=B$，即矩阵 A 与 B 相似. 由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4),$$

知矩阵 B 的特征值是 1,1,4，故矩阵 A 的特征值是 1,1,4.

（Ⅱ）对矩阵 B，由 $(E-B)x=0$，得 $\lambda=1$ 的特征向量 $\beta_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$；由 $(4E-B)x=0$，得 $\lambda=4$ 的特征向量 $\beta_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

那么令 $P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，得 $P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$.

于是 $P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$.

故当 $P=P_1P_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$ 时，

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}.$$

【例 5.22】 已知矩阵 A 与 B 相似，其中 $A=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}6&a\\-1&b\end{bmatrix}$. 求 a,b 的值及矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

【分析】 由 $|A|=\lambda_1\lambda_2=-5<0$，知 $A\sim\Lambda$，因而可求可逆矩阵 P_1 和 P_2，使 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2=\Lambda$，那么 $P=P_1P_2^{-1}$.

【解】 由 $A\sim B$，知 $\begin{cases}1+3=6+b,\\-5=a+6b\end{cases}\Rightarrow a=7,b=-2$.

从矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4\\-2&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5$，得到 A 的特征值是 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=-1$. 它亦是 B 的特征值.

解齐次线性方程组 $(5E-A)x=0$，$(-E-A)x=0$ 可得到矩阵 A 的属于 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$ 的特征

www.TopSage.com

向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-2,1)^{\mathrm{T}}$.

解齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得到 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量分别是 $\boldsymbol{\beta}_1 = (-7,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (-1,1)^{\mathrm{T}}$.

那么,令 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,有 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 5 & \\ & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$,

即 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1} = \boldsymbol{B}$. 可见,取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,就有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

评注 关于 $\boldsymbol{P}$ 矩阵,也可以不求 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$,而是用相似定义来求,即从 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ 知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$,那么

设 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$,则 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$,即

$$\begin{bmatrix} x_1+4x_3 & x_2+4x_4 \\ 2x_1+3x_3 & 2x_2+3x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1-x_2 & 7x_1-2x_2 \\ 6x_3-x_4 & 7x_3-2x_4 \end{bmatrix}$$

进而有

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1 = (3,7,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (-1,-5,0,2)^{\mathrm{T}}$,因此 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 3t-u & 7t-5u \\ 2t & 2u \end{bmatrix}$.

为保证 $\boldsymbol{P}$ 可逆,此时需 t,u 不全为 0 且 $u \neq 7t$.

题型四 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的参数

【例 5.23】 (Ⅰ)已知 $\lambda = 12$ 是 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & a \end{bmatrix}$ 的特征值,则 $a =$ _____;

(Ⅱ)已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量,则 $x =$ _____.

【分析】 (Ⅰ)由于 $\lambda = 12$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故 $|12\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = 0$,即

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 12-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -4 & 1 \\ -9 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 12-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 12-a \end{vmatrix} = 9(4-a) = 0,$$

所以 $a = 4$.

(Ⅱ)由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0,$$

得到特征值 $\lambda = 1$(二重),$\lambda = -1$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量,故 $\lambda = 1$ 必须有两个线性无关的特征向量(5.9). 那么,必有

www.TopSage.com

$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-2=1$. 于是由

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\quad x=0.$$

【例 5.24】 已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$ 的特征向量，求 a,b 的值，并证明 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征向量均能由 $\boldsymbol{\xi}$ 线性表出.

【解】 按特征向量的定义，设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 λ 所对应的特征向量，则 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，即

$$\begin{bmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{cases}a-1-2=\lambda,\\5+b-3=\lambda,\\-1+2=-\lambda\end{cases}\Rightarrow\quad\lambda=-1,a=2,b=-3.$$

故 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-[2+(-3)+(-2)]\lambda^2+(-1+6-2)\lambda-(-1)=(\lambda+1)^3,$$

知 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值. 又因 $r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}=2$，从而 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向量只有一个. 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量均可由 $\boldsymbol{\xi}$ 线性表出.

【例 5.25】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&3&3\\a&b&c\\2&-14&-10\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，求 a,b,c 的值.

【分析】 由于相似矩阵有相同的特征值(5.4)，$\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵，故 $0,-1,-1$ 就是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，因而也就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，再利用(5.3)就可得到以 a,b,c 为未知数的方程组.

【解】 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，它们有相同的特征值，相同的迹，又因 $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵，故 $0,-1,-1$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，于是由

$$\begin{cases}0+b+(-10)=0+(-1)+(-1),\\|\boldsymbol{A}|=-12a-6b+6c=0,\\|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=15a+15b-20c+15=0\end{cases}\Rightarrow\quad b=8,a=-1,c=6.$$

【例 5.26】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}$，行列式 $|\boldsymbol{A}|=-1$，又 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，求 a,b,c 及 λ_0 的值.

【解】 据已知有 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$. 对于 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$，用 $\boldsymbol{A}$ 左乘两端，得

$$\lambda_0\boldsymbol{A\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},\text{即}\quad\lambda_0\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

由此可得
$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1,&①\\\lambda_0(-5-b+3)=1,&②\\\lambda_0(-1+c-a)=-1.&③\end{cases}$$

www.TopSage.com

①－③得 $\lambda_0=1$．将 $\lambda_0=1$ 代入②和①得 $b=-3,a=c$．

由 $|A|=-1$ 和 $a=c$，有 $\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=a-3=-1$，即得 $a=2$．

故 $a=c=2$．

大家网 TopSage.com

题型五　用特征值和特征向量反求矩阵 A

【例 5.27】 已知 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$，其中 $\alpha_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$．求矩阵 A．

【解法一】 由于 $A\alpha_i=i\alpha_i$ 知，A 有 3 个不同的特征值 1,2,3．所以

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},\text{即 } P^{-1}AP=\Lambda,\text{其中 } P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}.$$

故 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{bmatrix}$．

【解法二】（用分块矩阵） 由于 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$ 知

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3).$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆．于是

$$A=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}.\text{（下略）}$$

评注 这是由特征值、特征向量反求矩阵 A 的基本题型，在此思路下可有各种演变．

【例 5.28】 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3,\\2x_1+(a+4)x_2-5x_3=6,\\-x_1-2x_2+ax_3=-3\end{cases}$$

有无穷多解，而 A 是 3 阶矩阵，且 $\begin{bmatrix}1\\2a\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\a+3\\a+2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a-2\\-1\\a+1\end{bmatrix}$ 分别是 A 关于特征值 1，－1,0 的三个特征向量，求矩阵 A．

【解】 对增广矩阵高斯消元，有 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\2&a+4&-5&6\\-1&-2&a&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&a&-7&0\\0&0&a+1&0\end{array}\right]$．

由于方程组有无穷多解，故 $a=-1$ 或 $a=0$．

当 $a=-1$ 时，三个特征向量 $\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-1\\0\end{bmatrix}$ 线性相关，不合题意，舍去；

www.TopSage.com

当 $a=0$ 时，$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$ 线性无关，是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，故 $a=0$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$，那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{bmatrix}$.

【例 5.29】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 6，-6，0，其中 $\lambda=6$ 与 $\lambda=0$ 的特征向量分别是 $(1,a,1)^{\mathrm{T}}$ 及 $(a,a+1,1)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【分析】 现在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值已知，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就转为应求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，一要确定 a，一要求出 $\lambda=-6$ 的特征向量. 已知条件中实对称矩阵能给什么信息呢？

【解】 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量相互正交(5.12)，所以

$$1\times a+a(a+1)+1\times 1=0\Rightarrow a=-1.$$

设属于 $\lambda=-6$ 的特征向量是 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，它与 $\lambda=6,\lambda=0$ 的特征向量均正交，于是

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\-x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解得 $(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda=-6$ 的特征向量.

那么，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}6&&\\&-6&\\&&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}$. 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&1\\-4&-2&-4\\1&-4&1\end{bmatrix}$.

【例 5.30】 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行元素全是 1，且 $(1,1,1)^{\mathrm{T}},(1,0,-1)^{\mathrm{T}},(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征向量，求 $\boldsymbol{A}$.

【分析】 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量已知，现应求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，可用定义来处理.

【解】 设这些特征向量分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_1=3.$$

类似地，$\lambda_2=\lambda_3=0$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

评注 本题也可不用相似对角化来反求 $\boldsymbol{A}$. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，求出 $\lambda_1=3$. 还可有

类似地 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=3,\\a_1-a_3=0,\\a_1-a_2=0,\end{cases}$ $\begin{cases}b_1+b_2+b_3=3,\\b_1-b_3=0,\\b_1-b_2=0.\end{cases}$

解方程组可求出 a_i,b_i.

题型六 相似对角化的应用——求 $\boldsymbol{A}^n$

【解题提示】 如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，那么 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1}$. 递推地，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$. 通过对角化可求 $\boldsymbol{A}^n$.

www.TopSage.com

【例 5.31】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 4 & x & 1\end{bmatrix}$ 能对角化，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【解】 因为 $\boldsymbol{A}$ 能对角化，所以 $\boldsymbol{A}$ 必有 3 个线性无关的特征向量. 由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 0\\ -4 & -x & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda),$$

$\lambda=1$ 是二重特征值，必有两个线性无关的特征向量，因此 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，得 $x=-2$.

求出 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 及 $\lambda=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$. 则由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}$，得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

【例 5.32】 已知 $\begin{cases}x_n=4x_{n-1}-5y_{n-1},\\ y_n=2x_{n-1}-3y_{n-1},\end{cases}$ 且 $\begin{cases}x_0=2,\\ y_0=1,\end{cases}$ 求 x_{100}.

【分析】 将关系式表示成矩阵形式，用递推来推导 $(x_n,y_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}$ 的关系式. 本题是用特征值、特征向量计算 $\boldsymbol{A}^n$ 的一个典型应用.

【解法一】 由于 $\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}x_{n-2}\\ y_{n-2}\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$，

令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-\lambda-2$. 于是有

$$\lambda_1=2,\boldsymbol{\alpha}_1=(5,2)^{\mathrm{T}}\text{ 和 }\lambda_2=-1,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1)^{\mathrm{T}}.$$

从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2 & \\ & -1\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$. 那么

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n & \\ & (-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 5\end{bmatrix}.$$

故
$$\begin{bmatrix}x_{100}\\ y_{100}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{100} & \\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\cdot 2^{100}+1\\ 2\cdot 2^{100}+1\end{bmatrix},$$

得
$$x_{100}=\frac{5}{3}\cdot 2^{100}+\frac{1}{3}.$$

【解法二】 同【解法一】，先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量 $\lambda_1=2,\boldsymbol{\alpha}_1=(5,2)^{\mathrm{T}}$ 及 $\lambda_2=-1,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1)^{\mathrm{T}}$. 设 $\boldsymbol{\beta}_j=\begin{bmatrix}x_j\\ y_j\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta}_0=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_{j-1}$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_0=\frac{\lambda_1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{\lambda_2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\lambda_1^2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{\lambda_2^2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\quad \boldsymbol{\beta}_n=\frac{\lambda_1^n}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{\lambda_2^n}{3}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

那么 $\begin{bmatrix}x_{100}\\ y_{100}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}_{100}=\frac{2^{100}}{3}\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，所以 $x_{100}=\frac{5}{3}\cdot 2^{100}+\frac{1}{3}$.

评注 【解法二】是利用特征值、特征向量的定义建立递推关系，回避了 $\boldsymbol{A}^n$ 的计算；这样计算有时是简捷的.

www.TopSage.com

【例 5.33】 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工．设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成 $\boldsymbol{\alpha}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 的关系式，并写成矩阵形式：$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（Ⅲ）若 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_0$.

【解】 （Ⅰ）按题意有

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right), \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{化简得}} \begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n, \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n. \end{cases}$$

用矩阵表示，即为

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \text{即 } \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n, \text{其中 } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

（Ⅱ）由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

对 $\lambda = 1$，由 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量是 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 (k_1 \neq 0)$.

对 $\lambda = \frac{1}{2}$，由 $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于 $\lambda = \frac{1}{2}$ 的特征向量是 $k_2\boldsymbol{\eta}_2 (k_2 \neq 0)$.

（Ⅲ）设 $x_1\boldsymbol{\eta}_1 + x_2\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_0$，即 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = \frac{1}{2}, \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{3}{10}.$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{1}{5}\boldsymbol{\eta}_1 + \frac{3}{10}\boldsymbol{\eta}_2$，那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{1}{5}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 + \frac{3}{10}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2$．故

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{1}{5}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\eta}_1 + \frac{3}{10}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{5}\boldsymbol{\eta}_1 + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}.$$

www.TopSage.com

题型七　有关实对称矩阵的问题

【例 5.34】　已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix}$ 有特征值 $\lambda=5$，求 a 的值；并当 $a>0$ 时，求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

【解】　因 $\lambda=5$ 是矩阵 A 的特征值，则由 $|5E-A|=\begin{vmatrix}3&0&0\\0&2&-a\\0&-a&2\end{vmatrix}=3(4-a^2)=0$，

可得 $a=\pm 2$.

当 $a=2$ 时，则由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-1)=0,$$

知矩阵 A 的特征值是 1,2,5.

由 $(E-A)x=0$ 得基础解系 $\alpha_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$；

由 $(2E-A)x=0$ 得基础解系 $\alpha_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

由 $(5E-A)x=0$ 得基础解系 $\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

即矩阵 A 属于特征值 1,2,5 的特征向量分别是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

由于实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交，故只需单位化，有

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

那么，令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则有 $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{bmatrix}$.

评注　求出特征值之后可用 $\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$ 检查一下；对于实对称矩阵，应有特征向量之间 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=0\ (i\neq j)$，未验证，万一出错可尽早发现.

构造正交矩阵时不要忘记单位化或 Schmidt 正交化，且特征向量的排序与 Λ 中特征值的顺序要一致.

【例 5.35】　设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&a&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$ 的特征值有重根，试求正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形.

【分析】　因为 Q 是正交矩阵，有 $Q^{\mathrm{T}}=Q^{-1}$，故 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$，即 $Q^{-1}AQ=\Lambda$. 为此，应当求矩阵 A 的特征向量.

【解】　A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - a & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - a & -4 \\ 2\lambda - 2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 2 & -2 \\ 10 & \lambda - a & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ 10 & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)[\lambda^2 + (3 - a)\lambda - (3a + 20)],$$

由于判别式$(3 - a)^2 + 4(3a + 20) = 0$没有实数根，即$\lambda^2 + (3 - a)\lambda - (3a + 20) \neq (\lambda - k)^2$，所以只能$\lambda = 2$是重根. 于是$\lambda^2 + (3 - a)\lambda - (3a + 20)$必有$\lambda - 2$的因式，因此由

$$2^2 + 2(3 - a) - (3a + 20) = 0, \text{得 } a = -2.$$

从而得到矩阵A的特征值是$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -7$.

对于$\lambda = 2$，由$(2E - A)x = 0$，即 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

得到线性无关的特征向量$\alpha_1 = (-2,1,0)^T, \alpha_2 = (2,0,1)^T$. 用 Schmidt 正交化方法，先正交化，有

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

再将β_1, β_2单位化，得

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

对于$\lambda = -7$，由$(-7E - A)x = 0$，即 $\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

得特征向量$\alpha_3 = (1,2,-2)^T$，单位化为$\gamma_3 = \frac{1}{3}(1,2,-2)^T$.

那么，令$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$，即有 $Q^TAQ = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -7 \end{bmatrix}$.

【例 5.36】 设$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$，正交矩阵$Q$使得$Q^TAQ$为对角矩阵. 若$Q$的第 1 列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求$a, Q$.

【分析】 因为Q是正交矩阵$\Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$，所以$Q^TAQ = \Lambda$，即$Q^{-1}AQ = \Lambda$. Λ的对角线上的元素是A的特征值，Q是A的特征向量.

【解】 按已知条件，$(1,2,1)^T$是矩阵A的特征向量，设特征值是λ_1，那么

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 + (-2) + 4 = \lambda_1, \\ -1 + 6 + a = 2\lambda_1, \\ 4 + 2a + 0 = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ a = -1. \end{cases}$$

www.TopSage.com

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4)$,

知矩阵 A 的特征值是:2,5,-4.

对 $\lambda = 5$,由 $(5E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得基础解系 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$.

对 $\lambda = -4$,由 $(-4E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得基础解系 $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.

因为 A 是实对称矩阵,特征值不同特征向量相互正交,故只需把 α_2, α_3 单位化,有

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T.$$

那么令 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,则 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix}$.

评注 Q 也可写为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$,此时对应的对角矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$.

【例 5.37】 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值,$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$,且 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量.记 $B = A^5 - 4A^3 + E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量,并求 B 的全部特征值与特征向量;(Ⅱ)求矩阵 B.

【解】 (Ⅰ)由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 有 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$.那么,对于 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 = \alpha_1$,有

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\alpha_1 = -2\alpha_1.$$

因此,向量 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量.

类似地,对 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 有:若 $A\alpha = \lambda_2\alpha$,则 $B\alpha = (\lambda_2^5 - 4\lambda_2^3 + 1)\alpha = \alpha$;

若 $A\beta = \lambda_3\beta$,则 $B\beta = (\lambda_3^5 - 4\lambda_3^3 + 1)\beta = \beta$,

那么 α, β 是矩阵 B 属于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量.因 α, β 是矩阵 A 不同特征值的特征向量,因此它们线性无关.从而矩阵 B 的特征值是:$-2, 1, 1$,且矩阵 B 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量是 $k_1\alpha_1 (k_1 \neq 0)$.

又由 A 是实对称矩阵知,B 是实对称矩阵.那么 B 的属于特征值 $\lambda = 1$ 与 $\lambda = -2$ 的特征向量应当相互正交.设矩阵 B 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$,则

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

解此方程组得基础解系 $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.故矩阵 B 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量是 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 (k_2, k_3$ 不全为 0).

www.TopSage.com

(Ⅱ) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$. 那么

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}.$$

评注 作为实对称矩阵,它既可用正交矩阵相似对角化,也可用可逆矩阵相似对角化. 因此对于相似对角化的试题要注意题目的要求. 本题是求矩阵 $\boldsymbol{B}$,这是相似的应用,那么用可逆矩阵相似对角化是简捷的. 如若用正交矩阵相似对角化就繁了!

【例 5.38】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,且秩 $r(\boldsymbol{A})=2$. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值,并求秩 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

【解】 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于特征值 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$,于是

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}.$$

那么用 $\boldsymbol{\alpha}$ 右乘 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 得 $(\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

因为特征向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+2\lambda=\lambda(\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2)=\lambda(\lambda+2)(\lambda^2+1)=0$.

由于实对称矩阵的特征值必是实数,从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 或 -2.

由于实对称矩阵必可相似对角化,且秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=2$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0, -2, -2.

因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,则有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$,所以秩 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{E})=3$.

评注 实对称矩阵有许多重要的性质,要注意实对称矩阵所蕴含的特殊信息,结合已知条件将其挖掘出来,思路自然也来. 参考书[1]知识要点讲解三,(四)的说明,希望同学更好地理解、掌握.

题型八 有关特征值与特征向量的证明

【例 5.39】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是相应的特征向量. 证明 λ 只能是 ±1,并且 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量.

【证明】 按特征值定义,对于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,经转置得

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}=(\lambda\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,从而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\lambda\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,则 $(1-\lambda^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 是实特征向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2>0$,可知 $\lambda^2=1$,由于 λ 是实数,故只能是 1 或 -1.

若 $\lambda=1$,从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,两边左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,得到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 关于 $\lambda=1$ 的特征向量(类似可有 $\lambda=-1$ 的论证,下略).

评注 如 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,从 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值,但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量往往是无关联的. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-5\\2&-3\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&2\\-5&-3\end{bmatrix}$,虽特征值都是 2 和 -1,但 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=2$ 的特征向量是 $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$,而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 关于 $\lambda=2$ 的特征向量是 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

【例 5.40】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵,证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值.

www.TopSage.com

【证明】 设 λ_0 是 AB 的非零特征值，α_0 是 AB 对应于 λ_0 的特征向量，即

$$(AB)\alpha_0 = \lambda_0\alpha_0 \quad (\alpha_0 \neq 0).$$

用 B 左乘上式，得 $BA(B\alpha_0) = \lambda_0 B\alpha_0$.

下面需证 $B\alpha_0 \neq 0$（这样 $B\alpha_0$ 就是矩阵 BA 对应于 λ_0 的特征向量）.

（反证法） 如 $B\alpha_0 = 0$，那么 $(AB)\alpha_0 = A(B\alpha_0) = 0$，这与 $(AB)\alpha_0 = \lambda_0\alpha_0 \neq 0$ 相矛盾.

所以，λ_0 是 BA 的特征值.

如 $\lambda_0 = 0$ 是 AB 的特征值，则因

$$|0E - BA| = |-BA| = (-1)^n|B|\cdot|A| = (-1)^n|A|\cdot|B| = |0E - AB|,$$

所以，$\lambda_0 = 0$ 也是 BA 的特征值.

同样可证 BA 的特征值必是 AB 的特征值，所以 AB 与 BA 特征值相同.

评注 对于抽象给出的矩阵，论证题常是由定义 $A\alpha = \lambda\alpha$ 出发，经过等式变形导出结论.

【例 5.41】 设 A,B 均是 n 阶矩阵，且秩 $r(A) + r(B) < n$，证明：A,B 有公共的特征向量.

【证明】 设 $r(A) = r, r(B) = s$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，即矩阵 A 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$ 是 B 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量. 那么，向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$$

必线性相关（由于 $n - r + n - s = n + (n - r - s) > n$，【定理 3.2】）.

于是存在不全为零的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r},l_1,l_2,\cdots,l_{n-s}$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r} + l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \cdots + l_{n-s}\beta_{n-s} = 0.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$ 线性无关，所以 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 与 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-s}$ 必分别不全为零. 令 $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r} = -(l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \cdots + l_{n-s}\beta_{n-s})$，

则 $\gamma \neq 0$，从特征向量性质 1 知，γ 既是 A 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量，也是 B 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量，因而 A，B 有公共的特征向量.

评注 设 α 是 n 阶矩阵 A 的属于 $\lambda = 0$ 的特征向量，α 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解. 本题有相当简捷的证明方法（解齐次方程组，读者自己完成）. 在此只是为了引导读者理解和掌握概念而选择了线性相关的方法.

【例 5.42】 若任一 n 维非零向量都是 n 阶矩阵 A 的特征向量，则 A 是数量矩阵.

【证明】 因为任一 n 维非零向量都是 A 的特征向量，所以 A 有 n 个线性无关的特征向量，从而 A 可以对角化.

特别地，n 维单位向量 $e_i = (0,\cdots,1,\cdots,0)^T, i = 1,2,\cdots,n$，是 A 的特征向量.

令 $P = (e_1,e_2,\cdots,e_n)$，则有 $P = E$，且

$$A = P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

若 A 的特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则由于 e_1,e_2 分别是 λ_1,λ_2 的特征向量，那么 $e_1 + e_2$ 不再是 A 的特征向量（请复习本章考核知识要点讲解一、(二) 中 2. 的【注】），这与已知条件“任一非零向量都是特征向量”相矛盾，同理可知 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$，即 A 是数量矩阵.

【例 5.43】 设 A 是 3 阶矩阵，且有 3 个互相正交的特征向量，证明 A 是对称矩阵.

【分析】 非零正交向量组是线性无关的，故 A 有 3 个线性无关的特征向量，即 A 可以对角化，并且可以用正交变换化为对角形.

【证明】 设 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，相应的特征向量是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已两两正交，将

www.TopSage.com

其单位化为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 仍是 A 的特征向量，且 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 是正交矩阵，并有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}.$$

从而由 $A=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^{\mathrm{T}}$，得 $A^{\mathrm{T}}=(P\Lambda P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}=P\Lambda P^{\mathrm{T}}=A$，即 A 是对称矩阵.

题型训练

一、选择题

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征值，则伴随矩阵 A^* 的一个特征值是

(A) $\lambda^{-1}|A|^{n-1}$. (B) $\lambda^{-1}|A|$. (C) $\lambda|A|$. (D) $\lambda|A|^{n-1}$.

2. 设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}+E$ 的一个特征值是

(A) $\frac{7}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{7}{4}$. (D) $\frac{5}{2}$.

3. 设 A 是3阶不可逆矩阵，α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，α_3 是属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量，下列不是 A 的特征向量的是

(A) $\alpha_1+3\alpha_2$. (B) $\alpha_1-\alpha_2$. (C) $\alpha_1+\alpha_3$. (D) $2\alpha_3$.

4. 设 α_0 是 A 属于特征值 λ_0 的特征向量，则 α_0 不一定是其特征向量的矩阵是

(A) $(A+E)^2$. (B) $-2A$. (C) A^{T}. (D) A^*.

5. 下列矩阵中不能相似对角化的是

(A) $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&3\\0&3&0\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&2&3\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&2&3\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&3\end{bmatrix}$.

6. 设 A 是 n 阶非零矩阵，$A^m=0$，下列命题中不一定正确的是

(A) A 的特征值只有零. (B) A 必不能对角化.

(C) $E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}$ 必可逆. (D) A 只有一个线性无关的特征向量.

二、填空题

1. 设 A 是 n 阶矩阵，$r(A)<n$，则 A 必有特征值_____，且其重数至少是_____.

2. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的特征值，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值_____.

3. 已知 -2 是 $A=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\2&x&-2\\-2&2&6\end{bmatrix}$ 的特征值，则 $x=$_____.

4. 设 A 是秩为2的3阶实对称矩阵，且 $A^2+5A=0$，则 A 的特征值是_____.

5. 已知 $\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&x\end{bmatrix}$ 的特征向量，则 $x=$_____.

6. 设 A 是3阶矩阵，且各行元素之和都是5，则 A 必有特征向量_____.

7. 设 A 是3阶实对称矩阵，特征值是0,1,2. 如果 $\lambda=0$ 与 $\lambda=1$ 的特征向量分别是 $\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 与 $\alpha_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\lambda=2$ 的特征向量是_____.

8. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，则 $x=$_____，$y=$_____.

www.TopSage.com

9. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-2&-3&a\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 有两个线性无关的特征向量，则 $a=$ _____.

大家网 TopSage.com

三、计算题与证明题

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-2&-3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求 A 的特征值、特征向量，并判断 A 能否对角化，说明理由.

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，求 A^* 的特征值与特征向量.

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}-4&-10&0\\1&3&0\\3&x&1\end{bmatrix}$ 可对角化，求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

4. 已知 A 是 3 阶不可逆矩阵，-1 和 2 是 A 的特征值，$B=A^2-A-2E$，求 B 的特征值，并问 B 能否相似对角化，并说明理由.

5. 设 3 阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ 对应的特征向量依次为 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,4)^T$，$\alpha_3=(1,3,9)^T$.

   (Ⅰ) 将向量 $\beta=(1,1,3)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；(Ⅱ) 求 $A^n\beta$.

6. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$ 可逆，向量 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 A^* 的特征向量，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求 a,b 的值.

7. 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值，若 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$，$\alpha_3=(-1,2,-3)^T$ 都是 A 属于 $\lambda=6$ 的特征向量，求矩阵 A.

8. 已知 $A\sim B$，$A^2=A$，证明 $B^2=B$.

9. 已知 $A^2=0$，$A\neq 0$，证明 A 不能相似对角化.

10. 已知 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是相应的特征向量且线性无关，如 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 仍是 A 的特征向量，则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.

第六章　二次型

内容概要与重难点提示

二次型与实对称矩阵之间有着一一对应的关系. 一方面,二次型的问题可以用矩阵的理论和方法来研究;另一方面,实对称矩阵的问题也可转化为用二次型的思想方法来解决.

本章的中心问题主要有两个:(1) 化二次型为标准形,可用配方法、正交变换法. 重点是正交变换法,用正交变换化二次型为标准形与前面所讲的对称矩阵正交相似对角形是同一个问题,而以两种不同的形式出现. 需要注意的是对于有多重特征值时,解方程组所得的对应的特征向量可能不一定正交,这时要正交规范化. (2) 二次型的正定性,要掌握判断正定性的方法.

如用正交变换化二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 既相似又合同,$\boldsymbol{\Lambda}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值所组成,所以标准形中平方项的系数是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,而坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 中的 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 若用配方法化 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 仅仅是合同. 此时对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的元素是不唯一的.

考核知识要点讲解

一、二次型的概念及其标准形

(一) 二次型及其矩阵表示

含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式(即每项都是二次的多项式)

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad a_{ij}=a_{ji},\tag{6.1}$$

称为 n 元**二次型**. 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,则二次型可用矩阵乘法表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\tag{6.1'}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$),称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 称为二次型 f 的**秩**,记作 $\mathrm{r}(f)$.

【注】　二次型的矩阵是唯一的. 由二次型应能立即写出其二次型矩阵. 反之,给出实对称矩阵要能构造出二次型. 例如:二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3$ 用矩阵表示为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&2&-4\\2&3&0\\-4&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\text{其中二次型矩阵 }\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-4\\2&3&0\\-4&0&5\end{bmatrix}.$$

又如:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&3\\0&3&4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,分别可构造3元二次型

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3,\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=x_1^2-x_2^2.$$

www.TopSage.com

（二）二次型的标准形

如果二次型中只含有变量的平方项，所有混合项 $x_ix_j(i \neq j)$ 的系数全是零，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2, \tag{6.2}$$

其中 $d_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为实数，则称这样的二次型为**标准形**.

在标准形中，正平方项的个数 p 称为二次型的**正惯性指数**，负平方项的个数 q 称为二次型的**负惯性指数**. 注意 $\mathrm{r}(f) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = p + q$.

【定理 6.1】 任意的 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 都可以通过坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（注意 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵）化成标准形，即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \xlongequal{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2, \tag{6.3}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 特别地，存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵）化 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形，即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}, \tag{6.4}$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

【注】 正交变换化二次型为标准形时，标准形中平方项系数必是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，而配方法没有这个属性. 要掌握正交变换化标准形的方法.

若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化成标准形

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = d_1y_1^2 + \cdots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \cdots - d_{p+q}y_{p+q}^2,$$

其中 $d_i > 0\ (i = 1,2,\cdots,p+q)$，如果再作坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{d_2}}z_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{p+q} = \dfrac{1}{\sqrt{d_{p+q}}}z_{p+q}, \\ y_{p+q+1} = z_{p+q+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = z_n. \end{cases}$$

于是二次型化作 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$，它称为二次型的**规范形**.

注意，只要知道二次型的正、负惯性指数也就知道其规范形，二次型的标准形是不唯一的，但它的规范形唯一.

（三）惯性定理

【定理 6.2】 对于一个二次型，不论选取怎样的坐标变换使它化为仅含平方项的标准形，其正、负惯性指数与所选坐标变换无关.

【注】 二次型的标准形是不唯一的，它与所选用的坐标变换有关，惯性定理告诉我们二次型的正、负惯性指数是唯一不变的，它反映了二次型的本质特征，应了解惯性定理.

www.TopSage.com

二、正定二次型与正定矩阵

▶1. 正定二次型与正定矩阵的概念 对二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,如对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$,则称二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是**正定二次型**.正定二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**正定矩阵**.

例如,2 元二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2$,对任何 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}t\\u\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{0}$,总有 $f(t,u)=t^2+3u^2>0$,所以 f 是正定二次型,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&\\&3\end{bmatrix}$是正定矩阵.而 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2$,对 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{0}$,有 $f(0,0,1)=0$,此二次型不是正定二次型,亦即 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&0\end{bmatrix}$不是正定矩阵.

▶2. 二次型正定的充分必要条件

【定理 6.3】 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数 $p=n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同,即有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全大于零

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

【注】 正定的必要条件:$a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$;$\quad|\boldsymbol{A}|>0$. (6.5)

三、合同矩阵

▶1. 合同矩阵的概念 两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,如存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **合同**,记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

用矩阵的语言,【定理 6.1】可叙述为:任一实对称矩阵必合同于一个对角矩阵.

▶2. 两矩阵合同的充分必要条件 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$ 的充要条件是:二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的正、负惯性指数.

▶3. 两矩阵合同的充分条件 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$ 的充分条件是 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

因为若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,从而二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的标准形,即有相同的正、负惯性指数,从而 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

【注】 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$ 的必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

【例 6.1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}$,则有 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

【证明】 因为有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&\\&\sqrt{2}\end{bmatrix}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&\\&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&\\&\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&\\&4\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$,

或者,由二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+2x_2^2$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=3x_1^2+4x_2^2$ 有相同的正惯性指数 $p=2$ 及相同的负惯性指数 $q=0$ 而知 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.(**注意**:$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似,因为相似的必要条件是特征值相同,显然不满足.)

www.TopSage.com

题型一 有关二次型基本概念的问题

【例 6.2】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的正、负惯性指数分别为 $p=$_____, $q=$_____.

【分析】 $f=(2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3)+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$.

由于二次型的标准形是 $2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$, 所以 $p=2, q=0$.

评注 虽 f 已表示成平方和, 但如令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_1 + x_3, \end{cases} \tag{*}$$

则由行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 可知 (*) 不是坐标变换, 因此如认为 f 的标准形是 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 而得出 $p=3$ 就是错误的.

从二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 可通过特征多项式求出特征值

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2,$$

亦可得到标准形是 $3y_1^2+3y_2^2$, 进而有 $p=2, q=0$.

不论用配方法还是用正交变换法都可求出 p,q. 因此在方法的选择上要灵活.

【例 6.3】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=$_____, 规范形是_____.

【分析】 按定义, 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. 由特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-2)(\lambda+4),$$

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是: 2, 6, −4.

故正交变换下二次型的标准形是 $2y_1^2+6y_2^2-4y_3^2$. 所以规范形是 $z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

或, 由配方法, 有

www.TopSage.com

$$
\begin{aligned}
f &= 2[x_2^2 + 2x_2(x_1 + 2x_3) + (x_1 + 2x_3)^2] + 2x_3^2 - 4x_1x_3 - 2(x_1 + 2x_3)^2 \\
&= 2(x_2 + x_1 + 2x_3)^2 - 2x_1^2 - 12x_1x_3 - 6x_3^2 \\
&= 2(x_2 + x_1 + 2x_3)^2 - 2(x_1^2 + 6x_1x_3 + 9x_3^2) + 12x_3^2 \\
&= 2(x_2 + x_1 + 2x_3)^2 - 2(x_1 + 3x_3)^2 + 12x_3^2,
\end{aligned}
$$

亦知规范形是 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

评注 知道正、负惯性指数就知规范形，知道标准形也就知规范形．由本题的两种解法可看出标准形是不唯一的．

【例 6.4】 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是秩为 n 的 n 阶实对称矩阵，A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式$(i,j = 1,2,\cdots,n)$，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

（Ⅰ）记 $\boldsymbol{X} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，试写出二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式；

（Ⅱ）判断二次型 $g(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范形是否相同，并说明理由．

【分析】 按定义，若 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 就是二次型 f 的矩阵表示，而两个二次型的规范形是否一样关键是看正负惯性指数是否一致.

【解】 （Ⅰ）因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$，故 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的实对称矩阵，于是 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$，

即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是实对称矩阵，那么 $\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$ 是对称的，因而 $\boldsymbol{A}^*$ 是实对称矩阵，可见 $A_{ij} = A_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$，于是

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{X}) &= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}.
\end{aligned}
$$

因此，二次型 f 的矩阵表示为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$，其二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{-1}$ 均是可逆的实对称矩阵，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同．于是 $g(\boldsymbol{X})$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 有相同的规范形．

评注 若 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，则由 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ 不是对称矩阵，可知 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 不是二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵形式．由

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3x_1 + 8x_3^2 + 2x_2x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 \\
&= (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

www.TopSage.com

可知该二次型的矩阵是 $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&4\\2&4&5\end{bmatrix}$，对于二次型矩阵的概念应当理解清楚.

关于 $g(X)$ 与 $f(X)$ 规范形是否一致，可通过坐标变换来实现，令 $X=A^{-1}Y$，其中 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$g(X)=X^{\mathrm{T}}AX=(A^{-1}Y)^{\mathrm{T}}A(A^{-1}Y)=Y^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}AA^{-1}Y=Y^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{-1}Y=Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y.$$

由此知 A 与 A^{-1} 合同，于是 $f(X)$ 与 $g(X)$ 必有相同的规范形.

题型二　化二次型为标准形

【解题思路】　用正交变换化二次型为标准形的解题步骤为：

第一步，把二次型表示为矩阵形式 $x^{\mathrm{T}}Ax$；

第二步，求 A 的特征值及相应的特征向量（当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，最好检验你所求 X_1,X_2 是否正交）；

第三步，若特征值有重根，则对重根所求的特征向量要注意，若不正交，则需 Schmidt 正交化；

第四步，把特征向量单位化为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$；

第五步，构造正交矩阵 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$（建议读者用第二章的【例 2.2】正交矩阵的几何意义检查你所构造矩阵 C 的正确性）；

第六步，令 $x=Cy$，得 $x^{\mathrm{T}}Ax=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

用配方法化二次型为标准形的解题步骤为：

(1) 如二次型中至少有一个平方项，不妨设 $a_{11}\neq0$，则对所有含 x_1 的项配方（经配方后所余各项中不再含 x_1）. 如此继续配方，直至每一项都包含在各完全平方项中，引入新变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. 由 $y=C^{-1}x$，得 $x^{\mathrm{T}}Ax=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$.

(2) 如二次型中不含平方项，只有混合项，不妨设 $a_{12}\neq0$，则可令

$$x_1=y_1+y_2,\quad x_2=y_1-y_2,\quad x_3=y_3,\quad\cdots,\quad x_n=y_n.$$

经此坐标变换，二次型中出现 $a_{12}y_1^2-a_{12}y_2^2$ 后，再按(1) 实行配方法.

【例 6.5】　求正交变换化二次型 $2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 为标准形，并写出所用正交变换.

【解】　二次型矩阵是 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$. 由特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&\lambda+1&0\\1&\lambda&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda),$$

得到 A 的特征值是 $3,-1,0$.

对 $\lambda=3$，由 $(3E-A)x=0$，即 $\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&3&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1\\&2&1\\&&0\end{bmatrix}$，解得 $\alpha_1=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

类似地，对 $\lambda=-1$，$\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$；$\lambda=0$ 时，$\alpha_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 特征值无重根，仅需单位化：

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\quad\gamma_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad\gamma_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

www.TopSage.com

构造正交矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，那么令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=3y_1^2-y_2^2$ 为所求标准形.

【例 6.6】 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$ 是二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+4x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，求正交变换化二次型为标准形，并写出所用正交变换.

【解】 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & b\end{bmatrix}$. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，则

$$\begin{bmatrix}a & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}.$$

于是 $\begin{cases}a+4+4=\lambda,\\ -2-8-8=-2\lambda,\\ 2+8+2b=2\lambda\end{cases}\Rightarrow\quad a=1,b=4,\lambda=9.$

从而 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{bmatrix}$. 由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ -2 & 4 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9),$$

可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,9.

对 $\lambda=0$，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交，故需 Schmidt 正交化，即

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{5}(-2,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

把 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-2,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{3}(1,-2,2)^{\mathrm{T}}.$$

那么经正交变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}.$$

因此，二次型化为标准形 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=9y_3^2$.

【例 6.7】 设二次型 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$ 经正交变换化为 $3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$，求 a，b 的值及所用正交变换.

【解】 二次型及其标准形的矩阵分别是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & a\\ -2 & a & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & b\end{bmatrix}$.

www.TopSage.com

由于是用正交变换化为标准形,故 A 与 B 不仅合同而且相似. 那么

$$1+1+1=3+3+b \Rightarrow b=-3.$$

$$|3E-A|=\begin{vmatrix}2&2&2\\2&2&-a\\2&-a&2\end{vmatrix}=-2(a+2)^2=0 \Rightarrow a=-2(\text{二重}).$$

对 $\lambda=3$,由 $(3E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$, $\alpha_2=(1,0,-1)^T$;

对 $\lambda=-3$,由 $(-3E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_3=(1,1,1)^T$.

因为 $\lambda=3$ 是二重根,对 α_1,α_2 正交化有

$$\beta_1=\alpha_1=(1,-1,0)^T,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,-1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)=\frac{1}{2}(1,1,-2)^T.$$

单位化,有 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$, $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

令 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$,经 $x=Cy$,二次型化为 $3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$.

【例 6.8】 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $x=Qy$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

(Ⅲ)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

【解】 (Ⅰ)二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 二次型的秩为 2,即二次型矩阵 A 的秩为 2,

从而 $|A|=2\begin{vmatrix}1-a&1+a\\1+a&1-a\end{vmatrix}=-8a=0$,解得 $a=0$.

(Ⅱ)当 $a=0$ 时,$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,由特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-1)^2-1]=\lambda(\lambda-2)^2,$$

得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda=2$ 时,由 $(2E-A)x=0$,$\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

得特征向量 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$.

当 $\lambda=0$ 时,由 $(0E-A)x=0$,$\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,得特征向量 $\alpha_3=(1,-1,0)^T$.

容易看出,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已两两正交,故只需将它们单位化:

www.TopSage.com

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2 = (0,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$$

那么令 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,则在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = 2y_1^2 + 2y_2^2.$$

(Ⅲ) 由 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 = 0$,得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

所以方程 $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的通解为:$k(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

评注 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下化为标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2$,那么求方程 $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的解即可由 $2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$ 给解 $\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 0, \\ y_3 \text{ 任意}. \end{cases}$ 然后再全部变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 返回为 x_1,x_2,x_3 的情况:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ 0 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

【例 6.9】 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

(Ⅰ) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$,求 a 的值.

【解】 (Ⅰ) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$,其特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)[\lambda - (a+1)][\lambda - (a-2)],$$

所以二次型 f 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

(Ⅱ) 因为二次型 f 的规范形是 $y_1^2 + y_2^2$,所以二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为:2 个正数,1 个 0.

由于 $a-2 < a < a+1$,所以 $a - 2 = 0$,即 $a = 2$.

【例 6.10】 设三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2ax_1x_3$ 的正、负惯性指数都是 1,(Ⅰ) 求 a 的值,并用正交变换化二次型为标准形;(Ⅱ) 如 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$,求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的规范形.

【解】 (Ⅰ) 二次型矩阵是 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

由于 $r(\boldsymbol{A}) = p + q = 2$,所以 $|\boldsymbol{A}| = -(a-1)^2(a+2) = 0$.

若 $a = 1$,则 $r(\boldsymbol{A}) = 1$ 不合题意,舍去.若 $a = -2$,由特征多项式

www.TopSage.com

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda + 2 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3),$$

大家网 TopSage.com

得出 A 的特征值为 ± 3 与 0. $p = q = 1$ 合于所求. 故 $a = -2$.

当 $\lambda = 3$ 时,由 $(3E - A)x = 0$,得特征向量 $\alpha_1 = (1,0,1)^T$;

当 $\lambda = -3$ 时,由 $(-3E - A)x = 0$,得特征向量 $\alpha_2 = (1,-2,-1)^T$;

当 $\lambda = 0$ 时,由 $(0E - A)x = 0$,得特征向量 $\alpha_3 = (-1,-1,1)^T$.

由于特征值不同特征向量已正交,单位化得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^T, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)^T.$$

那么令 $Q = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,则经正交变换 $x = Qy$,有 $f = x^TAx = y^TAy = 3y_1^2 - 3y_2^2$.

(Ⅱ) 如 $A\alpha = \lambda\alpha$,则 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$,那么

$$B\alpha = (A^3 - 5A + E)\alpha = (\lambda^3 - 5\lambda + 1)\alpha.$$

因为 A 的特征值是 $3,-3,0$,所以 B 的特征值是 $13,-11,1$. 从而 x^TBx 的规范形是

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

【例 6.11】 已知三元二次型 x^TAx 的秩为 2,且

$$A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

求此二次型的表达式,并求正交变换 $x = Qy$ 化二次型为标准形.

【解】 二次型 x^TAx 的秩为 2,即 $r(A) = 2$,所以 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值.

又
$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以 3 是 A 的特征值,$(1,2,1)^T$ 是 3 的特征向量; -1 也是 A 的特征值,$(1,-1,1)^T$ 是 -1 的特征向量.

因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交,设 $\lambda = 0$ 的特征向量是 $(x_1,x_2,x_3)^T$,则有

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

即 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ 解出 $\lambda = 0$ 的特征向量是 $(1,0,-1)^T$.

那么 $A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,所以

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 8 & 10 & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此 $x^TAx = \frac{1}{6}(x_1^2 + 10x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 2x_1x_3 + 16x_2x_3)$.

令 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$,则经正交坐标变换 $x = Qy$ 有 $x^TAx = y^TAy = 3y_1^2 - y_3^2$.

www.TopSage.com

评注 求二次型表达式就是求二次型矩阵 A，本题也可如下求：

设 $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$，那么由 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$，得

$$\begin{cases} a+2b+c=3, \\ a-b+c=-1, \\ b+2d+e=6, \\ b-d+e=1, \\ c+2e+f=3, \\ c-e+f=-1, \end{cases}$$ 解出 $b=\frac{4}{3}, d=\frac{5}{3}, e=\frac{4}{3}, a=f, a+c=\frac{1}{3}$.

再由二次型的秩为 2，即 $|A|=0$，

$$\begin{vmatrix} a & \frac{4}{3} & c \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ c & \frac{4}{3} & a \end{vmatrix}=0,\quad \text{得 } a=c.$$

所以 $a=c=f=\frac{1}{6}$.

【例 6.12】 用配方法把二次型 $2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 化为标准形，并写出所用坐标变换.

【解】 $f=2[x_3^2+x_3(x_1-x_2)]-2x_1x_2=2\left(x_3+\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2-2x_1x_2$

$$=2\left(x_3+\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2,$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1, \\ y_2=x_1+x_2, \\ y_3=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+x_3, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$，则 $f=-\frac{1}{2}y_2^2+2y_3^2$ 为所求标准形.

评注 用正交变换化标准形时，平方项系数是特征值，且是唯一的（如【例 6.5】）. 而由配方法所得标准形是不唯一的（如本例，还可有 $2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2, y_1^2-y_2^2, \cdots$ 等）. 但不论用哪种坐标变换，正负惯性指数是一致的.

【例 6.13】 用配方法化二次型 $x_1x_2+2x_2x_3$ 为标准形，并写出所用满秩线性变换.

【分析】 二次型中不含平方项，故应先作一次坐标变换构造出平方项，再按前例实施配方.

【解】 令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$ 则

$$f=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1-y_2)y_3$$
$$=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3-2y_2y_3=(y_1+y_3)^2-(y_2+y_3)^2.$$

再令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=y_2+y_3, \\ z_3=y_3, \end{cases}$ 则二次型的标准形是 $f=z_1^2-z_2^2$. 而所用坐标变换为

www.TopSage.com

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}.$$

题型三　判别或证明二次型的正定性

【解题思路】 判别正定二次型(正定矩阵)的常用思路有:(1) 用定义;(2) 正惯性指数 $p=n$;(3) 顺序主子式全大于0;(4) 特征值全大于0.

正定的必要条件(6.5)可帮助排除非正定的二次型.

【例6.14】 判断3元二次型 $f=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 的正定性.

【解法一】 用配方法化 f 为标准形 $f=(x_1+2x_2)^2+(x_2-2x_3)^2-3x_3^2$.

由于正惯性指数 $p=2<3$,所以 f 不是正定二次型.

【解法二】 由于二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&5&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}$,其顺序主子式

$$\Delta_1=1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1,\quad \Delta_3=|\boldsymbol{A}|=-3<0$$

不是全大于0,所以 f 不是正定二次型.

【解法三】 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-2&\lambda-5&2\\0&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-5&2\\\lambda-1&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda-3).$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有 $\lambda=3-2\sqrt{3}<0$,所以 f 不是正定二次型.

评注 顺序主子式法在计算题中经常起到简化计算及特征值法等价说.

【例6.15】 假设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_2-2x_3)^2+(2x_2+3x_3)^2+(x_1+3x_2+ax_3)^2$ 正定,则 a 的取值为_____.

【分析】 $\forall(x_1,x_2,x_3)$ 恒有平方和 $f(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$,其中等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases}x_1+ax_2-2x_3=0,\\2x_2+3x_3=0,\\x_1+3x_2+ax_3=0,\end{cases}\qquad(*)$$

按正定定义,f 正定 $\Leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,恒有 $f(x_1,x_2,x_3)>0$.

因此,本题中二次型 f 正定 $\Leftrightarrow$ 方程组(*)只有零解

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&a&-2\\0&2&3\\1&3&a\end{vmatrix}=5a-5\neq 0,$$

所以 a 的取值为 $a\neq 1$.

【例6.16】 判断 n 元二次型 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ 的正定性.

【解法一】(顺序主子式) 二次型矩阵

www.TopSage.com

$$A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{bmatrix},$$

其顺序主子式

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2^k}\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\ 1&2&1&\cdots&1\\ 1&1&2&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}=\frac{k+1}{2^k}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\ 1&2&1&\cdots&1\\ 1&1&2&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{k+1}{2^k}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\ &1&&&\\ &&1&&\\ &&&\ddots&\\ &&&&1\end{vmatrix}=\frac{k+1}{2^k},$$

由于顺序主子式全大于0,所以二次型正定.

【解法二】(特征值法)　由于

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&\cdots&1\\ 1&2&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&1&\cdots&2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(E+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}(1,1,\cdots,1)\right),$$

记 $B=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}(1,1,\cdots,1)$,由于秩 $r(B)=1$,知 $B^2=nB$. 那么,B 的特征值是 n 与 $0(n-1$ 重$)$. 于是 A 的特征值是 $\frac{1}{2}(n+1),\frac{1}{2}(n-1$ 重$)$. A 的特征值全大于0,故 A 正定,即二次型是正定二次型.

【例6.17】　设 A,B 均是 n 阶正定矩阵,判断 $A+B$ 的正定性:

【解】(用定义)　因为 A,B 均是正定矩阵,故 A,B 都是对称矩阵,那么 $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}=A+B$. 即 $A+B$ 是对称矩阵. 又因 $\forall x\neq 0$,有 $x^{\mathrm{T}}(A+B)x=x^{\mathrm{T}}Ax+x^{\mathrm{T}}Bx$.

由于 A,B 均正定,有 $x^{\mathrm{T}}Ax>0,x^{\mathrm{T}}Bx>0$. 于是 $x^{\mathrm{T}}(A+B)x>0$,所以 $A+B$ 是正定矩阵.

【例6.18】　已知二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型,$x=Cy$ 是坐标变换,证明二次型 $y^{\mathrm{T}}By$ 是正定二次型,其中 $B=C^{\mathrm{T}}AC$.

【证明】　$\forall y_0\neq 0$,设 $x_0=Cy_0$,由矩阵 C 可逆知 $x_0\neq 0$,那么由 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型而知

$$y_0^{\mathrm{T}}By_0=y_0^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy_0=x_0^{\mathrm{T}}Ax_0>0.$$

按定义,$y^{\mathrm{T}}By$ 是正定二次型.

www.TopSage.com

评注 本题的结论告诉我们经过坐标变换二次型的正定性是不变的.

【例 6.19】 证明二次型 x^TAx 正定的充分必要条件是 A 的特征值全大于 0.

【证明】 对二次型 x^TAx,存在正交变换 $x = Qy$ 化其为标准形 $\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值. 由【例 6.18】知,x^TAx 正定 $\Leftrightarrow \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$ 正定 $\Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于 0.

评注 若 $\lambda_i \leqslant 0$,那么取 $y_0 = (1,0,\cdots,0)^T$,有 $x_0 = Qy_0 \neq 0$,而 $x_0^TAx_0 = y_0^TQ^TAQy_0 = \lambda_i \leqslant 0$,与 x^TAx 正定相矛盾.

【例 6.20】 已知 A 是 n 阶可逆矩阵,证明 A^TA 是对称、正定矩阵.

【证法一】(与 E 合同) 因为 $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$,所以 A^TA 是对称矩阵.

由于 $A^TA = A^TEA$,且 A 是可逆矩阵,所以 A^TA 与 E 是合同矩阵,从而 A^TA 是正定矩阵(【定理 6.3】).

【证法二】(定义法) $\forall x \neq 0$,由 A 可逆,必有 $Ax \neq 0$,则 $x^T(A^TA)x = (Ax)^T(Ax) = (Ax,Ax) > 0$. 按【定义 6.2】知,$x^T(A^TA)x$ 是正定二次型,故 A^TA 是正定矩阵.

【例 6.21】 已知 $A,A-E$ 都是 n 阶实对称正定矩阵,证明 $E-A^{-1}$ 是正定矩阵.

【证明】(特征值法) 由 $(E-A^{-1})^T = E^T - (A^{-1})^T = E - (A^T)^{-1} = E - A^{-1}$ 知,$E-A^{-1}$ 是对称矩阵. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值,则 $A-E$ 与 $E-A^{-1}$ 的特征值分别是 $\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_n-1$ 与 $1-\frac{1}{\lambda_1},1-\frac{1}{\lambda_2},\cdots,1-\frac{1}{\lambda_n}$. 由于 $A-E$ 正定,其特征值 λ_i-1 全大于 0,那么 $\frac{1}{\lambda_i} < 1$,从而 $E-A^{-1}$ 的特征值全大于 0,即 $E-A^{-1}$ 是正定矩阵.

【例 6.22】 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,$B = \lambda E + A^TA$,证明当 $\lambda > 0$ 时,B 是正定矩阵.

【证明】(定义法) 因为 $B^T = (\lambda E + A^TA)^T = \lambda E + A^TA = B$,故 B 是 n 阶实对称矩阵,$\forall n$ 维实向量 $x \neq 0$,有 $x^TBx = \lambda x^Tx + x^TA^TAx = \lambda x^Tx + (Ax)^T(Ax) = \lambda \|x\|^2 + \|Ax\|^2$.

由于 $x \neq 0,\lambda > 0$,恒有 $\lambda \|x\|^2 > 0$,而 $\|Ax\|^2 \geqslant 0$,因此 $x^TBx > 0$ $(\forall x \neq 0)$,即 B 正定.

【例 6.23】 设 $D = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$ 为正定矩阵,其中 A,B 分别为 m 阶,n 阶对称矩阵,C 为 $m \times n$ 矩阵.

(Ⅰ) 计算 P^TDP,其中 $P = \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$;

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)的结果判断矩阵 $B - C^TA^{-1}C$ 是否为正定矩阵,并证明你的结论.

【解】 (Ⅰ) 因为 $P^T = \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -C^T(A^{-1})^T & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -C^TA^{-1} & E_n \end{bmatrix}$,则

$$P^TDP = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -C^TA^{-1} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B - C^TA^{-1}C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^TA^{-1}C \end{bmatrix}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知矩阵 D 与矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$ 合同,又因 D 是正定矩阵,所以矩阵 M 为正定矩阵,从而可知 M 是对称矩阵,那么 $B - C^TA^{-1}C$ 是对称矩阵.

对 m 维向量 $X = (0,0,\cdots,0)^T$ 和任意 n 维非 0 向量 $Y = (y_1,y_2,\cdots,y_n)^T \neq 0$,有

$$(X^T,Y^T)M\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = (X^T,Y^T)\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^TA^{-1}C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} > 0,$$

www.TopSage.com

即 $$(\mathbf{0},\mathbf{Y}^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Y}\end{bmatrix}=\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\mathbf{Y}>0.$$

按定义，$\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\mathbf{Y}$ 为正定二次型，所以矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为正定矩阵.

【例 6.24】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 n 维非零列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j)$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

【证明】 如 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，两边左乘 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1>0$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0(j\neq 1)$，得 $k_1=0$. 类似可证 $k_2=k_3=\cdots=k_m=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

【例 6.25】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

【证明】 $\forall\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定，故总有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Bx})+(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})>0.$$

因此，$\forall\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，恒有 $\boldsymbol{Ax}\neq\mathbf{0}$. 即齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

题型四 合同矩阵

【例 6.26】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似.　　(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.　　(D) 既不合同也不相似.

【分析】 若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，称 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，称 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的正、负惯性指数，即 $p_A=p_B,q_A=q_B$. 而正、负惯性指数可由特征值的正、负来决定. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-3)^2,\quad|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda(\lambda-1)^2,$$

知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似(特征值不同)，但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同(均有 $p=2,q=0$).

【例 6.27】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_3 & & \\ & a_1 & \\ & & a_2\end{bmatrix}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

【证明】 构造二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2$ 和 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}=a_3y_1^2+a_1y_2^2+a_2y_3^2$，经坐标变换

$$\begin{cases}x_1=y_2,\\ x_2=y_3,\\ x_3=y_1,\end{cases}\quad\text{即}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix},\text{记 }\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy},\text{则有}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & a_3\\ a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_3 & & \\ & a_1 & \\ & & a_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

www.TopSage.com

所以矩阵 A 和 B 合同.

评注　也可通过计算 $|\lambda E-A|$ 的全部特征值是否为0,用正负惯性指数来证明 $A\simeq B$.

【例 6.28】　设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ 有一个特征值是3,求 y,并求可逆矩阵 P,使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$ 为对角矩阵.

【解】　因为3是 A 的特征值,故 $|3E-A|=8(3-y-1)=0$,解出 $y=2$. 那么

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}.$$

由于 $A^{\mathrm{T}}=A$,要 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^2P=\Lambda$,而 $A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{bmatrix}$ 是对称矩阵,即要 $A^2\simeq\Lambda$,故可构造二次型 $x^{\mathrm{T}}A^2x$,再化其为标准形. 由配方法,有

$$x^{\mathrm{T}}A^2x=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4=y_1^2+y_2^2+5y_3^2+\frac{9}{5}y_4^2,$$

其中 $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4$, $y_4=x_4$,即

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&-\frac{4}{5}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=Py,\quad P=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&-\frac{4}{5}\\&&&1\end{bmatrix}.$$

于是　　$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^2P=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&5&\\&&&\frac{9}{5}\end{bmatrix}$.

评注　本题是用二次型的理论与方法来处理矩阵问题. 因为本题求 $P^{\mathrm{T}}A^2P=\Lambda$,即求 A^2 与 Λ 合同,而合同是二次型经坐标变换所引出的概念,故可用配方法,当然也可用正交变换法(但稍繁些).

题　型　训　练

一、选择题

1. 下列矩阵中,正定矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&7&5\\-3&5&0\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&4&5\\-3&5&7\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&6&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}5&2&0\\2&6&-3\\0&-3&-1\end{bmatrix}$.

www.TopSage.com

2. 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似. (B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似. (D) 不合同也不相似.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充要条件是

(A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. (B) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的秩.

(C) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式. (D) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的正负惯性指数.

5. 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充要条件是

(A) 负惯性指数为零. (B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零. (D) 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

二、填空题

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 的矩阵是_____.

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$ 的负惯性指数 $q=$_____.

3. 若二次型 $2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 的秩为 2, 则 $t=$_____.

4. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$ 经正交变换化为标准形 $y_1^2+2y_3^2$, 则 $a=$_____.

5. 设三元二次型 $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型, 则 $t\in$_____.

6. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定, 则 k 的取值为_____.

三、计算题与证明题

1. 求正交变换化二次型 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3-4x_1x_3$ 为标准形.

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2-6x_2x_3+6x_1x_3$ 的秩为 2, 求 c 及此二次型的规范形, 并写出相应的坐标变换.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 若对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 恒有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, 证明 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|>2^n$.

7. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ 是正定矩阵, 证明 $\Delta=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0$.

www.TopSage.com

第三篇　概率论与数理统计

第一章　随机事件和概率

内容概要与重难点提示

“随机事件”与“概率”是概率论中两个最基本的概念，“独立性”与“条件概率”是概率论中特有的概念，条件概率在不具有独立性的场合扮演一个重要角色，它也是一种概率．正确地理解并会应用这4个概念是学好概率论的基础．为此我们应该了解样本空间（基本事件空间）的概念，理解随机事件的概念，并要熟练掌握随机事件的关系与运算法则，理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质．古典型概率（有限等可能概率模型）与几何型概率（“无限等可能”概率模型）是在两个特定简单概率模型中直接计算随机事件概率的方法，在古典型概率的计算中还应熟悉排列与组合的知识．

加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式与贝叶斯公式是概率的五个基本公式，应用它们再结合事件运算与概率的基本性质，可以解决不少有关随机事件概率的计算问题．

理解随机事件的独立性与独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法，其中伯努利公式是在虽然满足有限性，但不具备“等可能性”条件时，计算概率的一个重要公式，它适用于描述 n 次独立重复试验的 n 重伯努利概型，是区别于古典概型与几何概型的又一个重要概率模型，第二章中的常见分布之一——二项分布就是描述 n 重伯努利概型的随机变量．

本章重点是概率的计算，其计算方法本章主要讲述两种：一种是概型法，即在特定的古典概型、几何概型与伯努利概型中应用公式直接计算事件的概率；另一种是应用概率的性质与五个基本公式结合事件的等价表示间接计算事件的概率．

本章难点主要是较复杂事件的等价表示与综合性公式（如全概率公式、贝叶斯公式）的正确应用．

考核知识要点讲解

一、随机事件的关系与运算

（一）样本空间与随机事件的概念

▶1. 随机试验、样本空间

称一个试验为**随机试验**（简称试验），如果：(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现．用字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示．

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω．样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**．

▶2. 随机事件

试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**．在每次试验中，当且仅当这一子集中的

www.TopSage.com

一个样本点出现时，称这一**事件发生**.

一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 样本空间 Ω，它是 Ω 自身的子集，它包含所有的样本点，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 也作为样本空间的子集，它不包含任何样本点，在每次试验中它都不发生，称为**不可能事件**.

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按集合论中集合之间的关系和集合的运算来处理.

（二）事件间的关系与运算（见表 1.1）

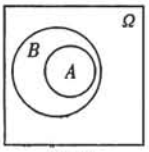
表 1.1　事件间的关系与运算

事件间关系与运算的语言描述	集合论中的表示法	概率论中的含义
事件 A 包含事件 B（或事件 B 含于事件 A 或 B 导致 A）	$A \supset B$（或 $B \subset A$）	事件 B 发生，则事件 A 一定发生
事件 A 和 B 相等（或等价）	$A = B$	事件 A 发生，则 B 一定发生，反之亦然
事件 A 与 B 之和（或并）	$A \cup B$ 或 $A + B$	两个事件 A，B 中，至少有一个事件发生
有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 的和（或并）	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\sum_{i=1}^{n} A_i$	n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生
可列个事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 的和（或并）	$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$	可列个事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个事件发生
事件 A 与 B 的积（或交）	$A \cap B$（简记为 AB）	事件 $A \cap B$ 发生，当且仅当 A 与 B 同时发生
有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 的积（或交）	$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$（简记为 $A_1A_2\cdots A_n$）	n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生
可列个事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 的积（或交）	$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$	可列个事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生
事件 A 与 B 的差	$A - B$	事件 $A - B$ 发生，当且仅当事件 A 发生，B 不发生
事件 A 的逆事件（或对立事件）	$\overline{A} \triangleq \Omega - A$	事件 $\overline{A}$ 发生，当且仅当事件 A 不发生
事件 A 和 B 互不相容（或 A 与 B 互斥）	$A \cap B = \varnothing$	事件 A 与 B 不可能同时发生
事件 $A_1, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组	$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ $A_iA_j = \varnothing, 1 \leqslant i < j \leqslant n$	n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$ 中仅发生且必发生其中之一
事件 $A_1, A_2, \cdots$ 是一个完备事件组	$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \Omega$ $A_iA_j = \varnothing, 1 \leqslant i < j < +\infty$	可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中仅发生且必发生其中之一

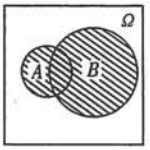
www.TopSage.com

（三）文氏图

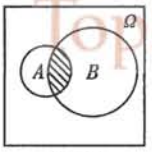
事件的关系和运算可以用所谓文氏图形象地表示出来，下面的图形表示各事件的关系及运算．



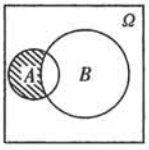
$B \supset A$



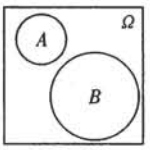
$A \cup B$



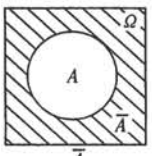
$A \cap B$



$A-B$



$A \cap B = \varnothing$



$\overline{A}$

（四）事件的运算性质

在进行事件运算时，经常要用到以下定律．设 $A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$ 为事件，则有

（1）**吸收律**　若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B, AB = A$；

（2）**交换律**　$A \cup B = B \cup A$，　$AB = BA$；

（3）**结合律**　$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；　$ABC = (AB)C = A(BC)$；

（4）**分配律**　$A(B \cup C) = AB \cup AC$；　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$；

$$(A \cup C)(B \cup C) = AB \cup C;\quad A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap A_i);$$

（5）**对偶律**　$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$；　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；　$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$，　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$．

【例 1.1】　设 A,B 是任意两个随机事件，则 $P\{(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B})\} =$ _____．

【分析】　由事件运算的分配律知

$$(A \cup B)(\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup B = \varnothing \cup B = B,$$

同理　$(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{B}$，

所以　$(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B}) = B\overline{B} = \varnothing$，

于是　$P\{(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B})\} = P\{\varnothing\} = 0$．

二、随机事件的概率

（一）概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω．对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

（1）**非负性**　对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

（2）**规范性**　对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega) = 1$；

（3）**可列可加性**　设事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容，即对于 $i \neq j, A_iA_j = \varnothing, i,j = 1,2,\cdots$，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots, \text{即 } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

www.TopSage.com

（二）概率的基本性质

【性质1】 $P(\varnothing)=0$.

【性质2】 **有限可加性** 设事件 $A_1,A_2\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

【性质3】 **减法公式** 如果 A,B 是任意事件，则 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

如果 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，$P(A)\geqslant P(B)$.

【性质4】 对于任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

【性质5】 **逆事件的概率** 对于任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

【性质6】 **加法公式** 对于任意三个事件 A,B,C，有

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

(2) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

【注】 在计算一些事件和的概率，即计算若干个事件中至少有一个事件发生的概率时，用概率的加法公式，但有时用对立事件的性质比较方便．特别是当这些事件相互独立的时候．

【例1.2】 设事件 A,B 和 $A\cup B$ 的概率分别为0.2，0.3和0.4，则 $P(A\overline{B})=$ _____.

【分析】 由条件知 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.4$．由加法公式，有

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.1.$$

由减法公式，有 $P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.2-0.1=0.1$.

（三）古典型概率与几何型概率

▶1. 古典型概率

称随机试验（随机现象）的概率模型为**古典概型**（也称**等可能概型**），如果其基本事件空间（样本空间）满足：(1) 只有有限个基本事件（样本点）；(2) 每个基本事件（样本点）发生的可能性都一样．

如果古典概型的基本事件总数为 n，事件 A 包含 k 个基本事件，即有利于 A 的基本事件为 k 个，则事件 A 的概率定义为

$$P(A)\triangleq\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

由上式计算的概率称为事件 A 的**古典型概率**.

▶2. 几何型概率

称随机试验（随机现象）的概率模型为**几何模型**，如果：(1) 样本空间（基本事件空间）Ω 是一个可度量的几何区域；(2) 每个样本点（基本事件）发生的可能性都一样，即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 A 的可能性大小与 A 的几何度量成正比，而与 A 的位置及形状无关．

在几何概型随机试验中，如果 S_A 是样本空间 Ω 一个可度量的子区域，则事件 A = “样本点落入区域 S_A” 的概率定义为

$$P(A)\triangleq\frac{S_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

由上式计算的概率称为事件 A 的**几何型概率**.

【注】 ① 古典概型与几何概型都有某种等可能性，或者说“均匀性”．两个概型的区别在于：几何概型的样本空间是无限（不可列）的，而古典概型的样本空间是有限的．

② 古典概型问题的主要计算工具是排列和组合，而几何概型问题的主要计算工具是用几何方法计算长度、面积等，也会用到微积分计算．

③ 古典概型的难点在于当选定样本空间后，正确计算事件 A 所包含样本点的个数；而几何概型难在模型化（如候车问题、会面问题等）：如何化为数学问题．

www.TopSage.com

【例 1.3】 一条公交车线路，中途设有 9 个车站，最后到达终点站．已知在起点站上有 20 位乘客上车，则在第 1 站恰有 4 位乘客下车的概率 $\alpha =$ _____．（假设每位乘客在各车站下车是等可能的）

【分析】 设事件 A 表示第 1 站有 4 位乘客下车，则样本空间所含样本点总数为 10^{20}，而事件 A 是 20 人中有 4 人在第 1 站下了车，其余 16 人没有在第 1 站下车，他们将在第 1 站以后的 9 个站（含终点站）下车，因此有利于事件 A 的样本点数为 $C_{20}^{4}9^{16}$．根据古典概型公式有

$$\alpha = P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_{20}^{4}9^{16}}{10^{20}} = 0.0898.$$

【例 1.4】 两人相约于晚 7 点到 8 点间在某处会面，到达者等足 20 分钟便立即离去．设两人的到达时刻在 7 点到 8 点间都是随机且等可能的，则两人能会面的概率 $p =$ _____．

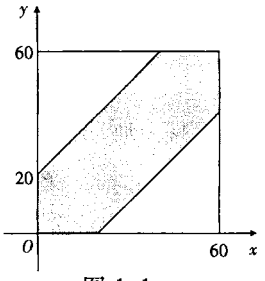


图 1.1

【分析】 以 x,y 分别表示两人到达时刻在 7 点后的分钟数，记事件 A 表示“两人能会面”，如图 1.1 所示，则

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < 60, 0 < y < 60\},$$

$$A = \{(x,y) \mid |x - y| \leqslant 20, (x,y) \in \Omega\},$$

故
$$p = P(A) = 1 - 40^2/60^2 = 5/9.$$

评注 每一次会面是两人到达的一对时间，是二维实数．如何学会将一个实际问题转化为一个数学问题需要不断积累经验．此外，在概率计算中还要学会逆事件概率计算的转化．如图 1.1 所示，在计算能会面的概率时，要计算梭形阴影部分的面积．虽然该面积容易求得，但是两个正三角形的面积更好求，因此将能会面的概率计算转化为逆事件“不能会面”的概率计算，更为简单．

（四）条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，则称在已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率为**条件概率**，记为 $P(B \mid A)$，并定义

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0).$$

【注】 ① 条件概率 $P(\cdot \mid A)$ 也是一种概率，概率的一切性质和重要结论对条件概率都适用，例如：当 $P(A) > 0$ 时，有

1° $0 \leqslant P(B \mid A) \leqslant 1$；

2° $P(\Omega \mid A) = 1$，$P(A \mid A) = 1$；

3° $P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A)$；（注意：$P(B \mid A) + P(B \mid \overline{A})$ 不一定等于 1．）

4° 当事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 两两互不相容时，$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \mid A)$．

② 计算条件概率 $P(B \mid A)$ 的两种方法：**方法 1°** 按条件概率的含义，直接求出 $P(B \mid A)$，注意到，在求 $P(B \mid A)$ 时已知事件 A 已发生，样本空间 Ω 中所有不属于 A 的样本点都被排除，原有的样本空间 Ω 缩减成为 $\Omega' = A$．在缩减了的样本空间 $\Omega' = A$ 中计算事件 B 的概率就得到 $P(B \mid A)$．**方法 2°** 在 Ω 中计算 $P(AB)$ 及 $P(A)$，再按条件概率的定义式求得 $P(B \mid A)$．

（五）计算概率的几个公式

在一定的条件下，我们可以直接计算古典型概率和几何型概率，也可以利用概率的性质和以下几个公式计算概率．

▶1. 乘法公式

$$P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B \mid A), & \text{当 } P(A) > 0, \\ P(B)P(A \mid B), & \text{当 } P(B) > 0; \end{cases}$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1\cdots A_{n-1}). \ (P(A_1\cdots A_{n-1}) > 0)$$

【注】 当 A_i 先于 A_{i+1} 发生时用乘法公式.

▶2. 全概率公式

如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,即它们两两互不相容,其和为 Ω;并且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2,\cdots,n$,则对任一事件 B,有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

特别地,上式中取 $n = 2$,并将 A_1 记为 A,此时 A_2 就是 $\overline{A}$,那么全概率公式成为

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}).$$

【注】 ① 全概率公式常用于计算一个复杂事件的概率,使用全概率公式有两个前提条件:第一,事件 B 的概率计算需要补充信息,它常伴随另一组事件 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的发生而发生;第二,这组伴随的事件 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 构成完备事件组.

② 全概率公式与贝叶斯公式分为两个阶段:全概率公式是求第二阶段某一结果的概率;而贝叶斯公式则是已知第二阶段的某一结果的概率,求第一阶段的某一结果的概率.

③ 抓阄模型可以简化全概率公式,贝叶斯公式的本质是条件概率.

▶3. 贝叶斯公式

如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,且 $P(A_i) > 0, i = 1,\cdots,n, P(B) > 0$,则对正整数 m,有

$$P(A_m \mid B) = \frac{P(A_m)P(B \mid A_m)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} = \frac{P(A_m)P(B \mid A_m)}{P(B)} \quad (1 \leqslant m \leqslant n).$$

特别地,上式中取 $n = 2$,并将 A_1 记为 A,此时 A_2 就是 $\overline{A}$,那么贝叶斯公式成为条件概率公式,即

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \overset{\text{乘法公式}}{\underset{\text{全概率公式}}{=\!=}} \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})}.$$

【注】 ① 全概率公式与贝叶斯公式使用的关键是要找到导致事件 B 发生的完备事件组.

② 要注意 $P(AB)$ 与 $P(B \mid A)$ 的区别:$P(AB)$ 是在样本空间为 Ω 时,A 与 B 同时发生的可能性,而 $P(B \mid A)$ 则是表示在 A 已经发生的条件下,B 发生的可能性,此时样本空间已由 Ω 缩减为 A,只要题目中有前提条件:"在 A 发生的条件下"或"已知 A 发生"等等,均要考虑条件概率.

【例 1.5】 已知 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(B \mid A) = 0.8$,求 $P(A \cup B)$ 和 $P(B \mid \overline{A})$.

【解】 由题设及乘法公式有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = 0.5 \times 0.8 = 0.4,$$

从而依题设及加法公式有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7.$$

由条件概率的定义有

$$P(B \mid \overline{A}) = P(B\overline{A}) / P(\overline{A}) = [P(B) - P(BA)] / [1 - P(A)]$$
$$= (0.6 - 0.4) / (1 - 0.5) = 0.4.$$

评注 ① 本题解法较多,中间过程可以去计算 $P(BA), P(B\overline{A})$ 等,读者可以体会一个简单、最基础简洁的概率公式.

www.TopSage.com

② 概率的加法、减法与乘法等基本公式要熟练地应用，还应注意与事件的关系和运算法则相结合，判别是在事件具备某种关系（如互不相容、相互对立、完备组、相互独立以及包含等）时，有关概率公式的使用．以乘法公式为例（其他公式请读者自己总结）：对两个事件 A,B 有

$$P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B\mid A), & (P(A)>0)\\ P(B)P(A\mid B), & (P(B)>0)\\ P(A)P(B), & (A,B\text{ 相互独立})\\ 0, & (A,B\text{ 互不相容})\\ P(B), & (A\supset B)\\ P(A)+P(B)-P(A\cup B), & (\text{广义加法公式})\end{cases}$$

【例 1.6】 甲、乙、丙三人通过抽签决定两张同一场次的参观票的归属，甲先、乙次、丙最后．

（Ⅰ）乙抽到参观票的概率 $\alpha=$ _____；

（Ⅱ）如果已知乙已经抽到了参观票，则甲也抽到参观票的概率 $\beta=$ _____．

【分析】 三个签上两个写“有”，一个写“无”．记事件 A,B 分别表示甲、乙抽到“有”签，A 与 $\bar{A}$ 构成完备组，则

$$(\text{Ⅰ})\alpha=P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{2}{3}.$$

$$(\text{Ⅱ})\beta=P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

评注 贝叶斯公式中的分母是全概率公式中已经求出的 $P(B)$，它是 m 项之和，而分子是其中某一个加项，其条件概率 $P(A_m\mid B)$ 则是 $P(B)$ 的第 m 个加项在总和中所占比例．

三、事件的独立性与独立重复试验

（一）事件的独立性

▶1. 独立性的定义

（1）称事件 A 与 B **相互独立**，如果它们满足等式：$P(AB)=P(A)P(B)$．

容易知道，若 $P(A)>0,P(B)>0$，则 A,B 相互独立与 A,B 互不相容不能同时成立．

（2）称三个事件 A,B,C **相互独立**，如果它们满足下面四个等式：

① $P(AB)=P(A)P(B)$；　② $P(AC)=P(A)P(C)$；

③ $P(BC)=P(B)P(C)$；　④ $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$．

如果 A,B,C 仅满足以上前三个等式，则称它们为**两两独立**．

（3）称 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ **相互独立**，如果它们中任意 k 个（$2\leqslant k\leqslant n$）事件的积事件的概率都等于各事件概率的乘积．

（4）称 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 是一个**相互独立的随机事件序列**，如果它们中任意有限个事件都相互独立．

▶2. 独立性的性质

（1）若 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立，则它们中的任何一部分事件也相互独立；

（2）若两任意事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立：A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$；

（3）若两任意事件 A 和 B 独立且 $A\subset B$，则 $P(A)=0$ 或 $P(B)=1$；

（4）若两任意事件 A 和 B 相互独立而且不相容，则 $P(A)$ 和 $P(B)$ 至少有一个等于 0．

▶3. 独立性的判定

(1) 直观性判定(实际推断):若试验独立,则其结果必相互独立.例如:甲、乙各自试验结果相互独立;袋中有返回取球其结果相互独立,等.

(2) 充要条件.

1°A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})=P(A)\quad(0<P(B)<1)$

$\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})=P(B)\quad(0<P(A)<1)$

$\Leftrightarrow P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1\quad(0<P(A)<1)$;

2°n 个事件 $A_1,A_2\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立的充要条件是,它们中的任意多个事件换成它们各自的对立事件后,所得到的 n 个事件仍相互独立;

3°$n(n\geqslant 2)$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立的充要条件是,其中任一事件与其余各事件之一切可能的交独立.

(3) 必要条件.

1°n 个事件相互独立必两两独立,反之不一定;

2° 若 n 个事件相互独立,则不含相同事件的事件组经某种运算(并、交、求逆)后所得的事件是相互独立的.例如,A、B、C、D 相互独立,则 AB 与 $C\cup D$ 相互独立,A 与 $BC-D$ 相互独立,等等.

(4) 一定独立与一定不独立的判定.

1° 概率为 0 或 1 的事件与任何事件都独立;

2° 概率都不为 0 或 1 的两不相容事件一定不独立.

【注】 不要混淆"不相容"和"独立"这两个概念:(1) 事件不相容的概念与概率的概念无关,而事件的独立性的概念是在概率意义上的独立性;(2) 两个不相容事件一般都不独立,只有其中一个事件的概率为 0 或 1 的特殊情形例外.

【例 1.7】 设随机事件 A,B,C 两两独立,且 $P(A),P(B),P(C)\in(0,1)$,则必有

(A) C 与 $A-B$ 独立. (B) C 与 $A-B$ 不独立.

(C) $A\cup C$ 与 $B\cup\overline{C}$ 独立. (D) $A\cup C$ 与 $B\cup\overline{C}$ 不独立.

【分析】 对于(A),(B):

$$P(C(A-B))=P(A\overline{B}C)=P(AC)-P(ABC)=P(A)P(C)-P(ABC),$$

$$P(C)P(A-B)=P(C)[P(A)-P(AB)]=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C).$$

尽管 A,B,C 两两独立,但未知 A,B,C 是否相互独立,从而不能判定 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 是否成立,故(A),(B) 均不可选.

如果 $A\cup C$ 与 $B\cup\overline{C}$ 独立,则 $\overline{A\cup C}=\overline{AC}$ 与 $\overline{B\cup\overline{C}}=\overline{B}C$ 独立,即 $P((\overline{AC})(\overline{BC}))=P(\overline{AC})P(\overline{BC})$,由于 $P((\overline{AC})(\overline{BC}))=0$,$P(\overline{AC})P(\overline{BC})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})P(C)$,进而得

$$P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})P(C)=0,$$

与题设 $P(A),P(B),P(C)\in(0,1)$ 矛盾,因此排除(C),选(D).

【例 1.8】 设随机事件 A,B,C 的概率均为 p,且 A 与 B,C 分别独立,B 与 C 不相容.若 A,B,C 中至少一个发生的概率为 $\frac{7}{9}$,则 A,B,C 中至少发生两个的概率为_____.

【分析】 由 B 与 C 不相容及概率的性质知 $P(BC)=P(ABC)=0$,再由 A 与 B,C 分别独立,得

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3p-2p^2=\frac{7}{9},$$

解得 $p=\frac{1}{3}$,所以

www.TopSage.com

$$P\{A,B,C\text{中至少发生两个}\} = P(AB \cup BC \cup AC) = P(AB) + P(AC)$$
$$= P(A)P(B) + P(A)P(C) = 2p^2 = \frac{2}{9}.$$

【例 1.9】 设 A,B 是两个随机事件，且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B \mid \overline{A}) = P(B \mid A)$，则必有

(A) $P(A \mid B) = P(\overline{A} \mid B)$.　　(B) $P(A \mid B) \neq P(\overline{A} \mid B)$.

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$.　　(D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

【分析】 由题设条件可知，无论事件 A 发生与否，事件 B 发生的概率都相同，即事件 A 的发生与否不影响事件 B 发生的概率，因此可以确认 A 与 B 是相互独立的．应该选(C).

事实上，$P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$，　$P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)}$．依题设，有

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B).$$

(二) 独立重复试验与伯努利公式

▶1. 独立重复试验

(1) 独立重复试验　如果在两个或多个试验中与各试验相联系的事件之间相互独立，且同一事件在各个试验中出现的概率相同，则称这些试验是**独立重复试验**．

【注】 “独立”表示“与各试验相联系的事件之间相互独立”，而“重复”表示“每个事件在各次试验中出现的概率不变”．

(2) 伯努利试验　只有两种对立结果的试验称为**伯努利试验**．如果将一个伯努利试验独立地重复做 n 次，每次试验中只有 A 发生与 $\overline{A}$ 发生两种对立结果，并且每次试验中事件 A 发生的概率都相等，即 $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$．这样的试验模型称为 **n 重伯努利概型**．

▶2. 伯努利公式(二项概率公式)

在 n 重伯努利概型中，事件 A 发生 k 次的概率 $P(A_k)$ 为

$$P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n), \quad \text{其中 } 0 < p < 1, q = 1 - p.$$

如果用 X 表示 n 重伯努利概型中事件 A 发生的次数，则 X 服从二项分布 $B(n,p)$．

【注】 伯努利概型的特征是：只论次数，不管顺序．

【例 1.10】 对同一目标接连进行3次独立重复射击，假设至少命中目标一次的概率为7/8，则单次射击命中目标的概率 $p =$ _____．

【分析一】 引进事件 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次命中目标}\}$ $(i = 1,2,3)$，由题设知，事件 A_1, A_2, A_3 相互独立，且其概率均为 p，由 3 次独立重复射击至少命中目标一次的概率

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - (1-p)^3 = \frac{7}{8},$$

解得　$p = \dfrac{1}{2}$.

【分析二】 这是一个 3 重伯努利概型，3 次均未命中目标的概率 $P(B) = q^3$，即

$$q^3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}, \quad p = 1 - q = \frac{1}{2}.$$

评注　凡是涉及至少发生一次的问题时，通常通过对立事件的概率来解决较为方便．类似本例题型在以后章节常常出现多次．

题型一　随机事件间的关系与运算

【例 1.11】 设事件 A 与 B 满足条件 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$，则

(A) $A \cup B = \varnothing$.　(B) $A \cup B = \Omega$.　(C) $A \cup B = A$.　(D) $A \cup B = B$.

【分析】 由“对称性”知(C)、(D)都不成立(否则，一个成立另一个必成立)，而(A)成立 $\Leftrightarrow A = B = \varnothing \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B} = \Omega \Rightarrow \overline{A}\,\overline{B} = \Omega$，由 $A = B = \varnothing \Rightarrow AB = \varnothing$，这与已知 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$ 相矛盾，所以正确选项是(B).

事实上，由对偶法则及题设有 $AB = \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B}$，因 $A \cup B \supset B$，于是有

$$A \cup B = A \cup B \cup AB = (A \cup B) \cup (\overline{A \cup B}) = \Omega.$$

【例 1.12】 设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $A = B$，则 $P(A) =$ _____.

【分析】 由于 $A = B$，于是有 $AB = A = B$，又由于 A 与 B 互不相容，因此 $AB = \varnothing$，即 $A = B = \varnothing$. 所以 $P(A) = 0$.

评注 从此例我们得出的结论是：两个互不相容的事件如果相等，则它们一定都是不可能事件.

【例 1.13】 设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A) > 0, P(B) > 0$，则下列结论中一定成立的有

(A) A, B 为对立事件.　(B) $\overline{A}, \overline{B}$ 互不相容.

(C) A, B 不独立.　(D) A, B 相互独立.

【分析】 A, B 互不相容，只说明 $AB = \varnothing$，但并不一定满足 $A \cup B = \Omega$，即互不相容的两个事件不一定是对立事件，又因 $A \cup B = \Omega$ 不一定成立，故 $\overline{A \cup B}$ 即 $\overline{A}\,\overline{B} = \varnothing$ 亦不一定成立，因此选项(A)与(B)均不能选. 同时因 $P(AB) = P(\varnothing) = 0$，但是 $P(A)P(B) > 0$，即 $P(AB) \neq P(A)P(B)$，故 A 与 B 一定不独立，应选(C).

题型二　利用古典概型、几何概型计算概率

【例 1.14】 一个正方体的木块，六面均涂有红色，将其锯为 125 个大小相同的正方体小木块，从中任取一个小木块，则(Ⅰ)所取的小木块至少有两面涂有红色的概率 $\alpha =$ _____；(Ⅱ)小木块上最多有两面涂有红色的概率 $\beta =$ _____.

【分析】 设事件 $A_i =$ “小木块上有 i 面涂有红色”，$i = 0,1,2,3$，易见，处于原正方体角上的 8 个小木块上三面涂有红色，处于原正方体 12 个棱上的 3×12 个小木块上(去掉 8 个角上的小木块)两面涂有红色. 因此有利于 A_2, A_3 的样本点数分别为 36，8，而样本空间的样本点总数为 $5^3 = 125$，依古典型概率公式，有

$$(\text{Ⅰ})\ \alpha = P(A_2 \cup A_3) = \frac{\#(A_2 \cup A_3)}{\#\Omega} = \frac{36 + 8}{125} = \frac{44}{125}.$$

(Ⅱ)因 A_0, A_1, A_2, A_3 是一个完备事件组，故

$$\beta = P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_3) = 1 - \frac{\#A_3}{\#\Omega} = 1 - \frac{8}{125} = \frac{117}{125}.$$

评注 古典概型中概率的计算关键是正确计算样本空间 Ω 与所求事件 A 中包含样本点的个数，其中最困难的是 $\#A$ 的计算，既不能漏算，也不能重复计算.

www.TopSage.com

【例 1.15】 若在区间(0,1)上随机地取两个数 u,v,则关于 x 的一元二次方程 $x^2-2vx+u=0$ 有实根的概率是_____.

【分析】 设事件 A 表示"方程 $x^2-2vx+u=0$ 有实根",因 u,v 是从(0,1)中任意取的两个数,因此点 (u,v) 与正方形区域 D 内的点一一对应,其中 $D=\{(u,v)\mid 0<u<1,0<v<1\}$. 事件 $A=\{(u,v)\mid (2v)^2-4u\geqslant 0,(u,v)\in D\}$,有利于事件 A 的样本点区域为图 1.2 中阴影部分 D_1,其中 $D_1=\{(u,v)\mid v^2\geqslant u,0<u,v<1\}$. 依几何型概率公式,有

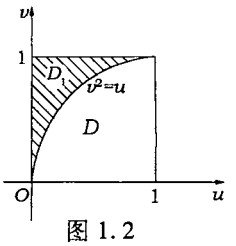


图 1.2

$$P(A)=\frac{\mu(D_1)}{\mu(D)}=\frac{S_{D_1}}{S_D}=\frac{1}{3},\text{其中 } S_{D_1}=\int_0^1 v^2\mathrm{d}v=\frac{1}{3}.$$

评注 几何型概率是借助几何度量计算事件的概率,因此解此类问题首先画出题目涉及的图形,熟悉一些几何图形面积或体积的计算是必要的.

题型三 利用概率性质、条件概率公式计算概率

【例 1.16】 已知事件 A 发生必导致 B 发生,且 $0<P(B)<1$,则 $P(A\mid\overline{B})=$

(A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

【分析一】 由题设知 $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Rightarrow\overline{B}A=\varnothing$,从而推知 $P(A\mid\overline{B})=0$. 故选(A).

【分析二】 $P(A\mid\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(A)}{P(\overline{B})}=0$,故选(A).

【例 1.17】 设 A、B 是两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$,$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$_____.

【分析】 根据乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\quad P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

再应用减法公式

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.$$

或应用加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3},$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{2}{3}.$$

评注 该题关键是求出 $P(B)$,关于计算 $P(A\overline{B})$ 方法不止一种,比如可以用乘法公式求出 $P(A\overline{B})=P(B)P(\overline{A}\mid B)=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}$;在求 $P(A\cup B)$ 时也有多种方法,比如

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(A\overline{B})$$

$$=P(B)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=$$

www.TopSage.com

【例 1.18】 已知 X,Y 为随机变量且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$，设 $A=\{\max(X,Y)\geqslant 0\}$，$B=\{\max(X,Y)<0,\min(X,Y)<0\}$，$C=\{\max(X,Y)\geqslant 0,\min(X,Y)<0\}$，则 $P(A)=$_____，$P(B)=$_____，$P(C)=$_____.

【分析】 首先要分析事件的关系，用简单事件运算去表示复杂事件，而后应用概率性质计算概率.

由于 $A=\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=\{X,Y$ 至少有一个大于等于 $0\}=\{X\geqslant 0\}\cup\{Y\geqslant 0\}$，故

$$P(A)=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7};$$

又 $\{\max(X,Y)<0\}\subset\{\min(X,Y)<0\}$，则

$$B=\{\max(X,Y)<0,\min(X,Y)<0\}=\{\max(X,Y)<0\}=\overline{A}.$$

从而 $$P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}.$$

由全集分解式知：$A=\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=\{\max(X,Y)\geqslant 0,\min(X,Y)<0\}+\{\max(X,Y)\geqslant 0,\min(X,Y)\geqslant 0\}=C+\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}$，故

$$P(C)=P(A)-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}.$$

评注 将一个事件比如 $\{\max(X,Y)\leqslant a\}$ 或 $\{\min(X,Y)\leqslant a\}$ 转化为与它相等的事件，是解决此类问题的关键. 有关的常用结论有：

$\{\max(X,Y)\leqslant a\}=\{X\leqslant a,Y\leqslant a\}=\{X\leqslant a\}\cap\{Y\leqslant a\}$；

$\{\max(X,Y)>a\}=\{X>a\}\cup\{Y>a\}$；

$\{\min(X,Y)\leqslant a\}=\{X\leqslant a\}\cup\{Y\leqslant a\}$；

$\{\min(X,Y)>a\}=\{X>a\}\cap\{Y>a\}$；

$\{\max(X,Y)\leqslant a\}=\{X\leqslant a,Y\leqslant a\}\subset\{X+Y\leqslant 2a\}\subset\{X\leqslant a\}\cup\{Y\leqslant a\}$

$=\{\min(X,Y)\leqslant a\}$；

$\{\min(X,Y)>a\}=\{X>a,Y>a\}\subset\{X>a\}\cup\{Y>a\}=\{\max(X,Y)>a\}$.

【例 1.19】 为了防止意外，在矿内同时设有甲、乙两种报警系统，每种系统单独使用时，其有效的概率系统甲为 0.92，系统乙为 0.93，在甲系统失灵的条件下，乙系统仍有效的概率为 0.85. 则

（Ⅰ）发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率 $\alpha=$_____；

（Ⅱ）在乙失灵的条件下，甲仍有效的概率 $\beta=$_____.

【分析】 首先我们将已知条件赋予概率符号. 设事件 A,B 分别表示系统甲、乙单独使用时有效. 依题意，$P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B\mid\overline{A})=0.85$.

（Ⅰ）$\alpha=P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$

$=0.92+0.08\times 0.85=0.988$.

（Ⅱ）由于 $P(A\overline{B})=P(A\cup B)-P(B)=0.988-0.93=0.058$，于是

$$\beta=P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.058}{0.07}=0.83.$$

【例 1.20】 设 A,B 是任意两个随机事件，又知 $A\supset B$，且 $P(B)>0$，则一定有

(A) $P(B\mid A)\geqslant P(A)$.　　(B) $P(B\mid A)\leqslant P(A)$.

(C) $P(B\mid A)\geqslant P(B)$.　　(D) $P(B\mid A)\leqslant P(B)$.

【分析】 从 $A\supset B$ 知 $AB=B$，又因 $0<P(B)\leqslant P(A)\leqslant 1$，于是有

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\geqslant P(B).$$ 故应选(C).

【例 1.21】 设 A,B 是任意两个随机事件，又知 $B\supset A$，且 $P(A)<P(B)<1$，则一定有

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.　　(B) $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

www.TopSage.com

(C) $P(AB) = P(A)P(B|A)$. (D) $P(A|B) \neq P(A)$.

【分析】 由于 $B \supset A$,则 $A \cup B = B, AB = A$. 当 $P(A) > 0$ 时,选项(A)不成立;当 $P(A) = 0$ 时,条件概率 $P(B|A)$ 不存在,选项(C)不成立;由于任何事件概率的非负性,而题设 $P(A) < P(B)$,故选项(B)不成立. 对于选项(D),依题设条件 $0 \leqslant P(A) < P(B) < 1$,可知条件概率 $P(A|B)$ 存在,并且

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} > P(A).$$ 故应选(D).

题型四 利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率

【例 1.22】 一批产品,每箱装 20 件,已知每箱不含次品的概率为 80%,含一件次品的概率为 20%. 在购买时,随意选一箱,从中随意逐个选出产品进行检查,如果发现次品就退回,如果检查 2 个还未发现次品就买下. 则(Ⅰ)顾客买下该箱产品的概率 $\alpha =$ _____;(Ⅱ)在顾客买下的一箱中,确实没有次品的概率 $\beta =$ _____.

【分析】 (Ⅰ)如果记 $A_i =$ "从箱中第 i 次取出产品为正品" $(i = 1,2)$,则 $\alpha = P(A_1A_2)$,显然 A_1A_2 与该箱产品有几件次品有关,因此我们自然想到将该箱含次品的各种情况一一列出,应用全概率公式计算 α. 记 $B_i =$ "任取一箱,该箱含有 i 件次品" $(i = 0,1)$,则 $B_0 \cup B_1 = \Omega, P(B_0) = 0.8, P(B_1) = 0.2, A_1A_2 = B_0A_1A_2 + B_1A_1A_2 = B_0 + B_1A_1A_2$(因为 $B_0 \subset A_1A_2$). 由全概率公式得

$$\alpha = P(A_1A_2) = P(B_0) + P(B_1A_1A_2) = P(B_0) + P(B_1)P(A_1|B_1)P(A_2|B_1A_1)$$

$$= 0.8 + 0.2 \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{19} = 0.98.$$

(Ⅱ)依题意 $\beta = P\{$该箱不含次品 $|$ 第一次取出产品为正品,第二次取出产品为正品$\}$

$$= P(B_0|A_1A_2) = \frac{P(B_0A_1A_2)}{P(A_1A_2)} = \frac{P(B_0)}{\alpha} = \frac{0.8}{0.98} \approx 0.82.$$

【例 1.23】 假设盒内有10件产品,其正品数为0,1,…,10个是等可能的,今向盒内放入一件正品,然后从盒内随机取出一个产品发现它是正品,则原来盒内有 7 个正品的概率 $\alpha =$ _____.

【分析】 设事件 $A_i =$ "盒内原有 i 件正品", $i = 0,1,\cdots,10$; $B =$ "取出的产品是正品",易见 $A_0, A_1, \cdots, A_{10}$ 构成一个完备事件组,依题意有

$$P(A_i) = \frac{1}{11}, \quad P(B|A_i) = \frac{i+1}{11}, i = 0,1,\cdots,10.$$

所求概率 $P(A_7|B)$ 可直接应用贝叶斯公式:

$$\alpha = P(A_7|B) = \frac{P(A_7)P(B|A_7)}{\sum_{i=0}^{10} P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{\frac{1}{11} \times \frac{8}{11}}{\frac{1}{11}\sum_{i=0}^{10} \frac{i+1}{11}} = \frac{4}{33}.$$

或先应用全概率公式求出 $P(B) = \frac{6}{11}$,再根据条件概率定义计算出 $P(A_7|B)$.

【例 1.24】 每箱产品有 10 件,其中次品数从 0 到 2 是等可能的,开箱检验时,从中任取一件,如果检验为次品,则认为该箱产品不合格而拒收. 由于检验误差,一件正品被误判为次品的概率为 2%,一件次品被误判为正品的概率为10%. 则(Ⅰ)随机检验一箱产品,它能通过验收的概率 $p =$ _____;(Ⅱ)检验 10 箱产品通过率不低于 90% 的概率 $q =$ _____.

【分析】 如果记 $A =$ "一箱产品能通过验收",则 $p = P(A)$. 事件 A 等价于"在10件产品中任取一件检验结果为正品", A 的发生与其前题条件"取出产品是正品还是次品"有关,因此我们用全概率公式计算 $P(A)$.

www.TopSage.com

（Ⅰ）记 B = “任取一件产品为正品”，$\overline{B}$ = “任取一件产品为次品”，则 $A = BA \cup \overline{B}A$，由题设知 $P(A \mid B) = 1 - 0.02 = 0.98$，$P(A \mid \overline{B}) = 0.1$，所以

$$p = P(A) = P(BA) + P(\overline{B}A) = P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})$$
$$= 0.98P(B) + [1 - P(B)] \times 0.1 = 0.1 + 0.88P(B).$$

显然 $P(B)$ 与该箱产品中有几件次品有关，为计算 $P(B)$，我们再次应用全概率公式．若记 C_i = “每箱产品含 i 件次品”$(i = 0,1,2)$，则 C_0, C_1, C_2 是一完备事件组，$P(C_i) = \frac{1}{3}$，故 $B = C_0B \cup C_1B \cup C_2B$，且

$$P(B) = P(C_0)P(B \mid C_0) + P(C_1)P(B \mid C_1) + P(C_2)P(B \mid C_2)$$
$$= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{10} = 0.9.$$

所以　　$p = 0.1 + 0.88 \times 0.9 = 0.892.$

（Ⅱ）如果用 X 表示检验 10 箱被接收的箱数，则通过率为 $\frac{X}{10}$，我们要求的概率 $q = P\left\{\frac{X}{10} > 0.9\right\} = P\{X > 9\}$，其中 X 是 10 次检验事件 A 发生的次数，$X \sim B(10, 0.892)$，故

$$q = P\{X > 9\} = P\{X = 9\} + P\{X = 10\} = 10 \times 0.892^9 \times 0.108 + 0.892^{10} \approx 0.705.$$

评注　① 全概率公式的应用首先要对所涉及的事件做字母符号，其次是要确定导致所求的事件发生的完备事件组 $A_1, \cdots, A_n$；然后根据题设条件，计算出 $P(A_i)$ 与相应的条件概率；最后应用全概率公式算出所要求的事件的概率．

② 全概率公式 $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$ 的等号右端是一个单一的数，也可以是一些事件运算后的一个事件，后者往往是较难把握的，这就要求考生对于所讨论事件的结构有正确的分析．

【例 1.25】　某种仪器由三个部件组装而成，假设各部件质量互不影响且它们的优质品率分别为 0.8，0.7 与 0.9．已知如果三个部件都是优质品，则组装后的仪器一定合格；如果有一个部件不是优质品，则组装后的仪器不合格率为 0.2；如果有两个部件不是优质品，则仪器的不合格率为 0.6；如果三件都不是优质品，则仪器的不合格率为 0.9．

（Ⅰ）求仪器的不合格率；

（Ⅱ）如果已发现一台仪器不合格，问它有几个部件不是优质品的概率最大．

【分析】　依题意，仪器的不合格率与组装该仪器的三个部件的质量有关，即三个部件是否为优质品是导致“仪器不合格”发生的全部因素．因此我们要对导致“仪器不合格”这一事件发生的所有可能因素进行全集分解．再应用全概率公式计算出仪器不合格的概率；如果在发现了仪器不合格，从而返回来追溯分析当初组装仪器上三个部件的优质品数量，则需要应用贝叶斯公式．

【解】　记事件 B = “仪器不合格”，A_i = “仪器上有 i 个部件不是优质品”，$i = 0,1,2,3$．显然 A_0, A_1, A_2, A_3 构成一个完备事件组，且

$$P(B \mid A_0) = 0, \quad P(B \mid A_1) = 0.2, \quad P(B \mid A_2) = 0.6, \quad P(B \mid A_3) = 0.9,$$
$$P(A_0) = 0.8 \times 0.7 \times 0.9 = 0.504,$$
$$P(A_1) = 0.2 \times 0.7 \times 0.9 + 0.8 \times 0.3 \times 0.9 + 0.8 \times 0.7 \times 0.1 = 0.398,$$
$$P(A_3) = 0.2 \times 0.3 \times 0.1 = 0.006,$$
$$P(A_2) = 1 - P(A_0) - P(A_1) - P(A_3) = 0.092.$$

（Ⅰ）应用全概率公式，有

$$P(B) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i)$$
$$= 0.504 \times 0 + 0.398 \times 0.2 + 0.092 \times 0.6 + 0.006 \times 0.9 = 0.1402.$$

www.TopSage.com

（Ⅱ）应用贝叶斯公式，有

$$P(A_0 \mid B) = 0, \qquad P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)} = \frac{796}{1402},$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)} = \frac{552}{1402}, \qquad P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{P(B)} = \frac{54}{1402}.$$

从计算结果可知，一台不合格的仪器中有一个部件不是优质品的概率最大．事实上，根据条件概率的性质：$\sum_{i=0}^{3} P(A_i \mid B) = 1$，在我们计算出 $P(A_1 \mid B) = \frac{796}{1402} > 0.5$ 之后，即可以确定对于 $i = 2,3$，$P(A_i \mid B)$ 都小于0.5，从而不必再计算 $P(A_2 \mid B)$ 与 $P(A_3 \mid B)$ 就可以得到问题（Ⅱ）的答案．

评注　我们再次强调，正确找出与对该结果计算有密切相关的完备事件组是解决问题的关键所在．如果在例中记 C_i = “第 i 个部件不是优质品”，$i = 1,2,3$．虽然 C_1, C_2, C_3 是相互独立的，但并不是两两互不相容，更不能构成一个完备事件组，因而不能直接运用全概率公式的条件．再者，要根据最终所要计算的结果选定公式中的有关概率，如 $P(A_i)$ 与 $P(B \mid A_i)$．在本例题中，这些概率的确定并不是很显然的．

【例1.26】　一条自动生产线连续生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n = 0,1,2,\cdots$．假设产品的优质品率为 $p(0 < p < 1)$．如果各件产品是否为优质品相互独立．

（Ⅰ）计算生产线在两次故障间共生产 k 件（$k = 0,1,2,\cdots$）优质品的概率；

（Ⅱ）若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品，求它共生产 m 件产品的概率．

【分析】　记事件 B_k = “两次故障间共生产 k 件优质品”，B_k 显然与两次故障间生产的产品总数有关．记 A_n = “两次故障间共生产 n 件产品”，$n = 0,1,2,\cdots$．$A_0, A_1, A_2, \cdots$ 构成一个完备事件组．在应用全概率公式时，条件概率 $P(B_k \mid A_n)$ 的计算是一个 n 重伯努利概型问题．这是因为每件产品的质量均有优质品与非优质品之分，并且各件产品是否为优质品是相互独立的，又每件产品的优质品率都是 p．因此当 $n < k$ 时，$P(B_k \mid A_n) = 0$，当 $n \geqslant k$ 时，$P(B_k \mid A_n) = C_n^k p^k q^{n-k}$．

【解】　（Ⅰ）应用全概率公式，有

$$\begin{aligned} P(B_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)P(B_k \mid A_n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)P(B_k \mid A_n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda q} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \qquad (k = 0,1,2,\cdots). \end{aligned}$$

（Ⅱ）当 $m < k$ 时，$P(A_m \mid B_k) = 0$；当 $m \geqslant k$ 时，

$$\begin{aligned} P(A_m \mid B_k) &= \frac{P(A_m)P(B_k \mid A_m)}{P(B_k)} = \frac{k!}{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!}p^k q^{m-k} \\ &= \frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda q} \qquad (m = k, k+1, \cdots). \end{aligned}$$

评注　①这是一个全概率公式与伯努利概型的综合题型．它的复杂性不仅仅是由于导致事件 B_k 发生的完备事件组 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ 不是有限个而是可列个，而且条件概率 $P(B_k \mid A_n)$ 的计算不是通常的古典概型而是一个 n 重伯努利概型．

②在计算 $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda q} \frac{n-k=r}{\lambda q = \beta} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta^r}{r!}e^{-\beta} = 1$ 时，用到了指数函数 e^x 的幂级数展开式，即 $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k (-\infty < x < +\infty)$，及常用泊松分布的结论：$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = 1$．

www.TopSage.com

题型五　事件独立性讨论及与独立性有关的事件的概率计算

【例 1.27】 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：A_1 = {掷第一次出现正面}，A_2 = {掷第二次出现正面}，A_3 = {正、反面各出现一次}，A_4 = {正面出现两次}，则必有

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立.　　(B) A_2, A_3, A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立.　　(D) A_2, A_3, A_4 两两独立.

【分析】 试验的样本空间有 4 个样本点，即 Ω = {(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)}，显然 $A_1 \supset A_4, A_2 \supset A_4$，且 A_3 与 A_4 互不相容，依古典型概率公式，有

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}, \qquad P(A_4) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{4}, \quad P(A_3A_4) = 0.$$

计算可见　$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$，$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$，

$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$，$P(A_3A_4) = 0$，　　$P(A_1A_2A_3) = 0$.

因此，A_1, A_2, A_3 两两独立但不相互独立. 而 A_2, A_3, A_4 中由于 A_3 与 A_4 不独立而不是两两独立，更不能相互独立. 综上分析，应选(C).

【例 1.28】 甲、乙二人轮流投篮，游戏规则规定为甲先开始，且甲每轮只投一次，而乙每轮连续投两次，先投中者为胜. 设甲、乙每次投篮的命中率分别是 p 与 0.5，则 p = _____ 时，甲、乙胜负概率相同.

【分析】 记事件 A_i, B_i 分别表示甲、乙在第 i 次投篮中投中，i 为甲、乙二人投篮的总次数，i = 1,2,3,4,…. 记事件 A, B 分别表示甲、乙取胜. 事件 A 可以表示为下列互不相容的事件之和，即

$$A = A_1 \cup \overline{A}_1\overline{B}_2\overline{B}_3A_4 \cup \overline{A}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{A}_4\overline{B}_5\overline{B}_6A_7 \cup \cdots,$$

又 A 中每项中的各事件相互独立，因此有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{B}_3A_4) + P(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{A}_4\overline{B}_5\overline{B}_6A_7) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)P(A_4) \\ &\quad + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)P(\overline{A}_4)P(\overline{B}_5)P(\overline{B}_6)P(A_7) + \cdots \\ &= p + 0.5^2(1-p)p + 0.5^4(1-p)^2p + \cdots \\ &= p + 0.25(1-p)p + [0.25(1-p)^2]p + \cdots \end{aligned}$$

这是一个公比 $q = 0.25(1-p)$ 的几何级数求和问题. 由于 $0 < 0.25(1-p) < 1$，该级数收敛，且

$$P(A) = \frac{p}{1 - 0.25(1-p)}.$$

若要甲、乙胜率相同，则 $P(A) = P(B) = 0.5$，即 $\dfrac{p}{1-0.25(1-p)} = 0.5 \Rightarrow p = \dfrac{3}{7}$.

按这种游戏规则，只有当 $p = \dfrac{3}{7}$ 时，甲、乙胜负概率相同.

【例 1.29】 某射手的命中率为 $p(0 < p < 1)$，该射手连续射击 n 次才命中 k 次 $(k \leqslant n)$ 的概率为

(A) $p^k(1-p)^{n-k}$.　　(B) $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

(C) $C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$.　　(D) $C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$.

【分析】 n 次射击视为 n 次重复独立试验，每次射击命中概率为 p，不中概率为 $1-p$，设事件 A = “射击 n 次命中 k 次” = “前 $n-1$ 次有 $k-1$ 次击中，且第 n 次也击中”，则

$$P(A) = C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \cdot p = C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}.$$

应选(C).

www.TopSage.com

【例 1.30】 设每次射击命中率为0.3，连续进行4次射击，如果4次均未击中，则目标不会被摧毁；如果击中1次、2次，则目标被摧毁的概率分别为0.4与0.6；如果击中2次以上，则目标一定被摧毁．求目标被摧毁的概率．

【解】 设事件 A_k = “射击4次命中 k 次”，$k = 0,1,2,3,4$，B = “目标被摧毁”，则根据4重伯努利试验概型的公式 $P(A_i) = C_4^i 0.3^i \cdot 0.7^{4-i}$，$i = 0,1,2,3,4$，计算可得：

$$P(A_0) = 0.7^4 = 0.2401, \quad P(A_1) = 0.4116, \quad P(A_2) = 0.2646,$$
$$P(A_3) = 0.0756, \quad P(A_4) = 0.0081.$$

由于 A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 是一完备事件组，且依题意知

$$P(B \mid A_0) = 0, \quad P(B \mid A_1) = 0.4, \quad P(B \mid A_2) = 0.6, \quad P(B \mid A_3) = P(B \mid A_4) = 1,$$

应用全概率公式，有

$$P(B) = \sum_{i=0}^{4} P(A_i)P(B \mid A_i) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3) + P(A_4)$$
$$= 0.4071.$$

【例 1.31】 统计资料表明，男性患色盲的概率为5%，现有一批男士做体检．

（Ⅰ）求事件“发现首例患色盲的男士时已检查了30名男士”的概率 α；

（Ⅱ）要以不小于0.95的概率发现一例色盲患者，至少要检查多少名男士？

【解】 （Ⅰ）以 X 表示发现首例色盲患者时已检查过的男士数，则 X 服从参数为0.05的几何分布．

$$\alpha = P\{X \leqslant 30\} = \sum_{k=1}^{30} pq^{k-1} = p\frac{1-q^{30}}{1-q} = 1 - q^{30} = 1 - 0.95^{30} \approx 0.785.$$

（Ⅱ）
$$P\{X \leqslant n\} = 1 - P\{X > n\} = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} pq^{k-1} = 1 - \frac{pq^n}{1-q}$$
$$= 1 - q^n = 1 - 0.95^n \geqslant 0.95,$$
$$0.95^n \leqslant 0.05, \; n\lg 0.95 \leqslant \lg 0.05, \; n \geqslant \frac{\lg 0.05}{\lg 0.95} \approx 58.4.$$

故要以不小于0.95的概率发现一例色盲患者，至少要检查59名男士．

【例 1.32】 设平面区域 D 是由坐标为(0,0)，(0,1)，(1,0)，(1,1)的四个点围成的正方形．今向 D 内随机地投入10个点，求这10个点中至少有2个点落在曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的区域 D_1 内的概率．

【解】 设事件 A 表示“任投的一点落在区域 D_1 内”，$P(A)$ 是一个几何型概率的计算问题．样本空间 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，有利于事件 A 的样本点集合为 $D_1 = \{(x,y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant x\}$（如图1.3）．依几何型概率公式

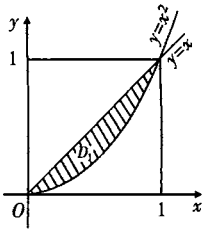


图 1.3

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{S_{D_1}}{S_D} = \frac{1}{6} \triangleq p,$$

其中 $S_D = 1$，$S_{D_1} = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$．

设事件 B_k 表示“10个点中落入区域 D_1 的点的个数为 k”，$k = 0, \cdots, 10$，这是一个十重伯努利概型问题，应用伯努利公式

$$P(B_2 \cup B_3 \cup \cdots \cup B_{10}) = 1 - P(B_0) - P(B_1) = 1 - (1-p)^{10} - C_{10}^1 p(1-p)^9$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \frac{10}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^9 = 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0.52.$$

www.TopSage.com

题型训练

大家网 TopSage.com

一、选择题

1. 设 A,B,C 是任意三个事件，事件 D 表示 A,B,C 中至少有两个事件发生，则下列事件中与 D 不相等的是

(A) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.　(B) $\Omega-(\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C})$.

(C) $AB\cup BC\cup AC$.　(D) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

2. 对于任意二事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则

(A) $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$.　(B) $\overline{A}\,\overline{B}\neq\varnothing$.

(C) $P(A)P(B)=0$.　(D) $P(A-B)=P(A)$.

3. 设 A 和 B 为任意二不相容事件，且 $P(A)P(B)>0$，则必有

(A) $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容.　(B) $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容.

(C) $P(A\cup\overline{B})=P(\overline{B})$.　(D) $P(A\overline{B})=P(\overline{B})$.

4. 设 A_1,A_2 和 B 是任意事件，且 $0<P(B)<1$，$P((A_1\cup A_2)\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$，则

(A) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$.　(B) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$.

(C) $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.　(D) $P((A_1\cup A_2)\mid\overline{B})=P(A_1\mid\overline{B})+P(A_2\mid\overline{B})$.

5. 对于任意两个事件 A 和 B，下列与 $A\cup B=B$ 不等价的是

(A) $A\subset B$.　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$.　(C) $A\overline{B}=\varnothing$.　(D) $\overline{A}B=\varnothing$.

6. 随机事件 A 与 B 互不相容，$0<P(A)<1$，则下列结论中一定成立的是

(A) $A\cup B=\Omega$.　(B) $\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$.　(C) $A=B$.　(D) $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$.

7. 下列事件中与 A 互不相容的事件是

(A) $\overline{ABC}$.　(B) $\overline{A\cup B\cup C}\cup\overline{B\cup C}$.

(C) $\overline{A(B\cup C)}$.　(D) $(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})$.

8. 设随机事件 A 与 B 为对立事件，$0<P(A)<1$，则一定有

(A) $0<P(A\cup B)<1$.　(B) $0<P(B)<1$.

(C) $0<P(AB)<1$.　(D) $0<P(\overline{A}\,\overline{B})<1$.

9. 在最简单的全概率公式 $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$ 中，要求事件 A 与 B 必须满足的条件是

(A) $0<P(A)<1$，B 为任意随机事件.　(B) A 与 B 为互不相容事件.

(C) A 与 B 为对立事件.　(D) A 与 B 为相互独立事件.

10. 在全概率公式 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$ 中，除了要求条件 B 是任意随机事件及 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$ 之外，我们可以将其他条件改为

(A) $A_1,\cdots,A_n$ 两两独立，但不相互独立.

(B) $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立.

(C) $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

(D) $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容，其和包含事件 B，即 $\sum_{i=1}^{n}A_i\supset B$.

11. 同时抛掷三枚匀称的硬币，正面与反面都出现的概率为

(A) $\frac{1}{4}$.　(B) $\frac{1}{3}$.　(C) $\frac{2}{3}$.　(D) $\frac{3}{4}$.

12. 将一枚匀称的硬币独立地掷三次，记事件 $A=$“正、反面都出现”；$B=$“正面最多出现一次”；$C=$“反面最多出现一次”，则下列结论中不正确的是

(A) A 与 B 独立.　(B) B 与 C 独立.

www.TopSage.com

(C) A 与 C 独立. (D) $B \cup C$ 与 A 独立.

二、填空题

1. 口袋内有四个同样的球,分别标有号码1,2,3,4.每次从中任取一个球(每次取后放回去),连续两次.如果第 i 次取到球上的编号记为 a_i, $i=1,2$,记事件 A 表示事件"$a_1^2 \geqslant 4a_2$",则该试验的样本空间 $\Omega =$ _____;事件 $A =$ _____;概率 $P(A) =$ _____.
2. 设事件 A 发生的概率是事件 B 发生概率的3倍,A 与 B 都不发生的概率是 A 与 B 同时发生概率的2倍,若 $P(B) = \frac{2}{9}$,则 $P(A-B) =$ _____.
3. 设事件 A 与 B 相互独立,已知它们都不发生的概率为0.16,又知 A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 A 与 B 都发生的概率是_____.
4. 三个箱子,第一个箱子中有4个黑球与1个白球,第二个箱中有3个黑球与3个白球,第三个箱中有3个黑球与5个白球.现随机地选取一个箱子从中任取1个球,则这个球为白球的概率是_____;若已发现取出的这个球是白球,则它不是取自第二个箱子的概率是_____.

三、计算题

1. 铁路一编组站随机地编组发往三个不同地区 E_1, E_2 和 E_3 的各2节、3节和4节车皮,求发往同一地区的车皮恰好相邻的概率 p.
2. 假设从单位正方形区域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 中随机地选取一点,以该点的两个坐标 x 与 y 作为直角三角形的两条直角边,求该直角三角形的面积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率 p.
3. 假设随机事件 A 与 B 相互独立, $P(A) = P(\overline{B}) = a-1$, $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$,求 a 的值.
4. 一个班内有20位同学都想去参观一个展览会,但只有3张参观票,大家同意通过这20位同学抽签决定3张票的归属.计算下列事件的概率:
   (Ⅰ)"第二人抽到票"的概率 p_1;
   (Ⅱ)"第二人才抽到票"的概率 p_2;
   (Ⅲ)"第一人宣布抽到了票,第二人又抽到票"的概率 p_3;
   (Ⅳ)"前两人中至少有一人抽到票"的概率 p_4.
5. 甲袋中有3个白球2个黑球,乙袋中有4个白球4个黑球,现从甲袋中任取2球放入乙球,再从乙袋中取一球,求取出球是白球的概率 p;如果已知从乙袋中取出的球是白球,求从甲袋中取出的球是一白一黑的概率 q.
6. 三人独立地同时破译一个密码,他们每人能够译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.求此密码能被译出的概率 p.
7. 甲盒内有3个白球与2个黑球,从中任取3个球放入空盒乙中,然后从乙盒内任取2个球放入空盒丙中,最后从丙盒内再任取1个球,试求:
   (Ⅰ)从丙盒内取出的是白球的概率;
   (Ⅱ)若从丙盒内取到白球,当初从甲盒内取到3个白球的概率.

www.TopSage.com

第二章　随机变量及其分布

内容概要与重难点提示

随机变量是概率论与数理统计所要研究的基本对象，它是定义在样本空间上具有某种可测性的实值函数．我们关心的是它取哪些值以及以怎样的概率取这些值，而分布函数则完整地描述了随机变量取值的统计规律，又由于分布函数有良好的分析性质，因此它是研究随机变量的重要工具．

离散型与连续型随机变量是最重要的两类随机变量，它们因取值范围的不同，在描述与处理方法上亦有很大差异．考生要对比其异同，理解离散型随机变量的概率分布与连续型随机变量的概率密度以及它们与分布函数间的关系．

在实际应用与理论研究中都很重要的几种分布，即所谓常见分布，考生要掌握其分布规律及其应用，并理解分布参数的概率意义，常见分布主要是0-1分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松分布、均匀分布、指数分布与正态分布．

随机变量函数的分布，主要难点是求连续型随机变量函数的分布，其最基本的方法是分布函数法．

考核知识要点讲解

一、随机变量及其分布函数

（一）随机变量及概率分布的概念

取值依赖于某个随机试验的结果，并随着试验结果不同而变化的变量，称之为**随机变量**．

随机变量 X 的**概率分布**，是指 X 的“一切可能值的集合”及它取各可能值或在值域内各部分取值的“概率”二者的总称．

（二）随机变量的分布函数

▶1. 分布函数的概念

设 X 是一个随机变量，对任意实数 x，记 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，称 $F(x)$ 为随机变量 X 的**分布函数**，又称随机变量 X 服从分布 $F(x)$．随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 就是 X 在区间 $(-\infty,x]$ 内取值这一事件（即事件 $\{X\leqslant x\}$）的概率．

对于任意实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\}=F(x_2)-F(x_1),$$

因此，若已知 X 的分布函数，我们就知道 X 落在任一区间 $(x_1,x_2]$ 上的概率，从这个意义上说，分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性．

▶2. 分布函数的性质

(1) $F(x)$ 是一个单调不减函数，即对任意实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$．

(2) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$．

www.TopSage.com

(3) $F(x) = F(x+0)$,即 $F(x)$ 是右连续的.

【注】 ① 上述性质(1) ~ (3)是分布函数的三条基本性质,这三条基本性质是一个函数 $F(x)$ 为某一随机变量的分布函数的充分和必要条件.

② 如果定义 $G(x) = P\{X < x\}$ 为随机变量 X 的分布函数,则 $G(x)$ 左连续,其他性质(性质(1)与(2))不变.

③ 根据分布函数可以求随机变量有关事件的概率.例如:设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数,则对任意两个实数 $a < b$,有

$$P\{a < X \leqslant b\} = F(b) - F(a); \qquad P\{X = a\} = F(a) - F(a-0);$$

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = F(b) - F(a-0); \qquad P\{X \geqslant a\} = 1 - F(a-0);$$

$$P\{a < X < b\} = F(b-0) - F(a); \qquad P\{X < a\} = F(a-0),$$

其中,$F(a) = F(a+0) = \lim\limits_{x \to a^+} F(x)$, $F(a-0) = \lim\limits_{x \to a^-} F(x)$.

对于上述通过随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 来表示与 X 相联系事件的基本关系,考生一定要理解、掌握.

【例 2.1】 假设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数,则下列结论不正确的是

(A) 如果 $F(a) = 0$,则对任意 $x \leqslant a$ 有 $F(x) = 0$.

(B) 如果 $F(a) = 1$,则对任意 $x \geqslant a$ 有 $F(x) = 1$.

(C) 如果 $F(a) = \dfrac{1}{2}$,则 $P\{X \leqslant a\} = \dfrac{1}{2}$.

(D) 如果 $F(a) = \dfrac{1}{2}$,则 $P\{X \geqslant a\} = \dfrac{1}{2}$.

【分析】 由于 $F(x)$ 是单调不减且 $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$,$F(x) = P\{X \leqslant x\}$,因此(A)、(B)、(C)都成立,而选项(D)未必成立,因此选(D).

或举反例说明(D)不正确.设 X 的概率分布为

X	a	$a+1$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,则 $F(a) = P\{X \leqslant a\} = \dfrac{1}{2}$,而

$$P\{X \geqslant a\} = P\{X = a\} + P\{X = a+1\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

事实上,已知 $F(a) = 0$,则对任意 $x \leqslant a$ 有 $0 \leqslant F(x) \leqslant F(a) = 0$,从而有 $F(x) = 0$;若 $F(a) = 1$,则对任意 $x \geqslant a$ 有 $1 \geqslant F(x) \geqslant F(a) = 1$,从而 $F(x) = 1$;当 $F(a) = \dfrac{1}{2}$ 时,$F(a) = P\{X \leqslant a\} = \dfrac{1}{2}$.

又 $P\{X \geqslant a\} = 1 - P\{X < a\} = 1 - F(a-0)$,如果 $P\{X \geqslant a\} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1 - F(a-0) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow F(a-0) = \dfrac{1}{2} = F(a) = F(a+0) \Rightarrow F(x)$ 在 $x = a$ 处连续,此结论未必成立.

二、离散型随机变量与连续型随机变量

(一) 离散型随机变量

▶1. 离散型随机变量及其概率分布

设 X 是一个随机变量,如果 X 只取有限个或无穷可列个值,则称 X 为**离散型随机变量**.

设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_i (i = 1,2,\cdots)$,X 取各个可能值的概率(即事件 $\{X = x_i\}$ 的概率)$P\{X = x_i\}$ 为 $p_i, i = 1,2,\cdots$,则 $P\{X = x_i\} = p_i (i = 1,2,\cdots)$ 称为 **X 的概率分布或分布律**.

它也可以采用表格的形式表示，即

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

或 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$.

对于两个任意实数 $a < b$，有

$$\boldsymbol{P}\{a \leqslant X \leqslant b\} = \sum_{a \leqslant x_i \leqslant b} \boldsymbol{P}\{X = x_i\} = \sum_i p_i,$$

其中 $\sum$ 表示对于满足 $a \leqslant x_i \leqslant b$ 的一切 $\{X = x_i\}$ 发生的概率求和.

▶2. 离散型随机变量的概率分布的性质

(1) $p_i \geqslant 0$, $i = 1,2,\cdots$; (2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

▶3. 离散型随机变量 X 的分布函数

设离散型随机变量 X 的概率分布为 $p_i = \boldsymbol{P}\{X = x_i\}$，则 X 的分布函数为

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x\} = \sum_{x_i \leqslant x} \boldsymbol{P}\{X = x_i\} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 $\sum$ 表示对于所有满足 $x_i \leqslant x$ 的一切 $\{X = x_i\}$ 发生的概率求和. $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内除 X 可能取的值 $x_i (i = 1,2,\cdots)$ 外处处是连续的.

此时概率分布为

$$p_i = \boldsymbol{P}\{X = x_i\} = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x_i\} - \boldsymbol{P}\{X < x_i\} = F(x_i) - F(x_i - 0).$$

【例 2.2】 设随机变量 X 的分布律为

X	1	4	6	10
p_k	2/6	1/6	2/6	1/6

求 X 的分布函数 $F(x)$，并利用分布函数求 $\boldsymbol{P}\{2 < X \leqslant 6\}$，$\boldsymbol{P}\{X < 4\}$，$\boldsymbol{P}\{1 \leqslant X < 5\}$.

【解】 仅当 $x_i = 1,4,6,10$ 时概率 $\boldsymbol{P}\{X = x_i\} \neq 0$，$F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} p_i$，这里和式是对于所有满足 $x_i \leqslant x$ 的 i 求和的，故有

当 $x < 1$ 时，$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x\} = 0$;

当 $1 \leqslant x < 4$ 时，$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x\} = \boldsymbol{P}\{X = 1\} = 2/6$;

当 $4 \leqslant x < 6$ 时，$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x\} = \boldsymbol{P}\{X = 1\} + \boldsymbol{P}\{X = 4\} = 3/6$;

当 $6 \leqslant x < 10$ 时，$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x\} = \boldsymbol{P}\{X = 1\} + \boldsymbol{P}\{X = 4\} + \boldsymbol{P}\{X = 6\} = 5/6$;

当 $x \geqslant 10$ 时，$F(x) = \boldsymbol{P}\{X = 1\} + \boldsymbol{P}\{X = 4\} + \boldsymbol{P}\{X = 6\} + \boldsymbol{P}\{X = 10\} = 1$.

即有

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1/3, & 1 \leqslant x < 4, \\ 1/2, & 4 \leqslant x < 6, \\ 5/6, & 6 \leqslant x < 10, \\ 1, & x \geqslant 10. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}\{2 < X \leqslant 6\} = F(6) - F(2) = 5/6 - 1/3 = 1/2,$$

$$\boldsymbol{P}\{X < 4\} = F(4) - \boldsymbol{P}\{X = 4\} = 1/2 - 1/6 = 1/3,$$

$$\boldsymbol{P}\{1 \leqslant X < 5\} = \boldsymbol{P}\{1 < X \leqslant 5\} + \boldsymbol{P}\{X = 1\} - \boldsymbol{P}\{X = 5\}$$

$$= F(5) - F(1) + 1/3 - 0 = 1/2 - 1/3 + 1/3 = 1/2.$$

www.TopSage.com

评注 在求 $F(x)$ 时要将区间 $(-\infty,+\infty)$ 分成几个小区间，然后在各个小区间写出 $F(x)$，要注意这些小区间除第一个小区间外都是左闭右开的．分布函数应有 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，在求出 $F(x)$ 后，可验证一下，看有没有出错．另外，在使用公式 $\boldsymbol{P}\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$ 时，在这里 $\{\ \}$ 中的不等式应是左开右闭的．如果 $\{\ \}$ 内的不等式不是左开右闭的，应将不等式调整为左开右闭的，然后使用这一公式，如本例所示．

（二）连续型随机变量

▶1. 连续型随机变量及其概率密度

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，如果存在非负可积函数 $f(x)$，使得对于任意实数 x，均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

则称 X 为**连续型随机变量**，函数 $f(x)$ 称为 X 的**概率密度函数**，简称**概率密度**．

▶2. 连续型随机变量的概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) $f(x)\geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$；

(3) 对于任意实数 $x_1,x_2(x_1\leqslant x_2)$，有

$$\boldsymbol{P}\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t;$$

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$．

【注】 ① 性质(1)与(2)是函数 $f(x)$ 为某一随机变量 X 的概率密度的充要条件．

② 概率密度 $f(x)$ 一定非负，但可以大于1，而离散型随机变量 X 的概率分布 p_i 不仅非负且一定不大于1．

③ 给定 X 的概率密度 $f(x)$ 就能确定 $F(x)$，由于 $f(x)$ 位于积分号之内，故改变 $f(x)$ 在这个区间内有限个点的函数值，并不改变 X 在该区间内取值的概率．

④ 由于连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是连续函数，因此 X 取任何给定值的概率都是零，即对任何实数 a，$\boldsymbol{P}\{X=a\}=0$．随机变量 X 取某个 $x=a$ 为值的概率不等于0，当且仅当 X 的分布函数 $F(x)$ 在点 $x=a$ 处不连续．因此，在计算连续型随机变量落在某一区间的概率时，可以不必区分该区间是开区间或闭区间或半闭区间（即其概率与包含或不包含区间端点无关）．例如，对任意两个实数 $a<b$，有

$$\boldsymbol{P}\{a<X<b\}=\boldsymbol{P}\{a\leqslant X\leqslant b\}=\boldsymbol{P}\{a\leqslant X<b\}=\boldsymbol{P}\{a<X\leqslant b\}$$
$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

⑤ 由性质(2)知道介于曲线 $y=f(x)$ 与 Ox 轴之间的面积等于1．由性质(3)知道 X 落在区间 $(x_1,x_2]$ 的概率 $\boldsymbol{P}\{x_1<X\leqslant x_2\}$ 等于区间 $(x_1,x_2]$ 上曲线 $y=f(x)$ 之下的曲边梯形的面积．

【例2.3】 假设 X 为随机变量，则对任意实数 a，概率 $\boldsymbol{P}\{X=a\}=0$ 的充分必要条件是

(A) X 是离散型随机变量．　(B) X 不是离散型随机变量．

(C) X 的分布函数是连续函数．　(D) X 的概率密度是连续函数．

【分析】 对任意实数 a 有 $\boldsymbol{P}\{X=a\}=0$ 是连续型随机变量的必要条件但非充分条件，因此(B)、(D)不能选，又离散型随机变量必有 a 使 $\boldsymbol{P}\{X=a\}\neq 0$，(A)不能选，故正确选项是(C)．事实上，$\boldsymbol{P}\{X=a\}=0\Leftrightarrow F(a)-F(a-0)=0\Leftrightarrow$ 对任意实数 a，$F(a)=F(a-0)\Leftrightarrow F(x)$ 是 x 的连续函数．

【例2.4】 假设 X 是只可能取两个值的离散型随机变量，Y 是连续型随机变量，则随机变量 $X+Y$ 的分布函数

www.TopSage.com

(A) 是连续函数. (B) 是阶梯函数.

(C) 恰有一个间断点. (D) 至少有二个间断点.

【分析】 已知 $X \sim \begin{pmatrix} a & b \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, $Y \sim f(y)$, 要讨论 $X+Y$ 的分布函数 $F(t)$ 是否连续, 即是否存在 $t_0 \in R$, 使 $F(t_0) - F(t_0 - 0) \neq 0$. 若存在, $F(t)$ 在 t_0 处间断, 若不存在, $F(t)$ 是 t 的连续函数. 而 $F(t_0) - F(t_0 - 0) = P\{X+Y=t_0\}$, 因此我们通过计算概率 $P\{X+Y=t_0\}$ 来确定正确选项. 对任意实数 t, 由全概率公式及概率性质得

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P\{X+Y=t\} &= P\{X+Y=t, X=a\} + P\{X+Y=t, X=b\} \\ &= P\{Y=t-a, X=a\} + P\{Y=t-b, X=b\} \\ &\leqslant P\{Y=t-a\} + P\{Y=t-b\} = 0 \end{aligned}$$

(因为 $P(AB) \leqslant P(A)$, 又 Y 是连续型随机变量, 所以对任意实数 c, 有 $P\{Y=c\}=0$). 故对任意实数 t, $P\{X+Y=t\}=0 \Leftrightarrow X+Y$ 的分布函数是连续函数, 因此选(A).

评注 本题给出应用全概率公式讨论一个离散型与一个连续型(或离散型)随机变量问题的方法(即对离散型随机变量的各种可能取值用全概率公式把它们展开), 不论是计算概率还是求随机变量的分布我们常常都是这样处理的, 它具有一般性的意义, 务必注意.

【例 2.5】 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 \leqslant x < 5, \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}x, & 5 \leqslant x < 10, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求分布函数 $F(x)$.

【解】 分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

由于 $f(x)$ 是分段函数, 上述积分在不同的区间上被积函数的表达式各不相同, 因此积分要分段进行. 要注意的是不管 x 处于哪一个子区间, 积分的下限总是"$-\infty$", 积分 $\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$ 由 $(-\infty, x)$ 的各个子区间上的积分相加而得.

当 $x < 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}x = 0$;

当 $0 \leqslant x < 5$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{x} \frac{1}{25}x\mathrm{d}x = \frac{1}{50}x^2$;

当 $5 \leqslant x < 10$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{5} \frac{1}{25}x\mathrm{d}x + \int_{5}^{x} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x\right)\mathrm{d}x$

$$= -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2;$$

当 $x \geqslant 10$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{5} \frac{1}{25}x\mathrm{d}x + \int_{5}^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x\right)\mathrm{d}x + \int_{10}^{x} 0\mathrm{d}x = 1$,

即有 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{50}x^2, & 0 \leqslant x < 5, \\ -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2, & 5 \leqslant x < 10, \\ 1, & x \geqslant 10. \end{cases}$

www.TopSage.com

评注 ①$F(x)$ 应具有性质 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$，且在点 $x=0,5,10$ 处连续，验证一下，是否做对了．本题易犯的错误是将 $F(x)$ 误写成

$$\begin{cases} \frac{1}{50}x^2, & 0 \leqslant x < 5, \\ -1+\frac{2}{5}x-\frac{1}{50}x^2, & 5 \leqslant x < 10, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

② 分段定义的连续型随机变量的分布函数 $F(x)$，由于 $F(x)$ 连续，它的定义域中各子区间的端点，只要求表达清楚，属于哪一个区间无关紧要，也没必要与 $f(x)$ 一致．

【例 2.6】 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leqslant x < 1, \\ x-\frac{1}{2}, & 1 \leqslant x < 1.5, \\ 1, & x \geqslant 1.5, \end{cases}$$

求 $P\{0.4 < X \leqslant 1.3\}$，$P\{X > 0.5\}$，$P\{1.7 < X \leqslant 2\}$ 以及概率密度 $f(x)$．

【解】 $P\{0.4 < X \leqslant 1.3\} = F(1.3) - F(0.4) = (1.3-0.5) - \frac{0.4}{2} = 0.6$，

$$P\{X > 0.5\} = 1 - P\{X \leqslant 0.5\} = 1 - F(0.5) = 1 - \frac{0.5}{2} = 0.75,$$

$$P\{1.7 < X \leqslant 2\} = F(2) - F(1.7) = 1 - 1 = 0;$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 1.5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

评注 ① 这里，$F(x)$ 是一个分段函数，在求 $F(x)$ 在某一点处的值时，应注意该点落在哪一个区间，在这区间上 $F(x)$ 的表达式是什么．

② 由于改变概率密度 $f(x)$ 在个别点的函数值，不影响分布函数 $F(x)$ 的取值．因此，概率密度在个别点的函数值可以是随意指定的有限值．例如本题概率密度也可写成

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x \leqslant 1.5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

在 $f(x)$ 的连续点上才有 $F'(x)=f(x)$．这里 $F'(1)$ 不存在，而 $f(1)=\frac{1}{2}$（它是由我们随意指定的）．

三、常见的离散型、连续型随机变量及其概率分布

（一）常见的离散型随机变量及其概率分布

▶1. 0-1 分布

如果随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值，其概率分布为

$$P\{X=k\}=p^kq^{1-k}\quad(k=0,1),\tag{2.2}$$

则称 X 服从参数为 p $(0<p<1)$ 的**0-1 分布或两点分布**，其中 $q=1-p$.

【注】 ① 该分布用来描述只有两种对立结果(成功与失败、合格品与不合格品、击中目标与未击中目标、事件 A 出现与事件 A 不出现等)的伯努利试验.

② 以后当我们提到一个随机变量 X 的"概率分布"时，指的是它的分布函数；或者，当 X 是连续型随机变量时，指的是它的概率密度，当 X 是离散型随机变量时，指的是它的分布律.

▶2. 二项分布

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n),\tag{2.3}$$

则称 X 服从参数为 n,p 的**二项分布**，简记为 $X\sim B(n,p)$，其中 $0<p<1,q=1-p$.

【注】 ① 进行一次试验，若试验的成功率为 $p(0<p<1)$，则在一次试验中成功次数 X 服从参数为 p 的 0-1 分布.

② 二项分布描述 n 重伯努利试验，若每次试验成功率为 p $(0<p<1)$，进行 n 次独立重复试验，则成功总次数 X 服从二项分布. 或若 X 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则 $X\sim B(n,p)$，其中 $p=P(A)$.

③ 如果 X 服从二项分布 $B(n,p)$，则 $Y=n-X$ 服从二项分布 $B(n,q)$，其中 $q=1-p$.

▶3. 几何分布

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=n\}=pq^{n-1},n=1,2,\cdots\tag{2.4}$$

则称 X 服从参数为 p 的**几何分布**，其中 $0<p<1,q=1-p$.

【注】 ① 几何分布与二项分布都以独立重复试验为背景. 其中二项分布描述在 n 次独立重复试验中成功的次数，其取值为 $0,1,\cdots,n$；而几何分布则描述在连续独立重复试验中首次取得成功所进行的试验次数，其取值为 $1,2,\cdots$.

② 几何分布具有"无记忆性"，即当 m,n 均大于 0 时，有

$$P\{X=m+n\mid X>m\}=P\{X=n\};$$

$$P\{X>m+n\mid X>m\}=P\{X>n\}.$$

▶4. 超几何分布

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=m\}=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,\cdots,\min\{n,M\}),\tag{2.5}$$

则称 X 服从参数为 n,N,M 的**超几何分布**，其中 n,N,M 均为正整数且 $n\leqslant N,M\leqslant N$.

▶5. 泊松分布

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,\tag{2.6}$$

则称 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的**泊松分布**，简记作 $X\sim P(\lambda)$.

【注】 泊松分布中参数 λ 的概率意义是随机变量 X 的数学期望，即 $\lambda=EX$.

泊松定理 若随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$，则当 p 充分小而 n 充分大且 $np=\lambda$ 适中时，X 近似服从参数为 $\lambda=np$ 的泊松分布，即

$$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}(\text{其中}\ \lambda=np).$$

【注】 ① 上式表明：以 n,p 为参数的二项分布的概率值可以由参数为 $\lambda=np$ 的泊松分布的概率

www.TopSage.com

值近似．上式也能用来作二项分布概率的近似计算．

②注意定理的条件 $np=\lambda$ 中要求 n 很大又 p 很小且 $\lambda=np$ 适中．实际应用中，当 $n\geqslant 100, p\leqslant 0.10$ 时即可利用上式，不过 n 应尽量地大，否则近似效果不佳．

【例 2.7】 已知某自动生产线加工出的产品次品率为 0.01，检验人员每天检验 8 次，每次从已生产出的产品中随意取 10 件进行检验，如果发现其中有次品就去调整设备，那么一天至少要调整设备一次的概率为_____．$(0.99^{80}\approx 0.4475)$

【分析】 如果用 X 表示每天要调整的次数，那么所求的概率为 $P\{\text{每天至少调整设备一次}\}=P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}$．显然 $0\leqslant X\leqslant 8$，如果将“检验一次”视为一次试验，那么 X 就是 8 次试验，事件 $A=$“10 件产品中至少有一件次品”发生的次数，因此 $X\sim B(8,p)$，其中 $p=P(A)$．如果用 Y 表示 10 件产品中次品数，则 $Y\sim B(10,0.01)$，

$$p=P(A)=P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-0.01)^{10}=1-0.99^{10}.$$

所求的概率为 $P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-p)^8=1-0.99^{80}=1-0.4475\approx 0.55$．

【例 2.8】 袋中有 8 个球，其中有 3 个白球，5 个黑球．现从中随意取出 4 个球，如果 4 个球中有 2 个白球 2 个黑球，试验停止，否则将 4 个球放回袋中重新抽取 4 个球，直至取到 2 个白球 2 个黑球为止．用 X 表示抽取次数，则 $P\{X=k\}=$_____$(k=1,2,\cdots)$．

【分析】 若记 $A_i=$“第 i 次取出 4 个球为 2 个白球，2 个黑球”，由于是有放回取球，因而 A_i 相互独立，根据超几何分布知 $P(A_i)=\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$，再由几何分布即得

$$P\{X=k\}=P(\bar{A}\cdots\bar{A}_{k-1}A_k)=\left(1-\frac{3}{7}\right)^{k-1}\frac{3}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^{k-1}\cdot\frac{3}{7}\quad(k=1,2,\cdots).$$

【例 2.9】 设随机变量 X_1 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的 0-1 分布，X_2 服从参数为 n,p 的二项分布，Y 服从参数为 $2p$ 的泊松分布，已知 X_1 取 0 的概率是 X_2 取 0 概率的 9 倍，X_1 取 1 的概率是 X_2 取 1 概率的 3 倍，则 $P\{Y=0\}=$_____，$P\{Y=1\}=$_____．

【分析】 由于 Y 服从泊松分布，则需先求出其分布参数 λ 的值，而 $\lambda=2p$，因此需求出 p 的值．

$$P\{X_1=0\}=1-p\triangleq q,\qquad P\{X_1=1\}=p,$$

$$P\{X_2=0\}=q^n,\qquad P\{X_2=1\}=npq^{n-1}.$$

依题意有 $\begin{cases}q=9q^n,\\ p=3npq^{n-1}\end{cases}\Rightarrow p=\dfrac{2}{3},\ \lambda=2p=\dfrac{4}{3}.$

于是 $P\{Y=0\}=e^{-\lambda}=e^{-\frac{4}{3}},\quad P\{Y=1\}=\lambda e^{-\lambda}=\dfrac{4}{3}e^{-\frac{4}{3}}.$

（二）常见的连续型随机变量及其概率密度

▶1. 均匀分布

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{2.7}$$

则称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的**均匀分布**，记为 $X\sim U(a,b)$．X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}\tag{2.8}$$

www.TopSage.com

【注】 在区间$[a,b]$上服从均匀分布的随机变量X在$[a,b]$内任一子区间上取值的概率只依赖于该子区间的长度,而与其在$[a,b]$内的位置无关.即若$[c,d]\subset[a,b]$,则

$$P\{c\leqslant X\leqslant d\}=\frac{d-c}{b-a}.$$

TopSage.com

▶2. 指数分布

若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\tag{2.9}$$

则称X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的**指数分布**,记为$X\sim E(\lambda)$.X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\tag{2.10}$$

【注】 ①指数分布常用作描述一些电子元器件的使用寿命,当$x>0$时,$P\{X>x\}=e^{-\lambda x}$.

②服从指数分布的随机变量X具有"无记忆性",即对任意$s,t>0$,有$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$.如果$X$是某一元件的寿命,那么该式表明:已知元件已使用了$s$小时,它总共能使用至少$s+t$小时的条件概率,与从开始使用时算起它至少能使用$t$小时的概率相等.这就是说,元件对它已使用过$s$小时没有记忆.具有这一性质是指数分布有广泛应用的重要原因.

▶3. 正态分布

(1) 一般正态分布

若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad(-\infty<x<+\infty),\tag{2.11}$$

其中μ和σ均为常数,且$\sigma>0$,则称X服从参数为μ,σ的**正态分布**,简记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

由(2.11)式可得X的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则由"若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$."可将它的分布函数$F(x)$写成

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right);\tag{2.12}$$

$$F(\mu-x)+F(\mu+x)=1.$$

进而可得 $f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

对于任意区间$(x_1,x_2]$,有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\left\{\frac{x_1-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right),\tag{2.13}$$

其中Φ,φ分别为标准正态分布的分布函数和概率密度.

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$f(x)$具有以下性质:

1°概率密度$f(x)$关于$x=\mu$对称,$\varphi(x)$是偶函数.这表明对于任意$h>0$有

$$P\{\mu-h<X\leqslant\mu\}=P\{\mu<X\leqslant\mu+h\},\text{即}f(\mu-x)=f(\mu+x).$$

2°当$x=\mu$时取到最大值$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.在$x=\mu\pm\sigma$处曲线有拐点.曲线以$Ox$轴为渐近线.

(2) 标准正态分布

当$\mu=0,\sigma=1$时,称X服从**标准正态分布**,记为$X\sim N(0,1)$,其概率密度和分布函数分别用

www.TopSage.com

$\varphi(x)$,$\Phi(x)$ 表示,即有

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty),\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{2.14}$$

标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数 $\Phi(x)$ 与概率密度 $\varphi(x)$ 的性质主要有:

1°$\varphi(-x)=\varphi(x)$,即 $\varphi(x)$ 是偶函数.

2°$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内严格单调递增,在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递减,在 $x=0$ 处取最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

3°$x=\pm1$ 是 $\varphi(x)$ 的两个拐点.

4°$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$,即 x 轴是 $\varphi(x)$ 的水平渐近线.

5°$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$. (2.15)

6°若 $X\sim N(0,1)$,当 $c>0$ 时,$P\{|X|\leqslant c\}=2\Phi(c)-1$.

【注】 ①若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则当 $a\neq0$ 时,$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

特别地,当 $a=1$ 时,$X+b\sim N(\mu+b,\sigma^2)$.

②若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$,则对于不全为零的常数 $a_1,a_1,\cdots,a_n$,有

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\Big).$$

当 $n=2$ 时,$a_1X_1+a_2X_2\sim N(a_1\mu_1+a_2\mu_2,a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2)$.

【例 2.10】 已知随机变量 Y 服从 $[0,5]$ 上的均匀分布,则关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4Yx+Y+2=0$ 有实根的概率 $\alpha=$ _____.

【分析】 已知 $Y\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0\leqslant x\leqslant5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则所求的概率为

$$\begin{aligned}\alpha&=P\{\text{方程有实根}\}=P\{\text{判别式}\Delta\geqslant0\}=P\{16Y^2-16(Y+2)\geqslant0\}\\&=P\{16(Y^2-Y-2)=16(Y-2)(Y+1)\geqslant0\}\\&=P\{(Y\geqslant2)\cup(Y\leqslant-1)\}=P\{Y\geqslant2\}+P\{Y\leqslant-1\}=\frac{1}{5}(5-2)+0=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

【例 2.11】 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则概率 $P\Big\{\max\Big(X,\frac{1}{X}\Big)\leqslant2\Big\}=$ _____.

【分析】 由题设知 $P\{X>0\}=1$,$P\{X\leqslant0\}=0$,应用全概率公式得

$$\begin{aligned}P\Big\{\max\Big(X,\frac{1}{X}\Big)\leqslant2\Big\}&=P\Big\{X\leqslant2,\frac{1}{X}\leqslant2\Big\}\\&=P\Big\{\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant2,X>0\Big\}+P\Big\{\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant2,X\leqslant0\Big\}\\&=P\Big\{\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant2\Big\}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\frac{1}{2}\lambda}-e^{-2\lambda}.\end{aligned}$$

【例 2.12】 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,已知 $P\{X\leqslant2\}=0.062$,$P\{X\geqslant9\}=0.025$,则概率 $P\{|X|\leqslant4\}=$ _____.

【分析】 要计算正态分布随机变量在某范围内取值的概率,应首先知道其分布参数 μ 与 σ.依题意,有 $P\{X\leqslant2\}=\Phi\Big(\frac{2-\mu}{\sigma}\Big)=0.062$,$P\{X<9\}=\Phi\Big(\frac{9-\mu}{\sigma}\Big)=1-P\{X\geqslant9\}=0.975$,

即 $\Phi\Big(\frac{\mu-2}{\sigma}\Big)=1-\Phi\Big(\frac{2-\mu}{\sigma}\Big)=0.938$,$\Phi\Big(\frac{9-\mu}{\sigma}\Big)=0.975$.

www.TopSage.com

查标准正态分布表,有 $\begin{cases}\dfrac{\mu-2}{\sigma}=1.54,\\ \dfrac{9-\mu}{\sigma}=1.96\end{cases}\Rightarrow\ \mu=5.08,\ \ \sigma=2.$

于是 $$P\{|X|\leqslant 4\}=P\{-4\leqslant X\leqslant 4\}=\Phi\left(\frac{4-5.08}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-4-5.08}{2}\right)$$
$$=\Phi(-0.54)-\Phi(-4.54)=0.2946.$$

(三) 常用概率分布表及其相互关系

▶1. 常用概率分布表

表 2.1　常用离散型概率分布($q=1-p$)

分布名称	分布律	可能值 k	分布参数	数学期望	方　差
0-1 分布	p^kq^{1-k}	1 和 0	p $(0<p<1)$	p	pq
二项分布	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$0,1,\cdots,n$	n,p $(n\geqslant 1,0<p<1)$	np	npq
几何分布	pq^{k-1}	$1,2,\cdots$	p	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
超几何分布	$\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	k 为整数 $(\max\{0,n-N+M\}$ $\leqslant k\leqslant\min\{n,M\})$	n,M,N $\begin{pmatrix}M\leqslant N\\ n\leqslant N\end{pmatrix}$	np $(p=M/N)$	$npq\dfrac{N-n}{N-1}$
泊松分布	$\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	自然数	λ $(\lambda>0)$	λ	λ

表 2.2　常用连续型概率分布

分布名称	概率密度	定义域	分布参数	数学期望	方　差
均匀分布	$\dfrac{1}{b-a}$	(a,b)	a,b $(a<b)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$\lambda e^{-\lambda x}$	$(0,+\infty)$	λ	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$(-\infty,+\infty)$	μ,σ $(\sigma>0)$	μ	σ^2
标准正态分布	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$(-\infty,+\infty)$	$\mu=0,\sigma=1$	0	1

www.TopSage.com

▶2. 常用概率分布之间的关系

(1) 与二项分布的关系

1) 参数为 p 的 0-1 分布就是参数为 n,p 的二项分布 $B(n,p)$ 当 $n=1$ 时的特例.

2) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从参数为 p 的 0-1 分布,则

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(n,p).$$

3) 泊松定理:设 $X \sim B(n,p)$,则当 n 充分大而 p 充分小且 np 适中时,X 近似服从参数为 $\lambda = np$ 的泊松分布.

4) 棣莫弗 - 拉普拉斯定理:设 $X \sim B(n,p)$,则当 n 充分大时,X 近似服从正态分布 $N(np,npq)$.

5) 自有限总体的非还原抽样产生超几何分布,而还原抽样则产生二项分布. 当总体容量 N 和抽样次数 n 充分大,但 n 相对 N 较小时,超几何分布和二项分布的概率相近,即

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

其中 $p = M/N$. 实际中,当 N 和抽样次数 n 充分大且 $n \leqslant 0.1N$ 时可以利用此近似公式.

(2) 与正态分布的关系

1) 许多重要概率分布,如 χ^2 分布,t 分布和 F 分布都是正态变量函数的分布.

2) 许多概率分布的极限分布是正态分布. 例如,若 $X \sim B(n,p)$,则当 n 充分大时近似服从正态分布(棣莫弗 - 拉普拉斯定理).

3) 在相当广泛的条件下,大量独立同分布随机变量之和近似服从正态分布(列维 - 林德伯格定理).

四、随机变量函数的分布的求法

设 X 是一个随机变量,$y = g(x)$(一般 $g(x)$ 是已知的连续函数)是一个实函数,则 $Y = g(X)$ 也是一个随机变量. 所谓求随机变量 X 的函数的分布问题,就是由已知的随机变量 X 的概率分布去求得它的函数 $Y = g(X)$ 的概率分布或概率密度乃至分布函数. 这里 Y 是这样的随机变量,当 X 取值 x 时,Y 取值 $g(x)$.

(一) 离散型随机变量函数的分布的求法

设 X 是离散型随机变量,其概率分布为

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1,2,\cdots,$$

则随机变量 X 的函数 $Y = g(X)$ 取值 $g(x_i)$ 的概率为

$$P\{Y = g(x_i)\} = p_i, \quad i = 1,2,\cdots.$$

如果在函数值 $g(x_i)$ 中有相同的数值,则将它们相应的概率之和作为随机变量 $Y = g(X)$ 取该值的概率,就可以得到 $Y = g(X)$ 的概率分布.

(二) 连续型随机变量函数的分布的求法

设 X 为连续型随机变量,其分布函数、概率密度分别为 $F_X(x)$ 与 $f_X(x)$,随机变量 $Y = g(X)$ 是 X 的函数,则 Y 的分布函数或概率密度可用下面两种方法求得:

▶1. 定义法(分布函数法)

如果随机变量的函数 $Y = g(X)$ 是连续型的,最基本的方法是**分布函数法**,即先求出 Y 的分布函数

www.TopSage.com

$F_Y(y) = P\{g(X) \leqslant y\} = \int\limits_{g(x)\leqslant y} f(x)\mathrm{d}x$，其中$f(x)$是随机变量$X$的概率密度．然后将$F_Y(y)$关于$y$求导，一般能得到$Y$的概率密度．

▶2. 公式法

当$y = g(x)$是严格单调函数时可由如下方法求出Y的概率密度：设随机变量X具有概率密度$f_X(x)$，$-\infty < x < +\infty$，又设函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$)，则$Y = g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{2.16}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$h(y)$是$g(x)$的反函数．

若$f(x)$在有限区间$[a,b]$以外等于零，即X的概率密度为$\begin{cases} f_X(x), & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$则只需假设在$[a,b]$上恒有$g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$)，此时$\alpha = \min\{g(a), g(b)\}$，$\beta = \max\{g(a), g(b)\}$．

如果$y = g(x)$在不相重叠的区间上逐段严格单调，则分区间应用公式(2.16)求概率密度，即

$$f_Y(y) = \sum_k f_k(y),$$

其中 $f_k(y) = \begin{cases} f_X[h_k(y)]\,|h'_k(y)|, & \alpha_k < y < \beta_k, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $y = g(x)$在(a_k, b_k)上严格单调可导．

【注】 利用公式(2.16)直接写出$Y = g(X)$的概率密度时，要注意两点：第一，要检验函数$y = g(x)$是否是严格单调的(一般可利用导数$g'(x)$来检验)．如果不是严格单调的，那就不能用这一公式．第二，在公式中的$h'(y)$要取绝对值，如忘记取绝对值，那可能就会犯严重的错误．

▶3. 如果$Y = g(X)$是离散型的，首先确定Y的可能取值，而后通过计算概率$P\{Y = a\}$求得Y的概率分布．

【例 2.13】 随机变量X在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上服从均匀分布，令$Y = \sin X$，求随机变量$Y$的概率密度．

【解法一】 用分布函数法先求Y的分布函数$F_Y(y)$．由于X在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上服从均匀分布，因此$X$的概率密度$f_X(x)$与分布函数$F_X(x)$分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\sin X \leqslant y\}.$$

当$-1 < y < 1$时，$F_Y(y) = P\{X \leqslant \arcsin y\} = F_X(\arcsin y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin y$；

当$y \leqslant -1$时，$F_Y(y) = 0$；　当$y \geqslant 1$时，$F_Y(y) = 1$．

因此Y的概率密度为$f_Y(y)$为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

【解法二】 由于$y = \sin x$在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上是$x$的单调可导函数，其反函数$x = \arcsin y$存在、可导且

www.TopSage.com

导数恒不为零,因此可以直接用单调函数公式法求出 Y 的概率密度,在这里

$$h(y)=\arcsin y,\quad h'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

于是
$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|f_X[h(y)], & |y|<1,\\ 0, & |y|\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & |y|<1,\\ 0, & |y|\geqslant 1.\end{cases}$$

常考题型及其解题方法与技巧

题型一　确定随机变量概率分布中的未知参数

【例 2.14】 设离散型随机变量 X 只取 $-1,2,\pi$ 三个可能值,取各相应值的概率分别是 a^2, $-a$ 与 a^2,求 X 的分布函数.

【解】 应用离散型随机变量分布律的基本性质 $\sum\limits_i p_i=1$ 与 $p_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots$,有

$$2a^2-a=1\ \Rightarrow\ a=-\frac{1}{2},a=1(\text{舍去}).$$

则 X 的分布律与分布函数分别为

X	-1	2	π
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

与
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{4}, & -1\leqslant x<2,\\ \dfrac{3}{4}, & 2\leqslant x<\pi,\\ 1, & x\geqslant\pi.\end{cases}$$

【例 2.15】 若 ae^{-x^2+x} 为随机变量 X 的概率密度函数,则 $a=$ _____.

【分析】 依题意有 $\int_{-\infty}^{+\infty}ae^{-x^2+x}dx=1$,又

$$\int_{-\infty}^{+\infty}ae^{-x^2+x}dx=a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}dx=ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}dx$$
$$=ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=a\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}},$$

于是
$$a\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}}=1\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}.$$

评注 如果不熟悉泊松积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$,可以将被积函数配成标准正态密度来做,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\pi}.$$

【例 2.16】 已知连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}ae^x, & x<0,\\ \dfrac{b}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

大家网 TopSage.com
www.TopSage.com

又知 $EX = 0$,求 a,b 的值,并写出分布函数 $F(x)$.

【解】 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} a\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{b}{4}\mathrm{d}x = a + \frac{b}{2}$,

$0 = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} ax\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{b}{4}x\mathrm{d}x = -a + \frac{b}{2}$.

解方程组 $\begin{cases} a + \frac{b}{2} = 1, \\ -a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 1.$

于是 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, & 0 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$

【例 2.17】 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{8}, & x = -1, \\ ax + b, & -1 < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

已知 $P\{-1 < X < 1\} = \frac{5}{8}$,则 $a =$ _____,$b =$ _____,$f(x) =$ _____.

【分析】 由于 $F(x)$ 在任何一点都是右连续的,于是有 $F(-1+0) = F(-1)$,即

$$-a + b = \frac{1}{8}. \qquad ①$$

又因 $P\{X = 1\} = P\{-1 < X \leqslant 1\} - P\{-1 < X < 1\} = F(1) - F(-1) - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$,于是有

$$F(1-0) = F(1) - P\{X = 1\} = \frac{3}{4},$$

即

$$a + b = \frac{3}{4}. \qquad ②$$

联立 ① 与 ② 解得 $a = \frac{5}{16}, b = \frac{7}{16}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = -1, \\ \frac{5}{16}, & -1 < x < 1, \\ \frac{1}{4}, & x = 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

评注 若 $F(x)$ 为分段函数,则必须在分段点处考虑右连续.

【例 2.18】 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, 2^2)$,已知 $3P\{X \geqslant 1.5\} = 2P\{X < 1.5\}$,则 $P\{|X-1| \leqslant 2\}$ = _____.

【分析】 求正态分布随机变量 X 在某一范围内取值的概率,要知道分布参数 μ 与 σ,题设中已知 $\sigma = 2$,需先求出 μ.

$$P\{X < 1.5\} = \Phi\left(\frac{1.5-\mu}{2}\right), \quad P\{X \geqslant 1.5\} = 1 - \Phi\left(\frac{1.5-\mu}{2}\right).$$

www.TopSage.com

依题意，$1-\Phi\left(\frac{1.5-\mu}{2}\right)=\frac{2}{3}\Phi\left(\frac{1.5-\mu}{2}\right)\Rightarrow\Phi\left(\frac{1.5-\mu}{2}\right)=0.6$.

查标准正态分布表，可得$\frac{1.5-\mu}{2}=0.25\Rightarrow\mu=1$.

因 $X\sim N(1,2^2)$，所以$\frac{X-1}{2}\sim N(0,1)$，于是

$$P\{|X-1|\leqslant 2\}=P\left\{\left|\frac{X-1}{2}\right|\leqslant 1\right\}=2\Phi(1)-1=0.6826.$$

评注 确定分布中未知参数的解题方法是建立以所求参数为未知量的方程或方程组，从中解出所求参数．建立分布中未知参数的方程时常用等式有：

1° 分布函数 $F(x)$，离散型分布律 $\{p_i\}(i=1,2,\cdots)$，连续型概率密度 $f(x)$ 的性质：

① $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，$F(x)=F(x+0)$；

② 在 $F(x)$ 的连续点 x：$F(x)=F(x-0)=F(x+0)$；

③ $\sum_i p_i=1$，$0\leqslant p_i\leqslant 1$；

④ $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，$f(x)\geqslant 0$．

2° 根据题中所给一些具体条件列方程，如 $P\{a<X\leqslant b\}=p$，等等．

3° 随机变量分布参数与分布的数学特征间的关系式，特别是熟悉表 2.1 与表 2.2 所列有关常见分布的关系式等主要事记．

题型二　随机变量的概率分布

▶1. 分布函数与概率分布、概率密度之间的关系与转换

【解题思路】 已知 $\{p_i:i\geqslant 1\}$ 为概率分布，则分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i\}=\sum_{x_i\leqslant x}p_i$；已知概率密度 $f(x)$，则分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

反之，已知 X 的分布函数为 $F(x)$，那么首先要判断 X 是什么类型的随机变量，如果 $F(x)$ 是阶梯函数，则 X 为离散型的，X 可能取值 x_i 必为 $F(x)$ 的间断点，且 $p_i=P\{X=x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0)$．如果 $F(x)$ 是连续函数且除有限个点外，$F'(x)$ 存在且连续，则 X 是连续型随机变量，其密度函数 $f(x)=F'(x)$．除上述两种情况，X 常常是混合型的随机变量（既非离散型，又非连续型），上述转换在计算数字特征、求未知参数估计量以及求随机变量函数的分布时会常常遇到，务必掌握．

【例 2.19】 已知随机变量 X 的概率分布为

k	1	2	3
$P\{X=k\}$	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X\geqslant 2\}=\frac{3}{4}$，求未知参数 θ 及 X 的分布函数 $F(x)$.

【解】 由 $P\{X\geqslant 2\}=1-P\{X=1\}=1-\theta^2=\frac{3}{4}$，求得 $\theta=\pm\frac{1}{2}$．又 $P\{X=2\}=2\theta(1-\theta)\geqslant 0$，故取 $\theta=\frac{1}{2}$，从而得 X 的概率分布

k	1	2	3
$P\{X=k\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

于是 X 的分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{k\leqslant x}P\{X=k\}\ (\forall x\in R)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{3}{4}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & 3\leqslant x.\end{cases}$$

评注 离散分布函数不是连续函数时分段函数时，为保证其右连续性，自变量 x 分段小区间除第 1 个区间外，其余都是左闭右开的.

【例 2.20】 已知袋中有 3 个白球 2 个黑球，每次从袋中任取一球，记下它的颜色再将其放回，直到记录中出现 4 次白球为止. 试求抽取次数 X 的概率分布.

【解】 显然 X 可能取的值为 $4,5,\cdots,k,\cdots$，由于是有放回的取球，因此每次抽取“取到白球”的概率 p 不变，并且都是 $p=\frac{3}{5}$，又各次取球是相互独立的，因此根据伯努利概型得

$$P\{X=4\}=p^4,$$

$$P\{X=5\}=P\{\text{前 4 次抽取取到 3 个白球 1 个黑球，第 5 次取到白球}\}=C_4^3p^3(1-p)^{4-3}p=C_4^3(1-p)p^4,$$

同理 $$P\{X=6\}=C_5^3p^3(1-p)^{5-3}p=C_5^3(1-p)^{5-3}p^4,$$

$$P\{X=k\}=C_{k-1}^3(1-p)^{(k-1)-3}p^4=C_{k-1}^3(1-p)^{k-4}p^4,$$

故 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C_{k-1}^3(1-p)^{k-4}p^4$，其中 $k=4,5,\cdots$，且 $p=\frac{3}{5}$.

【例 2.21】 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比，用 X 表示原点到该点连线与 x 轴正方向的夹角，求 X 的概率密度.

【分析】 由图 2.1 看出，X 取值在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，由于 X 是一个连续型随机变量，我们通过它的分布函数 $F(x)$ 求其概率密度 $f(x)$.

【解】 设比例系数为 λ，而点落在半圆这个区域的概率为 1，它应等于比例系数 λ 与半圆面积 $\frac{1}{2}\pi a^2$ 的乘积，即 $\frac{1}{2}\pi a^2\lambda=1$，$\lambda=\frac{2}{\pi a^2}$. 因此，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，事件 $\{X\leqslant x\}$ 的概率是两个面积之比，其中分母为半圆面积 $\frac{1}{2}\pi a^2$；分子面积 S 是三角形 BOA 与扇形 ABC 的面积之和，即

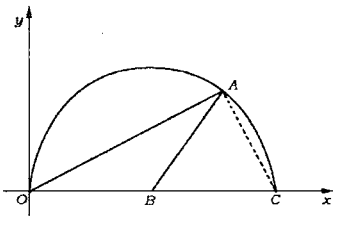


图 2.1

$$S=\frac{a^2}{2}(2x+\sin 2x).$$

因此，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\frac{S}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{\pi}(2x+\sin 2x).$$

www.TopSage.com

综上分析 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{\pi}(2x+\sin 2x), & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 1, & x\geqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

所求的 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(1+\cos 2x), & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

评注 ①如果本题仅求概率 $P\left\{X\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$，也就是求 $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$，在计算面积 S 时就非常简单了，它是一个等腰直角三角形与四分之一圆的面积之和.

②求连续型随机变量分布函数与概率密度，一般是先求其分布函数，即对于任何实数 x，计算概率 $P\{X\leqslant x\}$，关于这一点，有时并不是很容易的，本题中就要用到几何方面的基础知识.

【例 2.22】 设随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P\{X=0\}=\frac{1}{4}$，已知当 $X\neq 0$ 时，X 在其他取值范围内服从均匀分布，求 X 的分布函数 $F(x)$.

【解】 写出已知条件的数量关系，应用计算概率方法计算 $F(x)$. 依题意

$$P\{|X|\leqslant 1\}=P\{-1\leqslant X\leqslant 1\}=1,\quad P\{X=0\}=\frac{1}{4},\quad P\{X\neq 0\}=\frac{3}{4},$$

又除 0 点外，X 在其他取值范围内服从均匀分布，其落在不包含 0 点的子区间内的概率与该子区间的长度成正比，比例常数 $\lambda=\frac{3}{8}$，故有

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$；当 $-1\leqslant x<0$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}=\frac{3}{8}[x-(-1)]=\frac{3}{8}(x+1);$$

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X<0\}+P\{X=0\}+P\{0<X\leqslant x\}$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}(x-0)=\frac{3x+5}{8},$$

综上得 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{3x+3}{8}, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{3x+5}{8}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

评注 本题的随机变量既非连续型，又非离散型，在以往的考研试题中曾出现过.

▶2. 利用分布求概率或已知概率值求未知参数

【解题思路】 (1) 已知 X 的分布，则可以求出用 X 取值范围所表示的事件的概率.

1° 如果已知 X 的分布函数 $F(x)$，则 $P\{X\leqslant a\}=F(a)$，$P\{X<a\}=F(a-0)$，由此应用概率性质可以求得 X 在任一区间内的概率. 参见本章考核知识要点讲解之一、(二) 中的【注】.

2° 如果已知 X 的概率分布 p_i，则对实数轴上任意集合 B 有

$$P\{X\in B\}=\sum_{x_i\in B}P\{X=x_i\}.$$

3° 如果已知 X 的概率密度 $f(x)$ 则对实数轴上任意集合 B 有

www.TopSage.com

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx,$$

特别有 $P\{X = c\} = 0(\forall c \in R)$, $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,dx$.

(2) 已知某个事件的概率值求与其有关的未知参数,则只要写出与此事件有关的相应公式及概率,反解等式或不等式,即可求得未知参数(或其取值范围).

例 2.23 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} Ax, & 1 < x < 2, \\ B, & 2 \leqslant x < 3, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且 $P\{1 < X < 2\} = P\{2 < X < 3\}$,则常数 $A =$ _____;$B =$ _____;概率 $P\{2 < X < 4\} =$ _____;分布函数 $F(x) =$ _____.

【分析】 由于 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 Ax\,dx + \int_2^3 B\,dx = \frac{3}{2}A + B$,又 $P\{1 < X < 2\} = P\{2 < X < 3\}$,即 $\int_1^2 Ax\,dx = \int_2^3 B\,dx$,$\frac{3}{2}A = B$,解得 $A = \frac{1}{3}$,$B = \frac{1}{2}$,且

$$P\{2 < X < 4\} = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \int_1^x \frac{1}{3}t\,dt, & 1 \leqslant x < 2, \\ \int_1^2 \frac{1}{3}t\,dt + \int_2^x \frac{1}{2}\,dt, & 2 \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{6}(x^2 - 1), & 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{1}{2}(x - 1), & 2 \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3, \end{cases}$$

且 $P\{2 < X < 4\} = F(4 - 0) - F(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

例 2.24 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布,$P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$,则概率 $P\{0 < X^2 < 3\} =$ _____.

【分析】 已知 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k = 0,1,\cdots)$,由于 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$,即 $\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$,解得 $\lambda = 2$. 故 $P\{0 < X^2 < 3\} = P\{X = 1\} = 2e^{-2}$.

例 2.25 设有四个编号分别为 1,2,3,4 的盒子和三只球,现将每个球随机地放入四个盒子,记 X 为至少有一只球的盒子的最小号码.

(Ⅰ) 求 X 的分布律;

(Ⅱ) 若当 $X = k$ 时,随机变量 Y 在 $[0,k]$ 上服从均匀分布,$k = 1,2,3,4$,求 $P\{Y \leqslant 2\}$.

【解】 (Ⅰ) 随机变量 X 的可能取值为 1,2,3,4,设事件 A_i 表示第 i 个盒子是空的($k = 1,2,3,4$),则

$$P\{X = 1\} = 1 - P(A_1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{37}{64},$$

$$P\{X = 2\} = P(A_1\overline{A_2}) = P(A_1)P(\overline{A_2} \mid A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] = \frac{19}{64},$$

$$P\{X = 3\} = P(A_1A_2\overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(\overline{A_3} \mid A_1A_2)$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{7}{64},$$

$$P\{X = 4\} = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

www.TopSage.com

或 $$P\{X=4\}=1-\frac{37}{64}-\frac{19}{64}-\frac{7}{64}=\frac{1}{64}.$$

于是 X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	$\frac{37}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$

(Ⅱ) 由于当 $X=k$ 时,随机变量 Y 在 $[0,k]$ 上服从均匀分布,故

$$P\{Y\leqslant 2\mid X=1\}=P\{Y\leqslant 2\mid X=2\}=1,$$

$$P\{Y\leqslant 2\mid X=3\}=\frac{2}{3},\quad P\{Y\leqslant 2\mid X=4\}=\frac{2}{4}.$$

由全概率公式即得

$$P\{Y\leqslant 2\}=\sum_{k=1}^{4}P\{Y\leqslant 2,X=k\}=\sum_{k=1}^{4}P\{X=k\}P\{Y\leqslant 2\mid X=k\}$$
$$=\frac{37}{64}\times 1+\frac{19}{64}\times 1+\frac{7}{64}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{64}\times\frac{2}{4}=\frac{367}{384}.$$

【例 2.26】 已知随机变量 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,且方程 $x^2+x+Y=0$ 有实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则未知参数 $\mu=$ _____.

【分析】 已知 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,且 $P\{\text{方程有实根}\}=P\{1-4Y\geqslant 0\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}$,即

$$\Phi\left(\frac{\frac{1}{4}-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{4}-\mu=0\quad\Rightarrow\quad\mu=\frac{1}{4}.$$

【例 2.27】 设某地段在一个月内发生交通事故的次数 X 服从泊松分布,其中重大事故所占比例为 $\alpha(0<\alpha<1)$. 据统计资料,该地段在一个月内发生 8 次交通事故是发生 10 次交通事故概率的 2.5 倍,求该地段在一年内最多有一个月发生重大交通事故的概率(假定各月发生交通事故情况互不影响并设 $\alpha=0.05$).

【分析】 此题首先应该计算一个月内该地段发生重大交通事故次数 Y 的概率分布,据此可求出概率 $p=P\{Y=0\}$. 如果用 Z 表示一年内无重大交通事故的月份数,显然各个月是否有重大交通事故互不影响,因此 Z 服从二项分布 $B(12,p)$.

【解】 先确定 X 的分布参数 λ,由于 $P\{X=8\}=2.5P\{X=10\}$,即

$$\frac{\lambda^8}{8!}e^{-\lambda}=2.5\times\frac{\lambda^{10}}{10!}e^{-\lambda},\quad\lambda^2=\frac{90}{2.5}=36,\lambda=6(\text{负根舍去}).$$

用第一章【例 1.26】中的方法,我们可以计算出 Y 服从参数为 $\lambda\alpha$ 的泊松分布,即

$$P\{Y=m\}=\frac{(\lambda\alpha)^m}{m!}e^{-\lambda\alpha}=\frac{(0.3)^m}{m!}e^{-0.3}\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

一个月内无重大交通事故的概率 $p=P\{Y=0\}=e^{-0.3}$.

一年内最多有一个月发生重大交通事故就是一年内至少有 11 个月无重大交通事故,其概率为

$$P\{Z=11\}+P\{Z=12\}=C_{12}^{11}e^{-3.3}(1-e^{-0.3})+e^{-3.6}=0.142.$$

【例 2.28】 假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$,试求在 100 次独立重复测量中,至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α,并利用泊松定理求出 α 的近似值($e^{-5}=0.007$).

【解】 记事件 $A=$“100 次独立测量中至少有 3 次测量误差 X 的绝对值大于 19.6”=“100 次独立测量中,事件$\{|X|>19.6\}$ 至少发生 3 次”,依题意,所求 $\alpha=P(A)$. 如果记事件 $C=\{|X|>19.6\}$,Y 表示 100 次独立测量中事件 C 发生的次数,则事件 $A=\{Y\geqslant 3\}$,$Y\sim B(100,p)$,其中 $p=P(C)$.

www.TopSage.com

$$p = P(C) = P\{|X| > 19.6\} = 1 - P\{|X| \leqslant 19.6\}$$
$$= 1 - P\{-19.6 \leqslant X \leqslant 19.6\} = 1 - \left[\Phi\left(\frac{19.6}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-19.6}{10}\right)\right]$$
$$= 2[1 - \Phi(1.96)] = 2 \times 0.025 = 0.05,$$

因此所求的概率

$$\alpha = P(A) = P\{Y \geqslant 3\} = 1 - P\{Y < 3\}$$
$$= 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} - P\{Y = 2\},$$

其中 $P\{Y = k\} = C_{100}^{k} p^{k}(1-p)^{100-k} = C_{100}^{k} \times 0.05^{k} \times 0.95^{100-k}$.

由于 $n = 100$ 充分大，$p = 0.05$ 很小，$np = 100 \times 0.05 = 5$ 适中，显然满足泊松定理的条件，可见 Y 近似服从系数为 5 的泊松分布. 因此 $P\{Y = k\} \approx \frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$，其中 $\lambda = np = 5$，于是

$$\alpha \approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} - \frac{25}{2}e^{-5} = 1 - 18.5e^{-5} = 0.87.$$

题型三　求随机变量函数的分布

【例 2.29】 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 0.3, & -2 \leqslant x < -1, \\ 0.6, & -1 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

已知 $Y = \sin\frac{\pi X}{12}\cos\frac{\pi X}{12}$，求 $|Y|$ 的分布函数.

【分析】 显然 X 是离散型随机变量，$Y = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi X}{6}$ 也是离散型随机变量，要求 $|Y|$ 的分布函数，应先求出 $|Y|$ 的分布律，而 Y 又是 X 的函数，因此我们应通过 X 的分布律求解.

【解】 从 X 的分布函数 $F(x)$ 可知：X 只取 -2，-1 与 1 三个值，其概率分别为 0.3，0.3，0.4，因此随机变量 $Y = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi X}{6}$ 的取值为 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$，$-\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{4}$，其相应概率分别为 0.3，0.3 与 0.4. 因此 $|Y|$ 的分布律为 $P\left\{|Y| = \frac{1}{4}\right\} = 0.7$，$P\left\{|Y| = \frac{\sqrt{3}}{4}\right\} = 0.3$，$|Y|$ 的分布函数为

$$F_{|Y|}(y) = P\{|Y| \leqslant y\} = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{4}, \\ 0.7, & \frac{1}{4} \leqslant y < \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ 1, & y \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

评注 求随机变量函数的分布函数，关键是计算事件 $\{g(X) \leqslant y\}$ 的概率.

【例 2.30】 设离散型随机变量 X 服从参数为 $p(0 < p < 1)$ 的 0-1 分布.

(Ⅰ) 求 X 的分布函数 $F(x)$；(Ⅱ) 令 $Y = F(X)$，求 Y 的分布律及分布函数 $G(y)$.

【解】 (Ⅰ) $F(x) = P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

www.TopSage.com

(Ⅱ) $Y = F(X) = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ 1-p, & 0 \leqslant X < 1, \\ 1, & X \geqslant 1. \end{cases}$

$P\{Y = 0\} = P\{X < 0\} = 0,$

$P\{Y = 1-p\} = P\{0 \leqslant X < 1\} = P\{X = 0\} = 1-p,$

$P\{Y = 1\} = P\{X \geqslant 1\} = P\{X = 1\} = p,$

于是 Y 的分布律与分布函数分别为

$$Y \sim \begin{bmatrix} 1-p & 1 \\ 1-p & p \end{bmatrix}, \quad G(y) = \begin{cases} 0, & y < 1-p, \\ 1-p, & 1-p \leqslant y < 1, \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$$

【例 2.31】 已知随机变量 X 的分布函数 $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ 1-x^{-\lambda}, & x > 1 \end{cases} (\lambda > 0)$，$Y = \ln X$. (Ⅰ) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；(Ⅱ) 计算 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P\{Y \geqslant k\}$.

【解】 (Ⅰ) 由题设知 X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ \lambda x^{-\lambda-1}, & x > 1, \end{cases}$ 所以 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\ln X \leqslant y\} (y \in R).$$

由于 $P\{X > 1\} = 1$，故当 $y \leqslant 0$ 时 $F_Y(y) = 0$；当 $y > 0$ 时，

$$F_Y(y) = P\{1 < X < e^y\} = \int_1^{e^y} \lambda x^{-\lambda-1} dx = 1 - e^{-\lambda y}.$$

于是 $F_Y(y) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0, \end{cases}$ 故 $Y = \ln X$ 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

(Ⅱ) $P\{Y \geqslant k\} = \int_k^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = e^{-\lambda k}$，由于 $\lambda > 0, 0 < e^{-\lambda} < 1$，故

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{Y \geqslant k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} = 1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}.$$

【例 2.32】 已知随机变量 $X \sim N(0,1)$，求：(Ⅰ) $Y = \begin{cases} -1, & X < 1, \\ 1, & X \geqslant 1 \end{cases}$ 的分布函数；(Ⅱ) $Y = e^X$ 的概率密度；(Ⅲ) $Y = |X|$ 的概率密度. (结果可以用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

【解】 先用定义法求分布函数，而后再求概率密度.

(Ⅰ) 由题设知 Y 是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{Y = -1\} = P\{X < 1\} = \Phi(1)$，

$$P\{Y = 1\} = P\{X \geqslant 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - \Phi(1) = \Phi(-1),$$

故 Y 的分布函数

$$F(y) = P\{Y \leqslant y\} = \sum_{y_i \leqslant y} P\{Y = y_i\} = \begin{cases} 0, & y < -1, \\ P\{Y = -1\} = \Phi(1), & -1 \leqslant y < 1, \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$$

(Ⅱ) $Y = e^X$ 的分布函数 $F(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{e^X \leqslant y\}$，故

当 $y \leqslant 0$ 时，$F(y) = 0$；当 $y > 0$ 时，$F(y) = P\{X \leqslant \ln y\} = \Phi(\ln y)$，即

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ \Phi(\ln y), & y > 0, \end{cases}$$

www.TopSage.com

所以 $$f(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{y}\varphi(\ln y), & y>0\end{cases}=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln y)^2}, & y>0.\end{cases}$$

(Ⅲ)$Y=|X|$的分布函数$F(y)=P\{|X|\leqslant y\}$,当$y<0$时,$F(y)=0$;当$y\geqslant 0$时,

$$F(y)=P\{|X|\leqslant y\}=P\{-y\leqslant X\leqslant y\}=\Phi(y)-\Phi(-y)=2\Phi(y)-1,$$

即 $$F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 2\Phi(y)-1, & y\geqslant 0.\end{cases}$$

所以概率密度 $$f(y)=F'(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 2\Phi'(y), & y\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0,\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}, & y\geqslant 0.\end{cases}$$

【例 2.33】 设连续型随机变量X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 2\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{a}x\right)-\frac{2\sqrt{2}}{a}x\varphi\left(\frac{\sqrt{2}x}{a}\right)-1, & x>0,\end{cases}$$

其中$a>0$,$\Phi(x)$,$\varphi(x)$分别是标准正态分布的分布函数与概率密度,令$Y=\frac{1}{2}X^2$,求Y的密度函数.

【分析】 求一个随机变量函数Y的分布,如果Y是连续型,则求$Y=g(X)$的概率密度$f_Y(y)$的最基本方法是分布函数法;如果$y=g(x)$是关于x的单调可导函数且其导数恒不为零,则可用单调函数公式法求解$f_Y(y)$.

【解法一】 当$y\leqslant 0$时,$F_Y(y)=0$;当$y>0$时,

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{\frac{1}{2}X^2\leqslant y\right\}=P\{X\leqslant\sqrt{2y}\}=F_X(\sqrt{2y}).$$

所求Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ 2\Phi\left(\frac{2}{a}\sqrt{y}\right)-\frac{4\sqrt{y}}{a}\varphi\left(\frac{2\sqrt{y}}{a}\right)-1, & y>0.\end{cases}$$

将$F_Y(y)$对y求导数,得到Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{8\sqrt{y}}{a^3}\varphi\left(\frac{2\sqrt{y}}{a}\right), & y>0.\end{cases}$$

【解法二】 由于$y=\frac{1}{2}x^2$在区间$(0,+\infty)$内单调,其反函数$x=h(y)=\sqrt{2y}$在$(0,+\infty)$内可导,其导数$h'(y)=\frac{1}{\sqrt{2y}}\neq 0$.我们可以直接用单调函数的密度公式求$f_Y(y)$.

首先求出X的概率密度$f_X(x)$:当$x\leqslant 0$时,$f_X(x)=0$;当$x>0$时,

$$f_X(x)=\left[2\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{a}x\right)-\frac{2\sqrt{2}}{a}x\varphi\left(\frac{\sqrt{2}x}{a}\right)-1\right]'_x=\frac{4\sqrt{2}x^2}{a^3}\varphi\left(\frac{\sqrt{2}x}{a}\right),\text{于是}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ |h'(y)|f_X[h(y)], & y>0\end{cases}=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{8\sqrt{y}}{a^3}\varphi\left(\frac{2\sqrt{y}}{a}\right), & y>0.\end{cases}$$

【例 2.34】 已知随机变量X的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

(Ⅰ)求分布函数 $F(x)$;

(Ⅱ)若令 $Y = F(X)$,求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

【解】 直接应用 $F(x) = P\{X \leqslant x\}$,$F_Y(y) = P\{F(X) \leqslant y\}$ 求解.

(Ⅰ) $$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x t\,dt, & 0 \leqslant x < 1, \\ \int_0^1 t\,dt + \int_1^x (2-t)\,dt, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2x - 1 - \dfrac{x^2}{2}, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

(Ⅱ)令 $Y = F(X)$,则由 $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ 及 $F(x)$ 为 x 的单调不减连续函数知(如图 2.2),当 $y < 0$ 时 $F_Y(y) = 0$;当 $y \geqslant 1$ 时,$F_Y(y) = 1$;当 $0 \leqslant y < \dfrac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{F(X) \leqslant y\} \\ &= P\{F(X) \leqslant 0\} + P\{0 < F(X) \leqslant y\} \\ &= P\left\{0 < \frac{X^2}{2} \leqslant y\right\} = P\{0 < X \leqslant \sqrt{2y}\} \\ &= \frac{(\sqrt{2y})^2}{2} = y; \end{aligned}$$

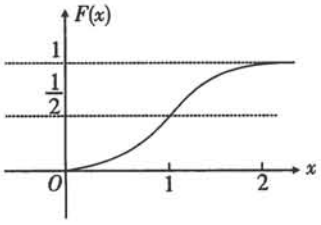


图 2.2

当 $\dfrac{1}{2} \leqslant y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{F(X) \leqslant y\} \\ &= P\{F(X) \leqslant 0\} + P\{0 < F(X) \leqslant \frac{1}{2}\} + P\left\{\frac{1}{2} < F(X) \leqslant y\right\} \\ &= 0 + P\{0 < X < 1\} + P\{1 < X \leqslant F^{-1}(y)\} \\ &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^{F^{-1}(y)} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \int_1^{F^{-1}(y)} dF(x) = \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} = y, \end{aligned}$$

综上得 $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leqslant y < 1, \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$$

【例 2.35】 设随机变量 X 服从指数分布,$EX = 5$,令 $Y = \min(X,2)$,求随机变量 Y 的分布函数 $F(y)$.

【解】 当 $X < 2$ 时,$Y = X < 2$;当 $X \geqslant 2$ 时,$Y = 2$. 因此随机变量 Y 的取值一定不小于 0 且不大于 2,即 $P\{0 \leqslant Y \leqslant 2\} = 1$. 由于 X 服从参数 $\lambda = \dfrac{1}{5}$ 的指数分布,因此当 $x > 0$ 时,$P\{X \leqslant x\} = 1 - e^{-\frac{x}{5}}$.

当 $0 \leqslant y < 2$ 时,$P\{Y \leqslant y\} = P\{\min(X,2) \leqslant y\} = P\{X \leqslant y\} = 1 - e^{-\frac{y}{5}}$.

于是,Y 的分布函数为 $F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\frac{y}{5}}, & 0 \leqslant y < 2, \\ 1, & y \geqslant 2. \end{cases}$

www.TopSage.com

评注　由于事件"$Y \leqslant 2$"是必然事件，因此当 $y = 2$ 时，$F(y) = F(2) = P\{Y \leqslant 2\} = 1$，特别注意的是，当 $y = 2$ 时，$F(y)$ 的左极限 $F(2-0) < 1$，即 $F(y)$ 在 $y = 2$ 有唯一间断点.

题型训练

一、选择题

1. 假设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y = \min\{X,2\}$ 的分布函数

(A) 是连续函数. (B) 至少有两个间断点. (C) 是阶梯函数. (D) 恰好有一个间断点.

2. 设 $f(x)$ 是连续型随机变量 X 的概率密度，则 $f(x)$ 一定是

(A) 可积函数. (B) 单调函数. (C) 连续函数. (D) 可导函数.

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu| < \sigma\}$ 应该

(A) 单调增大. (B) 单调减少. (C) 保持不变. (D) 增减不定.

4. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,4^2)$，$Y \sim N(\mu,5^2)$；记 $p_1 = P\{X \leqslant \mu - 4\}$，$p_2 = P\{Y \geqslant \mu + 5\}$，则

(A) $p_1 = p_2$. (B) $p_1 > p_2$.

(C) $p_1 < p_2$. (D) 因 μ 未知，无法比较 p_1 与 p_2 的大小.

5. 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$，$Y = -2X + 3$，则 Y 的密度函数为

(A) $-\frac{1}{2}f_X\left(-\frac{y-3}{2}\right)$. (B) $\frac{1}{2}f_X\left(-\frac{y-3}{2}\right)$.

(C) $-\frac{1}{2}f_X\left(-\frac{y+3}{2}\right)$. (D) $\frac{1}{2}f_X\left(-\frac{y+3}{2}\right)$.

6. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别是随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数，为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取

(A) $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$. (B) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$.

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$. (D) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

二、填空题

1. 设离散型随机变量 X 的概率函数为 $P\{X = i\} = p^{i+1}, i = 0,1$，则 $p =$ _____.

2. 设离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.4, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0.7, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$ 则随机变量 $|X|$ 的分布函数为_____.

3. 假设 X 是在区间 $(0,1)$ 内取值的连续型随机变量，而 $Y = 1 - X$. 已知 $P\{X \leqslant 0.29\} = 0.75$，则满足 $P\{Y \leqslant k\} = 0.25$ 的常数 $k =$ _____.

4. 设 $f(x) = ke^{-x^2+2x-3}\ (-\infty < x < \infty)$ 是一概率密度，则 $k =$ _____.

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{2}{9}, & 3 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 若 k 满足概率等式 $P\{X \geqslant k\} = \frac{2}{3}$，则 k 的取值范围是_____.

www.TopSage.com

6. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，已知 $P\{X \leqslant 3\} = 0.975$，则 $P\{X \leqslant -0.92\} =$ _____.

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma > 0)$，且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 0.5，则 $\mu =$ _____.

8. 设 $F(x)$ 是连续型随机变量 X 的分布函数，常数 $a > 0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} [F(x+a) - F(x)]\mathrm{d}x =$ _____.

三、解答题

1. 袋中装有大小相同的 10 只球，编号为 0,1,2,…,9．从中任取一只，观察其号码，按“大于 5”，“等于 5”，“小于 5” 三种情况定义一个随机变量 X，并写出 X 的分布律和分布函数．

2. 设随机变量 X 在(0,1) 上服从均匀分布，现有一常数 a，任取 X 的四个值，已知至少有一个大于 a 的概率为 0.9，问 a 是多少？

3. 将三封信随机地投入编号为 1,2,3,4 的四个邮箱，求没有信的邮箱数 X 的概率函数．

4. 设随机变量 X 服从 $[a,a+2]$ 上的均匀分布，对 X 进行 3 次独立观测，求最多有一次观测值小于 $a+1$ 的概率．

5. 设某一设备由三大部件构成，设备运转时，各部件需调整的概率分别为 0.1,0.2,0.3，若各部件的状态相互独立，求同时需调整的部件数 X 的分布函数．

6. 设随机变量 X 服从(0,1) 上的均匀分布，求下列函数的密度函数：

(Ⅰ) $Y_1 = \mathrm{e}^X$；　(Ⅱ) $Y_2 = -2\ln X$；　(Ⅲ) $Y_3 = \dfrac{1}{X}$；　(Ⅳ) $Y_4 = X^2$．

7. 设 $f(x)$ 是非负随机变量的概率密度，求 $Y = \sqrt{X}$ 的概率密度．

8. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，令 $Y = |X|$，求 Y 的概率密度．

9. 某个人参加跳高项目的及格选拔赛，规定一旦跳过指定高度就被认为及格而被入选，但是限制每人最多只能跳 6 次．若 6 次均未过竿，则认定其为落选．如果一位参试者在该指定高度的过竿率为 0.6，求他在测试中所跳次数的概率分布．

10. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，$G(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上均匀分布的分布函数，证明随机变量 $Y = G(X)$ 的概率分布不是区间 $[0,1]$ 上的均匀分布．

www.TopSage.com

第三章　多维随机变量及其分布

内容概要与重难点提示

对于多维随机变量应理解随机变量及其分布的概念和性质．在多维随机变量中，二维随机变量是基础，其很多结论都可以推广到多维随机变量．对于二维随机变量，不仅应理解二维随机变量联合分布函数的概念与性质，而且还要理解二维离散型随机变量的联合概率分布、边缘分布、条件分布和二维连续型随机变量的联合概率密度、边缘密度和条件密度．其中条件分布是一个较复杂的概念，要注意其取值范围．二维均匀分布及二维正态分布是两个常见分布，特别是二维均匀分布更应熟练掌握．

随机变量的相互独立性是概率论中的重要概念，理解随机变量的独立性及不相关的概念，掌握离散型和连续型随机变量独立的条件与判定方法．

求两个及多个相互独立随机变量的简单函数的分布是近年经常考查的内容，重点是两个连续型随机变量函数的分布函数与概率密度的计算．

有关二维连续型随机变量及其函数的分布，在解题时经常涉及二重积分．熟练、准确地计算二重积分对于计算连续型随机变量函数的分布和与二维随机变量相关事件的概率是很有必要的．

考核知识要点讲解

一、二维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数

（一）二维随机变量的联合分布函数

▶1. 二维随机变量的联合分布函数的概念

设(X,Y)是二维随机变量，则对于任意实数x,y，二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\leqslant x)\cap(Y\leqslant y)\}\xlongequal{\text{记成}}P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

称为二维随机变量(X,Y)的**分布函数**，或称为随机变量X和Y的**联合分布函数**．

【注】 由于$F(x,y)$是事件$A=\{X\leqslant x\}$与$B=\{Y\leqslant y\}$同时发生的概率，因此$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，更为重要的是，可以利用概率及其有关的性质、公式求分布函数，讨论分布函数的性质等等．

▶2. 二维随机变量的联合分布函数的性质

(1)$F(x,y)$是变量x和y的不减函数，即对于任意固定的y，当$x_2>x_1$时，$F(x_2,y)\geqslant F(x_1,y)$；对于任意固定的$x$，当$y_2>y_1$时，$F(x,y_2)\geqslant F(x,y_1)$．

(2)$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且对于任意固定的$y$，$F(-\infty,y)=0$；对于任意固定的$x$，$F(x,-\infty)=0$；$F(-\infty,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$．

(3)$F(x+0,y)=F(x,y)$，$F(x,y+0)=F(x,y)$，即$F(x,y)$关于x和y均右连续．

(4) 随机点(X,Y)落在矩形域$G=\{(x,y)\mid x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}$上的概率为

$$\begin{aligned}P\{(X,Y)\in G\}&=P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}\\&=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2).\end{aligned}\tag{3.1}$$

【例3.1】 已知随机变量X与Y独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，记$Z=\max(X,Y)$，则$(X,$

www.TopSage.com

Z) 的联合分布函数 $F(x,z)$ = _____.

【分析】 已知 X 与 Y 独立且有相同分布 $F(x)$,故 (X,Z) 的联合分布函数

$$F(x,z) = P\{X \leqslant x, \max(X,Y) \leqslant z\} = P\{X \leqslant x, X \leqslant z, Y \leqslant z\}$$

$$= P\{X \leqslant x, X \leqslant z\} \cdot P\{Y \leqslant z\} = \begin{cases} P\{X \leqslant x\}P\{Y \leqslant z\}, & x \leqslant z, \\ P\{X \leqslant z\}P\{Y \leqslant z\}, & x > z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x)F(z), & x \leqslant z, \\ F^2(z), & x > z. \end{cases}$$

(二) 二维随机变量的边缘分布函数

二维随机变量 (X,Y) 作为一个整体,具有分布函数 $F(x,y)$. 而 X 和 Y 都是随机变量,各自也有分布函数,将它们分别记为 $F_X(x)$,$F_Y(y)$,依次称为二维随机变量 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘分布函数**. 边缘分布函数可以由 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ 所确定,事实上,

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty);$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X < +\infty, Y \leqslant y\} = F(+\infty, y).$$

【注】 对于 (X,Y) 而言,由 (X,Y) 的分布可以确定关于 X、关于 Y 的边缘分布. 反之,由关于 X 和关于 Y 的边缘分布一般是不能确定 (X,Y) 的分布的. 只有当 X,Y 相互独立时,由两边缘分布能确定 (X,Y) 的分布.

二、二维离散型随机变量

(一) 二维离散型随机变量的联合概率分布的概念及其性质

▶1. 二维离散型随机变量的联合概率分布的概念

如果二维随机变量 (X,Y) 全部可能取到的不相同的值是有限对或可列对,则称 (X,Y) 是**离散型的随机变量**. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 所有可能取的值为 (x_i,y_j),如果 (X,Y) 取值 (x_i,y_j) 的概率为 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, (i,j = 1,2,\cdots)$,则称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad (i,j = 1,2,\cdots)$$

为二维离散型随机变量 (X,Y) 的**分布律**,或称为随机变量 X 和 Y 的**联合概率分布**. 用表格表示为

X \ Y (p_{ij})	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$	$p_{m\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot n}$	$\cdots$	1

▶2. 二维离散型随机变量的联合概率分布(或联合分布律)的性质

(1) $p_{ij} \geqslant 0, i,j = 1,2,\cdots$; (2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

（二）二维离散型随机变量的联合分布函数、边缘分布及条件分布

▶1. 二维离散型随机变量的联合分布函数

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，则(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}p_{ij}, \tag{3.2}$$

其中和式是对一切满足$x_i\leqslant x,y_j\leqslant y$的$i,j$来求和的，它是左下角四分之一平面上$(X,Y)$所有可能取值的概率的和.

设G是平面上的某个区域，则

$$P\{(X,Y)\in G\}=\sum_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}. \tag{3.3}$$

它表明：(X,Y)落入G的概率，等于(X,Y)在G内所有可能取值的概率的和.这是计算概率、求随机变量函数分布的重要公式.

▶2. 二维离散型随机变量的边缘概率分布

二维离散型随机变量(X,Y)关于X与Y的**边缘概率分布**或**边缘分布律**分别定义为：

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots \tag{3.4}$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots \tag{3.5}$$

其中，记号$p_{i\cdot}$中的“$\cdot$”表示$p_{i\cdot}$是由p_{ij}关于j求和后得到的；同样，$p_{\cdot j}$是由p_{ij}关于i求和后得到的，即它们分别为联合分布律表格中第i行与第j列诸元素之和.

依据边缘分布函数的定义，有

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i\}=\sum_{x_i\leqslant x}p_{i\cdot},$$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=\sum_{y_j\leqslant y}P\{Y=y_j\}=\sum_{y_j\leqslant y}p_{\cdot j}.$$

【注】 边缘分布事实上是随机变量(X,Y)的分量的分布，这个分量的边缘分布不再与其他分量有任何牵连了，这一点请考生务必注意.

▶3. 二维离散型随机变量的条件概率分布

(1) 设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad(i=1,2,\cdots) \tag{3.6}$$

为在“$Y=y_j$”的条件下随机变量X的条件分布律.

(2) 同样，对于固定的i，若$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}>0$，则称

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad(j=1,2,\cdots) \tag{3.7}$$

为在“$X=x_i$”的条件下随机变量Y的条件分布律.

【例3.2】 已知X,Y的概率分布分别为$P\{X=1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y=1\}=\frac{3}{4}$，$P\{Y=0\}=\frac{1}{4}$，且$P\{XY=1\}=\frac{1}{2}$，则$P\{X=Y\}=$

www.TopSage.com

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{2}{4}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) 1.

【分析】 本题考查联合分布与边缘分布的关系. 由题设知 $P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}$, 又已知 X,Y 的分布,从而可求出下表中用黑体表示的数字,得 (X,Y) 的概率分布

X \ Y	0	1	$P\{X=i\}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P\{Y=j\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

所以, $P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, 故选(C).

【例 3.3】 设二维离散型随机变量只取 $(-1,-1),(-1,0),(1,-1),(1,1)$ 四个值,其相应概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{4}$.

(Ⅰ) 求 (X,Y) 的联合概率分布;

(Ⅱ) 求关于 X 与关于 Y 的边缘概率分布;

(Ⅲ) 求在 $Y=1$ 条件下关于 X 的条件分布与在 $X=1$ 条件下关于 Y 的条件分布.

【解】 (Ⅰ) 依题意, (X,Y) 的联合概率分布如下表所示.

X \ Y	-1	0	1	$P\{X=i\}$
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
$P\{Y=j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

(Ⅱ) 关于 X 与关于 Y 的边缘概率分布分别为表中最右一列与最下一行.

(Ⅲ) 由于 $P\{X=1\}=\frac{5}{12}$, $P\{Y=1\}=\frac{1}{4}$, 且在 $Y=1$ 条件下, X 只取 1, 因此关于 X 的条件概率分布为

$$P\{X=1\mid Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{1/4}{1/4}=1;$$

在 $X=1$ 条件下, Y 取 -1 和 1 两个值,其条件概率分布为

$$P\{Y=-1\mid X=1\}=\frac{2}{5};\quad P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{3}{5}.$$

评注 求二维离散型随机变量的联合概率分布,无非就是先找出 (X,Y) 的所有可能取值,而后分别求各个值上的取值概率.

www.TopSage.com

三、二维连续型随机变量

(一) 二维连续型随机变量的联合概率密度的概念及其性质

▶1. 二维连续型随机变量的联合概率密度的概念

设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$,如果存在非负的函数$f(x,y)$使对于任意x,y,有

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称(X,Y)为**二维连续型随机变量**,称函数$f(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的**概率密度**,或称为随机变量X和Y的**联合概率密度**.

▶2. 二维连续型随机变量的联合概率密度的性质

(1) $f(x,y) \geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty) = 1$.

(二) 二维连续型随机变量的联合分布函数、边缘概率密度和条件概率密度

▶1. 二维连续型随机变量的联合分布函数

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$,联合密度函数为$f(x,y)$,则

(1) $F(x,y)$为(x,y)的二元连续函数,且

$$F(x,y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

(2) 设G为平面上某个区域,则点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_{G} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.8}$$

【注】 公式(3.8)常用来计算随机变量的不等式成立的概率,例如:

$$P\{Y \leqslant X\} = P\{(X,Y) \in G\} = \iint_{G} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中,G为半平面$y \leqslant x$.公式(3.8)也是求随机变量函数分布的依据.

(3) 若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.

(4) 如果$F(x,y)$连续、可导,则(X,Y)是连续型的,$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$是它的一个概率密度.

▶2. 二维连续型随机变量的边缘概率密度

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,由于

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u,$$

由第二章(2.1)式可知,X是连续型随机变量,且其概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.9}$$

同理,Y也是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

www.TopSage.com

则分别称 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘概率密度**.

▶3. 二维连续型随机变量的条件概率密度(条件密度函数)

(1) 设 $(X,Y) \sim f(x,y)$,若对于固定的 y,边缘概率密度 $f_Y(y) > 0$,则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y = y$ 的条件下 X 的**条件概率密度**,记为

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}. \tag{3.11}$$

(2) 同样,设 $f_X(x) > 0$,则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为在 $X = x$ 的条件下 Y 的**条件概率密度**,记为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}. \tag{3.12}$$

【注】 在求条件概率密度时应该注意定义域:确保作为条件的边缘概率密度是大于 0 的,因此要除去边缘概率等于 0 的点.

(3) **密度乘法公式**

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) \quad (f_X(x) > 0) \\ &= f_Y(y) f_{X|Y}(x \mid y) \quad (f_Y(y) > 0). \end{aligned} \tag{3.13}$$

【例 3.4】 已知 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y) = g(x)h(y)$,其中 $g(x) \geqslant 0, h(y) \geqslant 0, a = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x, b = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\mathrm{d}y$ 存在且不为零,则 X 与 Y 独立,其密度函数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为

(A) $f_X(x) = g(x), f_Y(y) = h(y)$.　　(B) $f_X(x) = ag(x), f_Y(y) = bh(y)$.

(C) $f_X(x) = bg(x), f_Y(y) = ah(y)$.　　(D) $f_X(x) = g(x), f_Y(y) = abh(y)$.

【分析】 显然我们需要通过联合密度函数计算边缘密度函数来确定正确选项. 由于

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)\mathrm{d}y = bg(x),$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)\mathrm{d}x = ah(y),$$

又

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\mathrm{d}y = ab,$$

所以 $f(x,y) = g(x)h(y) = abg(x)h(y) = bg(x)ah(y) = f_X(x)f_Y(y)$, X 与 Y 独立,故选(C).

【例 3.5】 设 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-x-y-\lambda xy}, & x,y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数 $\lambda > 0$,试求 X 与 Y 的边缘分布函数.

【解】 当 $x > 0$ 时,$F_X(x) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x\} = F(x, +\infty) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$;当 $x \leqslant 0$ 时,$F_X(x) = 0$,因此关于 X 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

类似地,关于 Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

课注 本例中的两个边缘分布都是参数为 1 的指数分布,它们均与参数 λ 无关,但是当 λ 取不同值时,二维随机变量 (X,Y) 的联合分布也不相同,这说明相同的边缘分布可以对应不同的联合分布,即仅仅知道 X,Y 的两个边缘分布不能完全确定 (X,Y) 的联合分布,在后面由(3.14)式定义的

二维正态分布中对于参数 ρ 的不同取值所对应的不同联合分布可以有相同的边缘分布 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2$. 由此可以看出 (X,Y) 的联合分布不仅能完全反映出每个分量 X,Y 的分布规律，还能反映两个分量 X 与 Y 之间关系的信息.

四、两个常见的二维连续型随机变量的分布

(一) 二维均匀分布

▶1. 均匀分布的概念

设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A. 若二维随机变量 (X,Y) 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 (X,Y) 在区域 G 上服从**均匀分布**.

特别，若 $G=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 是一个矩形区域，则 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

▶2. 均匀分布的性质

(1) 服从区域 G 上均匀分布的随机变量 (X,Y)，它在 G 上任何一个子区域 $D(D\subset G)$ 内取值的概率只与该子区域的面积 S_D 的大小有关，而与该子区域 D 在 G 内的位置和形状无关，即

$$\boldsymbol{P}\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{(x,y)\in D}\frac{1}{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{A}S_D.$$

(2) 二维均匀分布的边缘分布、条件分布以及数字特征都与区域 G 的形状密切相关. 例如，圆形区域 $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$，则区域 G 上的二维均匀分布的两个边缘分布都不是均匀分布，而其中一个变量关于另一个变量的条件分布都是均匀分布. 再如矩形区域 $G=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant x\leqslant d\}$，则二维均匀分布的两个边缘分布分别为区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上的一维均匀分布.

【例 3.6】 设二维随机变量 (X,Y) 在 xOy 平面上由直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成的区域上服从均匀分布，则 $\boldsymbol{P}\left\{0<X<\dfrac{1}{2},0<Y<\dfrac{1}{2}\right\}=$ _____.

【分析】 由直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成的区域面积为 $A=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}$，所以 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是 $$\boldsymbol{P}\left\{0<X<\frac{1}{2},0<Y<\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

(二) 二维正态分布

▶1. 二维正态分布的概念

如果二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

www.TopSage.com

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},\tag{3.14}$$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$的**二维正态分布**,记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$均为常数且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$.

如果二维随机变量(X,Y)的联合分布是二维正态分布,也称(X,Y)是一个**二维正态变量**.由(X,Y)的联合分布可以求得X,Y的密度函数,即X,Y的边缘密度函数.

▶2. 二维正态分布中参数的概率意义

二维正态分布中5个参数的概率意义分别为:$\mu_1=EX,\mu_2=EY,\sigma_1^2=DX,\sigma_2^2=DY$,而$\rho$则是$X$与$Y$的相关系数,即$\rho=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$.

▶3. 二维正态分布的性质

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,则

(1) 二维正态分布(X,Y)的两个边缘分布——X的分布和Y的分布都是一维正态分布,即$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

【注】 该命题的逆命题不成立:即便X和Y都服从正态分布,甚至X和Y的相关系数等于0,X和Y的联合分布也未必是二维正态分布.例如,设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1+\sin x\sin y}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\quad(-\infty<x,y<+\infty),$$

由边缘密度的公式及被积函数的奇偶性可算得$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$,$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$,可见$f_X(x)$和$f_Y(y)$都是标准正态密度函数.这一例子说明边缘分布不能唯一决定它们的联合分布,即两个边缘分布都是正态分布的二维随机变量,它们的联合分布不仅是不唯一确定的,而且还可以不是一个二维的正态分布.当然,若X和Y都服从正态分布并且相互独立,则X和Y的联合分布一定是二维正态分布.

(2) 两个正态分布随机变量X与Y的任意线性组合$aX+bY$(a,b为任意实数,且不全为0)仍服从正态分布,且

当X与Y独立时,$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$;

当X与Y不独立时,$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$.

(3) 两个正态分布随机变量X与Y相互独立的充分必要条件是它们的相关系数$\rho=0$.换句话说,对于联合分布是二维正态分布的X和Y,独立与不相关等价.

【例3.7】 设$(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则$P\{X<Y\}=$_____.

【分析一】 $$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2+(y-\mu)^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal[y-\mu=\rho\sin\theta]{x-\mu=\rho\cos\theta}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}.$$

【分析二】 由$\rho=0$可知,X与Y独立,从而有$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$,根据对称性,有

$$P\{X-Y<0\}=\frac{1}{2}.$$

评注 注意到(X,Y)中X与Y的对称性,则也有$P\{X<Y\}=P\{X>Y\}=\dfrac{1}{2}$,因此$P\{X=Y\}=0$.

TopSage.com

五、二维随机变量的独立性

(一) 独立性的概念

设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x),F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数. 如果对于任意的 x,y,都有

$$P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant x\}P\{Y \leqslant y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \tag{3.15}$$

则称随机变量 X 与 Y **相互独立**.

(二) 相互独立的充分必要条件与性质

▶1. 相互独立的充要条件

(1) 对于**二维离散型随机变量** (X,Y),随机变量 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}, \text{即 } p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}. \tag{3.16}$$

(2) 对于**二维连续型随机变量** (X,Y),随机变量 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \tag{3.17}$$

其中 (x,y) 为 $f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$ 的连续点.

▶2. 相互独立的性质

(1) 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立,则其中任意 $k(2 \leqslant k \leqslant m)$ 个随机变量也相互独立.

(2) 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立,则它们的函数 $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_m(X_m)$ 也相互独立.

(3) 若两个随机变量独立,则一个关于另一个的条件分布就是其无条件分布. 即:对于二维离散型随机变量 (X,Y),若 X 与 Y 独立,则条件分布等于其边缘分布;对于二维连续型随机变量 (X,Y),若 X 与 Y 独立,则条件密度等于其边缘密度.

【例 3.8】 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为

X \ Y	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

试求:(Ⅰ) X 与 Y 的边缘分布律,并判断 X 与 Y 是否相互独立; (Ⅱ) $P\{X = Y\}$.

【解】 (Ⅰ) 由于边缘分布律就是联合分布律表格中行或列中诸元素之和,所以

$$p_{1\cdot} = p_{2\cdot} = p_{3\cdot} = p_{4\cdot} = \frac{1}{4}; \qquad p_{\cdot 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{25}{48};$$

$$p_{\cdot 2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{13}{48}; \qquad p_{\cdot 3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{7}{48}; \qquad p_{\cdot 4} = \frac{1}{16}.$$

www.TopSage.com

假如随机变量 X 与 Y 相互独立，就应该对任意的 i,j，都有 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，而本题中 $p_{14}=0$，但是 $p_{1\cdot}$ 与 $p_{\cdot 4}$ 均不为零，所以 $p_{14}\neq p_{1\cdot}p_{\cdot 4}$，故 X 与 Y 不是相互独立的.

(Ⅱ) $P\{X=Y\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}$.

评注 在本题判断 X 与 Y 不相互独立时，我们所选的是 $p_{14}=0$，这个方法对于判断离散型随机变量不相互独立是常用的，一般说边缘分布律 $p_{i\cdot}$ 与 $p_{\cdot j}$ 均不为零，如果某个 $p_{ij}=0$，则可判断这两个随机变量不是相互独立的.

六、两个随机变量函数的分布

(一) 两个随机变量函数的概念

设 X,Y 为随机变量，$g(x,y)$ 是二元函数，则以随机变量 X,Y 作为变量的函数 $U=g(X,Y)$ 也是随机变量，称之为**随机变量 X,Y 的函数**. 例如 $U=X+Y;U=XY;U=\begin{cases}1, & X<Y,\\ 0, & X\geqslant Y,\end{cases}$ 等等.

我们的问题是：已知 (X,Y) 的联合分布，求 $U=g(X,Y)$ 的分布；又 $V=\varphi(X,Y)$，求 (U,V) 的联合分布.

(二) 二维离散型随机变量函数的分布的求法

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，联合分布为 $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$，则

(1) $U=g(X,Y)$ 也是离散型随机变量，其分布律为 $P\{U=g(x_i,y_j)\}=P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，即

$$U\sim\begin{pmatrix} g(x_1,y_1) & g(x_1,y_2) & \cdots\\ p_{11} & p_{12} & \cdots\end{pmatrix}.$$

如果有若干个 $g(x_i,y_j)$ 相同，则合并诸项为一项，并将相应的概率相加作为 U 取值为 $g(x_i,y_j)$ 的概率.

U 的分布函数为

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{g(X,Y)\leqslant u\}=\sum_{g(x_i,y_j)\leqslant u}P\{X=x_i,Y=y_j\}.$$

(2) 如果 $U=g_1(X,Y),V=g_2(X,Y)$，则 (U,V) 为二维离散型随机变量，求 (U,V) 联合分布的方法有：

方法 1° 直接法. 直接计算

$$P\{U=a,V=b\}=\sum_{\substack{g_1(x_i,y_j)=a\\ g_2(x_i,y_j)=b}}P\{X=x_i,Y=y_j\}.$$

方法 2° 边缘分布与条件分布法. 首先求出 U,V 的边缘分布律，再求得 (U,V) 的联合分布的部分值，最后通过边缘分布与联合分布的关系(即(3.4)与(3.5)式)求得 (U,V) 的联合分布律. 若已知条件分布，则应用(3.6)式与(3.7)式求联合分布.

【例 3.9】 设随机变量 $X\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$，$Y\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$，且 $P\{|X|\neq|Y|\}=1$.

(Ⅰ) 求 X 与 Y 的联合分布律，并讨论 X 与 Y 的独立性；

(Ⅱ) 令 $U=X+Y,V=X-Y$，讨论 U 与 V 的独立性.

www.TopSage.com

【解】 (Ⅰ)由 $P\{|X|\neq|Y|\}=1$ 知,$P\{|X|=|Y|\}=0$. 由此可得 X 与 Y 的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1	
-1	0	3/8	0	3/8
0	1/8	0	3/8	1/2
1	0	1/8	0	1/8
	1/8	1/2	3/8	1

因为 $P\{X=-1,Y=-1\}\neq P\{X=-1\}P\{Y=-1\}$,所以 X 与 Y 不独立.

(Ⅱ)由 (X,Y) 的联合分布律知

$$P\{U=V=-1\}=P\{X=-1,Y=0\}=\frac{1}{8},$$

$$P\{U=-1,V=1\}=P\{X=0,Y=-1\}=\frac{3}{8},$$

$$P\{U=1,V=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{8},$$

$$P\{U=V=1\}=P\{X=1,Y=0\}=\frac{3}{8},$$

故 U 与 V 的联合分布律与边缘分布律为

V \ U	-1	1	
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

可验证 U 与 V 独立.

(三)二维连续型随机变量函数的分布的求法

设 (X,Y) 是二维连续型随机变量,其联合密度函数为 $f(x,y)$.

(1)如果 $U=g(X,Y)$ 是离散型随机变量,则 U 的分布为

$$P\{U=u_i\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad (i=1,2,\cdots),$$

其中 $D=\{(x,y):g(x,y)=u_i\}$.

(2)如果 $U=g(X,Y)$ 是连续型随机变量,则要先求其分布函数 $F_U(u)$,再求其密度函数 $f_U(u)$.

(3)如果 $U=g_1(X,Y)$,$V=g_2(X,Y)$,求 $Z=(U,V)$ 的分布的具体方法如下:

1)(U,V) 的联合分布函数

$$F_Z(z)=P\{g_1(X,Y)\leqslant u,\ g_2(X,Y)\leqslant v\}=\iint\limits_{\substack{g_1(x,y)\leqslant u\\ g_2(x,y)\leqslant v}} f(x,y)\,dxdy.$$

www.TopSage.com

2) 若(U,V)是二维离散型随机变量,则求(U,V)的联合分布的常用方法是:

方法 1° 直接计算法. 计算

$$P\{U=u_i,V=v_j\}=P\{g_1(X,Y)=u_i,g_2(X,Y)=v_j\}=P\{(X,Y)\in D\}$$

$$=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$D=\{(x,y):g_1(x,y)=u_i,g_2(x,y)=v_j\}$.

方法 2° 边缘分布法. 分别求出U、V的分布,然后求出某些联合分布的值,最后应用联合分布与边缘分布的关系求得联合分布.

3) 若(U,V)是二维连续型随机变量,则可应用1)中的方法先求(U,V)的联合分布函数,再求其概率密度,或应用密度乘法公式(3.13)求得联合密度函数.

(四) 几个常用简单二维连续型随机变量函数的分布的求法

▶1. $Z=X+Y$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\,\mathrm{d}y, \tag{3.18}$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.19}$$

特别,当X和Y相互独立时,设它们的概率密度分别为$f_X(x)$,$f_Y(y)$,则(3.18)、(3.19)分别化为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y, \tag{3.20}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

公式(3.20)与(3.21)称为**卷积公式**,常记为f_X*f_Y,即

$$f_X*f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.22}$$

【注】 被积函数变元之和$x+z-x=z-y+y=z$.

▶2. $Z=X-Y$,$Z=Y-X$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z_1=X-Y$的概率密度为

$$f_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+z,x)\,\mathrm{d}x\overset{\text{独立}}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x+z)f_Y(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

$Z_2=Y-X$的概率密度为

$$f_2(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x+z)\,\mathrm{d}x\overset{\text{独立}}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x+z)\,\mathrm{d}x. \tag{3.24}$$

【注】 被积函数变元之差$x+z-x=z$.

▶3. $Z=XY$ 的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x,y)$,则$Z=XY$仍为连续型随机变量,其概率密度为

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x. \tag{3.25}$$

【注】 (3.25)式中被积函数第一变元与第二变元之积$x\cdot\frac{z}{x}=z$.

www.TopSage.com

又若 X 和 Y 相互独立. 设 (X,Y) 关于 X,关于 Y 的边缘密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,则(3.25)式化为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x. \tag{3.26}$$

▶4. $Z = \max\{X,Y\}$, $Z = \min\{X,Y\}$ 的分布

设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$, X 与 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,则 $Z = \max\{X,Y\}$ 与 $Z = \min\{X,Y\}$ 的分布函数分别为

$$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= \boldsymbol{P}\{\max(X,Y) \leqslant z\} = \boldsymbol{P}\{X \leqslant z, Y \leqslant z\} = F(z,z), \\ F_{\min}(z) &= \boldsymbol{P}\{\min(X,Y) \leqslant z\} = \boldsymbol{P}[(X \leqslant z) \cup (Y \leqslant z)] \\ &= \boldsymbol{P}\{X \leqslant z\} + \boldsymbol{P}\{Y \leqslant z\} - \boldsymbol{P}\{X \leqslant z, Y \leqslant z\} \\ &= F_X(z) + F_Y(z) - F(z,z). \end{aligned}$$

又若 X 与 Y 相互独立,则 $Z = \max\{X,Y\}$ 与 $Z = \min\{X,Y\}$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) F_Y(z), \tag{3.27}$$

$$F_{\min}(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z) F_Y(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]. \tag{3.28}$$

【注】 以上结果容易推广到 n 个相互独立的随机变量的情况. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,则 $Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, $Z = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数分别为

$$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z), \\ F_{\min}(z) &= 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)]. \end{aligned}$$

特别,若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同分布函数 $F(x)$,则有

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, \quad F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n. \tag{3.29}$$

▶5. 分布的可加性

相互独立且服从同类型分布的随机变量,其和的分布也是同类型的,它们是:二项分布,泊松分布,正态分布与 χ^2 分布. 即:设随机变量 X 与 Y 相互独立,有

若 $X \sim B(n,p)$, $Y \sim B(m,p)$,则 $X + Y \sim B(n+m,p)$;(注意:p 相同)

若 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$,则 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$;

若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$;

若 $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$,则 $X + Y \sim \chi^2(n+m)$.

【注】 上述结果对 n 个相互独立同分布的随机变量也成立.

【例 3.10】 两台同样的自动记录仪,每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布. 首先开动其中一台,当其发生故障时停用,而另一台自行开动,试求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度.

【分析】 抛开本题的实际背景,实际上就是求两个独立随机变量之和的概率分布问题.

【解法一】 记先后开动的两台自动记录仪无故障工作的时间分别为 X_1 与 X_2,则 $T = X_1 + X_2$, X_1, X_2 的密度函数均为

$$f(x) = \begin{cases} 5\mathrm{e}^{-5x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

先求随机变量 T 的分布函数:由(3.8)式可得

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \boldsymbol{P}\{T \leqslant t\} = \boldsymbol{P}\{X_1 + X_2 \leqslant t\} \\ &= \iint_D 25\mathrm{e}^{-5(x_1+x_2)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_0^t 5\mathrm{e}^{-5x_1} \mathrm{d}x_1 \int_0^{t-x_1} 5\mathrm{e}^{-5x_2} \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

www.TopSage.com

$$= \int_0^t 5e^{-5x_1}[1 - e^{-5(t-x_1)}]dx_1 = \int_0^t 5e^{-5x_1}dx_1 - \int_0^t 5e^{-5t}dx_1$$
$$= 1 - e^{-5t} - 5te^{-5t} \quad (t > 0),$$

从而其概率密度 $f_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 25te^{-5t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$

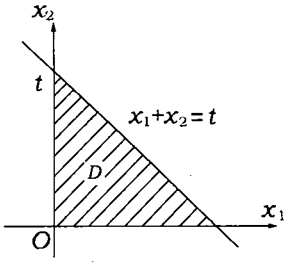


图 3.1

【解法二】 直接应用两个独立的连续型随机变量之和的卷积公式(3.22),可得

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(t-x)dx = \int_0^t 5e^{-5x} \cdot 5e^{-5(t-x)}dx$$
$$= 25te^{-5t}(t > 0).$$

评注 卷积公式在应用中要特别注意积分区间,此题是将卷积函数从 $f(x)f(t-x)$ 换为 $25e^{-5x}(e^{-5(t-x)})$ 时,积分区间也要从 $(-\infty, +\infty)$ 换为 $(0,t)$.

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 有关概率分布的计算

▶1. 联合分布、边缘分布、条件分布之间的转换及独立性讨论

【例 3.11】 将三封信随机地投入编号为 1,2,3,4 的四个邮筒. 记 X 为 1 号邮筒内信的数目,Y 为有信的邮筒数目. 求:(Ⅰ)(X,Y) 的联合概率分布;(Ⅱ)Y 的边缘分布;(Ⅲ)在 $X=0$ 条件下,关于 Y 的条件分布.

【解】 (Ⅰ)(X,Y) 的全部可能取值为 $(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,2),(3,1)$,再分别计算相应概率.

事件 $\{X=0,Y=1\}$ 表示"三封信均投入后 3 个邮筒中的某一个邮筒内". 依古典概型公式,样本空间所含样本点数为 $4^3=64$,有利于事件 $\{X=0,Y=1\}$ 的样本点数为 $C_3^1=3$,于是

$$P\{X=0,Y=1\} = \frac{C_3^1}{4^3} = \frac{3}{64}.$$

另一种计算事件 $\{X=0,Y=1\}$ 概率的方法是用乘法公式:

$$P\{X=0,Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1 \mid X=0\} = \frac{3^3}{4^3} \times \frac{C_3^1}{3^3} = \frac{3}{64}.$$

类似地可以计算出各有关概率值,列表如下:

X \ Y	1	2	3
0	3/64	18/64	6/64
1	0	9/64	18/64
2	0	9/64	0
3	1/64	0	0
$P\{Y=j\}=p_{\cdot j}$	4/64	36/64	24/64

(Ⅱ)从表中看出 Y 只取 1,2,3 三个可能值,相应概率分别是对表中 p_{ij} 的各列求和. 于是 Y 的边缘

www.TopSage.com

分布为表中最下行值.

(Ⅲ) $P\{X=0\}=\frac{3}{64}+\frac{18}{64}+\frac{6}{64}=\frac{27}{64}$, $P\{Y=j\mid X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=j\}}{P\{X=0\}}$ $(j=1,2,3)$.

在 $X=0$ 条件下,关于 Y 的条件分布,可以应用上述公式计算出来,列表如下:

Y	1	2	3
$P_{Y\mid X}(y_j\mid x_1)$	1/9	6/9	2/9

评注 求二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合概率分布,首先应确定 (X,Y) 的可能取值,关于这一点往往是很容易的;重要的是应计算出取各相应值的概率,在计算概率 p_{ij} 时,我们可以考虑用古典概型直接计算或用乘法公式计算(如本例),亦可根据题设条件分析出事件 $\{X=x_i,Y=y_j\}$ 与所给条件的关系计算 p_{ij}.(如下面【例 3.12】与【例 3.13】.)

【例 3.12】 编号为 1,2,3 的三个球随意放入编号为 1,2,3 的三个盒子中,每盒仅放一个球,令 $X_i=\begin{cases}1, & i\text{ 号球落入第 }i\text{ 号盒中},\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$ $(i=1,2)$,求 (X_1,X_2) 的联合分布.

【解】 先求出 X_i 的分布,而后再求得联合分布的部分值,从而求得联合分布.

如果将 3 个数的任一排列作为一个基本事件,则基本事件总数为 $3!=6$,$P\{X_1=1\}=P\{1\text{ 号球落入 }1\text{ 号盒}\}=\frac{2!}{3!}=\frac{1}{3}$,$P\{X_1=0\}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,同理 $P\{X_2=1\}=\frac{1}{3}$,$P\{X_2=0\}=\frac{2}{3}$,又 $P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{1\text{ 号球落入 }1\text{ 号盒},2\text{ 号球落入 }2\text{ 号盒}\}=\frac{1}{6}$,依此可求得 (X_1,X_2) 的联合分布为

X_1 \ X_2	0	1	
0	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

【例 3.13】 设随机变量 $Y_i(i=1,2,3)$ 相互独立,并且都服从参数为 p 的 0-1 分布.令

$$X_k=\begin{cases}1, & Y_1+Y_2+Y_3=k,\\ 0, & Y_1+Y_2+Y_3\neq k,\end{cases}\quad k=1,2.$$

求随机变量 (X_1,X_2) 的联合分布.

【解】 易见随机变量 (X_1,X_2) 是离散型的,它的全部可能取值为 $(0,0),(0,1),(1,0)$.我们的问题是要计算出取各相应值的概率.注意到事件 Y_1,Y_2,Y_3 相互独立且服从同参数 p 的 0-1 分布,因此它们的和 $Y_1+Y_2+Y_3\triangleq Y$ 服从二项分布 $B(3,p)$.于是

$$\begin{aligned}P\{X_1=0,X_2=0\}&=P\{Y_1+Y_2+Y_3\neq 1,Y_1+Y_2+Y_3\neq 2\}\\&=P\{Y=0\}+P\{Y=3\}=q^3+p^3,\quad (q\triangleq 1-p)\\P\{X_1=0,X_2=1\}&=P\{Y_1+Y_2+Y_3\neq 1,Y_1+Y_2+Y_3=2\}\\&=P\{Y=2\}=3p^2q,\\P\{X_1=1,X_2=0\}&=P\{Y_1+Y_2+Y_3=1,Y_1+Y_2+Y_3\neq 2\}=P\{Y=1\}=3pq^2,\\P\{X_1=1,X_2=1\}&=P\{Y_1+Y_2+Y_3=1,Y_1+Y_2+Y_3=2\}=P\{\varnothing\}=0.\end{aligned}$$

计算可知 (X_1,X_2) 的联合概率分布为

www.TopSage.com

X_1 \ X_2	0	1
0	p^3+q^3	$3p^2q$
1	$3pq^2$	0

【例 3.14】 已知随机变量 X,Y 的概率分布分别为 $P\{X=-1\}=\frac{1}{4},P\{X=0\}=\frac{1}{2},P\{X=1\}=\frac{1}{4};P\{Y=0\}=\frac{1}{4},P\{Y=1\}=\frac{1}{2},P\{Y=2\}=\frac{1}{4}$,并且 $P\{X+Y=1\}=1$,求:(Ⅰ)(X,Y) 的联合分布;(Ⅱ)X 与 Y 是否独立?为什么?

【分析与解答】 首先由边缘分布及条件求得联合分布,进而判断是否独立.

(Ⅰ)由题设 $P\{X+Y=1\}=1$,即 $P\{X=-1,Y=2\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=1$,故其余分布值均为零,即 $P\{X=-1,Y=0\}=P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0,Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1,Y=2\}=0$,由此可求得联合分布为

X \ Y	0	1	2	$P\{X=i\}$
-1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
$P\{Y=j\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

(Ⅱ)因为 $P\{X=-1,Y=0\}=0\neq P\{X=-1\}P\{Y=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$,故 X 与 Y 不独立.

评注 设 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots$,只有证实了对于所有的 i,j 都有等式

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

成立,才能说 X 与 Y 相互独立.而只要知道存在某一对 i,j,有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}\neq P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

就可断言 X 与 Y 不是相互独立的,如本题.

【例 3.15】 设在一高速公路的某一路段,每年发生交通事故的次数 $X\sim P(20)$.对每次交通事故而言,有人死亡的概率为 $p=0.05$.设各次交通事故的后果是相互独立的,以 Y 记一年中发生的引起死亡的交通事故的次数,求 Y 的分布律.

【分析】 需要求的是 Y 的分布律.易知 Y 的可能取值为 $0,1,2,\cdots$,但按题设不能直接写出概率 $P\{Y=k\}$,却能写出当 X 取特定值 $X=m$ 时 Y 取值 k 的概率,即条件概率 $P\{Y=k\mid X=m\}$.这样就能利用这一条件概率,再利用概率的加法公式得到 Y 的分布律 $P\{Y=k\},k=0,1,2,\cdots$.

【解】 按题设 $X\sim P(20)$,即有

$$P\{X=m\}=\frac{20^m e^{-20}}{m!},m=0,1,2,\cdots.$$

在 X 取特定值 m 时,Y 的可能取值为 $0,1,\cdots,m$.因各次交通事故的后果是相互独立的,所以

$$P\{Y=k\mid X=m\}=C_m^k 0.05^k 0.95^{m-k},k=0,1,2,\cdots,m.$$

于是得到 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=k\}=P\{Y=k\mid X=m\}P\{X=m\}$$

www.TopSage.com

$$= C_m^k 0.05^k 0.95^{m-k} \frac{20^m e^{-20}}{m!}, m = 0,1,2,\cdots; k = 0,1,2,\cdots,m.$$

对于固定的 k,有

$$P\{Y = k\} = \sum_{m=k}^{\infty} P\{X = m, Y = k\} = \sum_{m=k}^{\infty} C_m^k 0.05^k 0.95^{m-k} \frac{20^m e^{-20}}{m!}$$

$$\xrightarrow{令\ u = m-k} \sum_{u=0}^{\infty} C_{u+k}^k (0.05)^k (0.95)^u \frac{20^{u+k} e^{-20}}{(u+k)!}$$

$$= (0.05)^k 20^k e^{-20} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(u+k)!}{k!u!} \frac{(0.95)^u 20^u}{(u+k)!}$$

$$= \frac{1^k e^{-20}}{k!} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{19^u}{u!} = \frac{e^{-20}}{k!} e^{19} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

得 Y 的分布律为 $P\{Y = k\} = \frac{e^{-1}}{k!}$, $k = 0,1,2,\cdots$. 即 Y 服从参数为 $\lambda = 1$ 的泊松分布.

▶2. 应用二维随机变量的联合概率分布计算与之有关的事件的概率

【例 3.16】 已知随机变量 X 与 Y 的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	α
1	β	0.1	0.2

又 $P\{X+Y=1\} = 0.4$,则 $\alpha =$ _____;$\beta =$ _____;$P\{X+Y<1\} =$ _____;$P\{X^2Y^2 = 1\} =$ _____.

【分析】 由 $0.1 + 0.2 + \alpha + \beta + 0.1 + 0.2 = 1$

及 $P\{X+Y=1\} = P\{X=0,Y=1\} + P\{X=1,Y=0\} = \alpha + 0.1 = 0.4$

解得 $\alpha = 0.3, \beta = 0.1$. 于是

$$P\{X+Y<1\} = \sum_{i+j<1} P\{X=i,Y=j\}$$

$$= P\{X=0,Y=-1\} + P\{X=0,Y=0\} + P\{X=1,Y=-1\}$$

$$= 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4;$$

$$P\{X^2Y^2 = 1\} = P\{X=1,Y=-1\} + P\{X=1,Y=1\} = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

【例 3.17】 在时刻 $t = 0$ 时开始计时,设事件 A_1, A_2 分别在时刻 X, Y 发生,X 和 Y 是相互独立的随机变量,其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & 其他, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4y^2 e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

求 A_1 先于 A_2 发生的概率.

【解】 由 X 和 Y 的独立性,知 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 8y^2 e^{-2(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

按题意需求概率 $P\{X < Y\}$. 如图 3.2 知

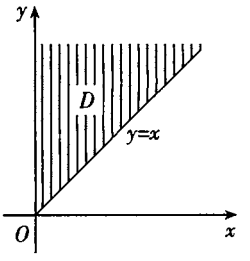


图 3.2

$$P\{X<Y\} = \iint_D 8y^2 e^{-2(x+y)} dxdy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^y 8y^2 e^{-2(x+y)} dx$$

$$= -4\int_0^{+\infty} y^2 e^{-2y} (e^{-2x}) \Big|_{x=0}^{x=y} dy = -4\int_0^{+\infty} y^2 (e^{-4y} - e^{-2y}) dy$$

www.TopSage.com

$$= 8\int_0^{+\infty} y\left(-\frac{1}{4}e^{-4y} + \frac{1}{2}e^{-2y}\right)dy = -8\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{16}e^{-4y} - \frac{1}{4}e^{-2y}\right)dy = \frac{7}{8}.$$

TopSage.com

题型二　有关概率密度的命题

【例 3.18】 设二维随机变量(X_1,Y_1)与(X_2,Y_2)的联合概率密度分别为

$$f_1(x,y) = \begin{cases} k_1e^{-(x+y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_2(x,y) = \begin{cases} k_2e^{-(x+y)}, & x>y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求：(Ⅰ) 常数k_1,k_2的值；

(Ⅱ)$X_i,Y_i(i=1,2)$的边缘概率密度；

(Ⅲ)$P\{X_i>2Y_i\}$　$(i=1,2)$.

【分析】 (X_i,Y_i)是二维连续型随机变量，在确定其联合概率密度中的未知参数时，应首先考虑用概率密度的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$$

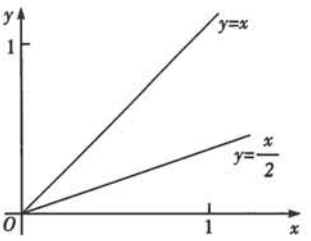


图 3.3

【解】 (Ⅰ) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x,y)\,dxdy$

$$= \int_0^{+\infty} dy\int_0^{+\infty} k_1e^{-(x+y)}\,dx = k_1,$$

得 $k_1 = 1$；

又由 $$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x,y)\,dxdy = \int_0^{+\infty} dy\int_y^{+\infty} k_2e^{-(x+y)}\,dx = \int_0^{+\infty} k_2e^{-2y}dy = \frac{k_2}{2},$$

得 $k_2 = 2$. 因此(X_1,Y_1)与(X_2,Y_2)的概率密度分别为

$$f_1(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases} \quad f_2(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}, & x>y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅱ) $$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0; \end{cases}$$

类似地，$$f_{Y_1}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x,y)\,dx = \begin{cases} e^{-y}, & y\geqslant 0, \\ 0, & y<0. \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{x} 2e^{-(x+y)}dy, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 2(e^{-x}-e^{-2x}), & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0; \end{cases}$$

$$f_{Y_2}(y) = \begin{cases} \int_y^{+\infty} 2e^{-(x+y)}dx, & y\geqslant 0, \\ 0, & y<0 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y\geqslant 0, \\ 0, & y<0. \end{cases}$$

(Ⅲ) $$P\{X_1>2Y_1\} = \iint_{x>2y} f_1(x,y)\,dxdy = \int_0^{+\infty} dy\int_{2y}^{+\infty} e^{-(x+y)}dx = \int_0^{+\infty} e^{-3y}dy = \frac{1}{3};$$

$$P\{X_2>2Y_2\} = \iint_{x>2y} f_2(x,y)\,dxdy = \int_0^{+\infty} dy\int_{2y}^{+\infty} 2e^{-(x+y)}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-3y}dy = \frac{2}{3}.$$

【例 3.19】 设二维连续型随机变量(X,Y)在区域$D = \{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 3-y, y\leqslant 1\}$上服从均匀分布，求边缘密度$f_X(x)$及在$X=x$条件下，关于$Y$的条件概率密度.

【分析】 如果已知(X,Y)的联合密度，求其中一个随机变量的边缘密度及条件概率密度，可直接

www.TopSage.com

根据公式(3.9)与(3.12)计算,为此我们应先计算(X,Y)的联合概率密度.

【解】 如图3.4所示,区域D是一个底边平行于x轴的等腰梯形,其面积$S_D=\frac{1}{2}(1+3)\times 1=2$,因此$(X,Y)$的联合概率密度为

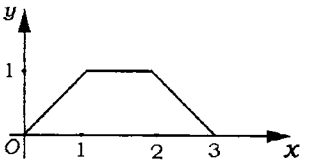


图3.4

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^x\frac{1}{2}dy, & 0\leqslant x<1,\\ \int_0^1\frac{1}{2}dy, & 1\leqslant x<2,\\ \int_0^{3-x}\frac{1}{2}dy, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{3-x}{2}, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$0<x\leqslant 1$时,$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & y<0\text{或}y>x;\end{cases}$

当$1<x<2$时,$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

当$2\leqslant x<3$时,$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{3-x}, & 0\leqslant y\leqslant 3-x,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

当$x\leqslant 0$或$x\geqslant 3$时,由于$f_X(x)=0$,因此条件密度$f_{Y|X}(y|x)$不存在.注意在$x\leqslant 0$或$x\geqslant 3$时,$f_{Y|X}(y|x)$不是零,而是不存在.

评注 ①在求二维连续型随机变量(X,Y)的边缘密度及条件密度时,要特别注意积分区间的选取,即应是使得$f(x,y)$不为零的区间,比如本题求$f_X(x)$对y积分时,不是统一的从0积到1,而是在x的不同取值范围内积分从0到x;0到1;0到$3-x$而有所不同.

②尽管$f_X(x)$,$f(x,y)$在$x=0$与$x=3$时都有定义,但由于$f_X(0)$与$f_X(3)$的值均为零,因而条件概率密度$f_{Y|X}(y|0)$及$f_{Y|X}(y|3)$是不存在的,对于$x<0$及$x>3$的情况类似.

③涉及二维连续型随机变量的有关问题,先据题意画出使$f(x,y)$取非零值的取值区域D的图形,往往可以帮助我们正确写出积分区间.

④如果所求的边缘密度是分段函数,在求数字特征时不要忘记积分也应分段进行.

【例3.20】 设随机变量X在区间$(0,1)$上服从均匀分布,当X取到$x(0<x<1)$时,随机变量Y等可能地在$(x,1)$上取值.试求:(Ⅰ)(X,Y)的联合概率密度;(Ⅱ)关于Y的边缘概率密度函数;(Ⅲ)$P\{X+Y>1\}$.

【分析】 欲求密度函数,通常是先求分布函数,这对一维和二维随机变量都是一样的.但是本题所给的是X在$(0,1)$区间上服从均匀分布,而且条件"当X取到$x(0<x<1)$时,Y等可能地在$(x,1)$上取值"意味着,在$X=x$的条件下,Y在$(x,1)$上服从均匀分布,这相当于给出的是条件概率密度,所以可以直接写出联合概率密度.

【解】 (Ⅰ)根据题设X在$(0,1)$上服从均匀分布,其概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而变量Y,在$X=x$的条件下,在区间$(x,1)$上服从均匀分布,所以其条件概率密度为

www.TopSage.com

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

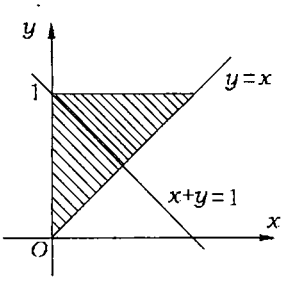


图 3.5

再根据条件概率密度的定义,可得联合概率密度

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ)利用求得的联合概率密度,不难求出关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_0^y\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-y).$$

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅲ)由图 3.5 可以看出

$$P\{X+Y>1\}=\int_{\frac12}^1dy\int_{1-y}^y f(x,y)\,dx=\int_{\frac12}^1dy\int_{1-y}^y\frac{dx}{1-x}=\int_{\frac12}^1[\ln y-\ln(1-y)]\,dy$$
$$=y\ln y\Big|_{\frac12}^1+(1-y)\ln(1-y)\Big|_{\frac12}^1-\int_{\frac12}^1dy+\int_{\frac12}^1dy=-\ln\frac12=\ln2.$$

评注 在本题积分值的计算中,我们用到了 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$.

【例 3.21】 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,在 $X=x(-\infty<x<+\infty)$ 的条件下,随机变量 Y 服从正态分布 $N(x,1)$.求在 $Y=y$ 条件下关于 X 的条件概率密度.

【分析】 依题意已知 X 的分布及关于 Y 的条件分布,因此我们很容易求出 X 与 Y 的联合分布.然后直接应用条件密度公式求 $f_{X|Y}(x|y)$.

【解】 依题意,X 的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

在 $X=x$ 的条件下,关于 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}.$$

根据条件概率密度的定义可得 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\left(x^2-xy+\frac{y^2}{2}\right)}.$$

根据二维正态分布的性质可知,二维正态分布 (X,Y) 的边缘分布是一维正态分布,于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac12\left(\frac{y}{\sqrt2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

根据条件密度的定义可得

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{2\pi}e^{-\left(x^2-xy+\frac{y^2}{2}\right)}}{\frac{1}{\sqrt2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)}.$$

进一步分析,可将 $f_{X|Y}(x|y)$ 改写为如下形式:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt2}}e^{-\frac{1}{2\cdot\frac12}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}.$$

www.TopSage.com

从上面式子可以很清楚地看出，在 $Y=y$ 条件下关于 X 的条件分布是正态分布 $N\left(\frac{y}{2},\frac{1}{2}\right)$.

【例 3.22】 设以 X 表示某一推销员一天花费在汽油上的款项(以美元计)，以 Y 表示推销员一天所得的补帖(以美元计)，已知 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right), & 10<x<20,\frac{x}{2}<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(Ⅱ) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$；

(Ⅲ) 求 $x=12$ 时 Y 的条件概率密度；

(Ⅳ) 求条件概率 $P\{Y\geqslant 8\mid X=12\}$.

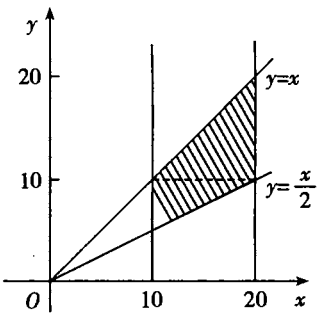


图 3.6

【解】 (Ⅰ) 如图 3.6

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{1}{25}\frac{20-x}{x}\mathrm{d}y, & 10<x<20,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{50}(20-x), & 10<x<20,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{10}^{2y}\frac{1}{25}\frac{20-x}{x}\mathrm{d}x, & 5<y<10,\\ \int_{y}^{20}\frac{1}{25}\frac{20-x}{x}\mathrm{d}x, & 10\leqslant y<20,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{25}\left(20\ln\frac{y}{5}-2y+10\right), & 5<y<10,\\ \frac{1}{25}\left(20\ln\frac{20}{y}-20+y\right), & 10\leqslant y<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) 当 $10<x<20$ 时，$f_X(x)\neq 0$，条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 存在.

当 $10<x<20$ 时，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{\frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right)}{\frac{1}{50}(20-x)}=\frac{2}{x}, & \frac{x}{2}<y<x,\\ 0, & y\text{取其他值}.\end{cases}$$

评注 上式中，在写 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{2}{x}$ 成立的区间时，必须是区间 $(10,20)$ 内任意固定一个 x 的值，考察相应的 y 的变化范围是什么. 如图 3.6 可知 y 的变化范围是 $\left(\frac{x}{2},x\right)$，或写 $\frac{x}{2}<y<x$，可以看到 $f_{Y|X}(y|x)$ 只是 y 的函数，此处 x 是一个固定值.

当 $5<y<10$ 或 $10\leqslant y<20$ 时，$f_Y(y)\neq 0$，$f_{X|Y}(x|y)$ 存在. 当 $5<y<10$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{\frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right)}{\frac{1}{25}\left(20\ln\frac{y}{5}-2y+10\right)}=\frac{20-x}{x\left(20\ln\frac{y}{5}-2y+10\right)}, & 10<x<2y,\\ 0, & x\text{取其他值};\end{cases}$$

www.TopSage.com

当 $10 \leqslant y < 20$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right)}{\frac{1}{25}\left(20\ln\frac{20}{y} - 20 + y\right)} = \dfrac{20-x}{x\left(20\ln\frac{20}{y} - 20 + y\right)}, & y < x < 20, \\ 0, & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

$f_{X|Y}(x|y)$ 是单个自变量 x 的函数，y 是一个固定值.

(Ⅲ) 当 $x = 12$ 时 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|12) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & 6 < y < 12, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(Ⅳ) $P\{Y \geqslant 8 \mid X = 12\} = \int_8^{12} \frac{1}{6}\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$.

【例 3.23】 我们常假设某种型号的电子元件的寿命 X 服从指数分布，其密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个常数. 在某些情况，严格地说 λ 是一个随机变量，记为 Λ（例如元件选自一个很大的群体，这个群体的各个成员具有不同的工作特性）. 此时我们假设 X 的条件概率密度为

$$f_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

现设 Λ 的概率密度为 $f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda}, & \lambda > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

试求 X 的概率密度.

【解】 先求 X 和 Λ 的联合概率密度，即有

$$f(x,\lambda) = f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+1)}, & x > 0, \lambda > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是 X 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{+\infty} f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+1)}\mathrm{d}\lambda \\ &= -\frac{\lambda^2 e^{-\lambda(x+1)}}{x+1}\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} + \frac{2}{x+1}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(x+1)}\mathrm{d}\lambda \\ &= -\frac{2}{(x+1)^3} e^{-\lambda(x+1)}\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

$$f_X(x) = 0, \quad x < 0,$$

因此

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^3}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

题型三　求两个随机变量函数的分布

【例 3.24】 已知随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的 0-1 分布，即 $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$，$P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$，定义随机变量 $Z = \begin{cases} 1, & \text{当 } X+Y \text{ 为偶数,} \\ 0, & \text{当 } X+Y \text{ 为奇数.} \end{cases}$ 求 Z 的分布；(X,

www.TopSage.com

Z) 的联合分布;并问 X 与 Z 是否独立.

【解】 由于(X,Y) 是二维离散随机变量,故由边缘分布及相互独立可求得联合分布;应用解题一般模式,即可求得 Z 及(X,Z) 的分布,进而判断 X、Z 是否独立.

由题设知$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,将其写成矩阵形式,求 Z、(X,Z) 的分布:

p_{ij}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
Z	1	0	0	1
(X,Z)	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$

由此可得 Z 服从参数 $p = \frac{1}{2}$ 的 0-1 分布;(X,Z) 的联合概率分布为

X \ Z	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

因 $\boldsymbol{P}\{X = i, Z = j\} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{P}\{X = i\}\boldsymbol{P}\{Z = j\}\ (i, j = 0,1)$,故 X 与 Z 独立.

评注 设随机变量 X 和 Y 独立同服从参数为 $p(0 < p < 1)$ 的 0-1 分布,定义随机变量 $Z = \begin{cases} 1, & \text{当 } X+Y \text{ 为偶数}, \\ 0, & \text{当 } X+Y \text{ 为奇数}, \end{cases}$ 则当 $p = \frac{1}{2}$ 时,随机变量 X,Y,Z 两两独立,但是对于其他 $p(0 < p < 1)$,X 与 Z,Y 与 Z 均不独立.

【例 3.25】 已知(X,Y) 在以点$(0,0)$,$(1,-1)$,$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布.

(Ⅰ) 求(X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$;

(Ⅱ) 求边缘密度函数 $f_X(x)$,$f_Y(y)$ 及条件密度函数 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$,$f_{Y|X}(y\,|\,x)$;并问 X 与 Y 是否独立;

(Ⅲ) 计算概率 $\boldsymbol{P}\{X > 0, Y > 0\}$,$\boldsymbol{P}\left\{X > \frac{1}{2} \,|\, Y > 0\right\}$,$\boldsymbol{P}\left\{X > \frac{1}{2} \,\middle|\, Y = \frac{1}{4}\right\}$.

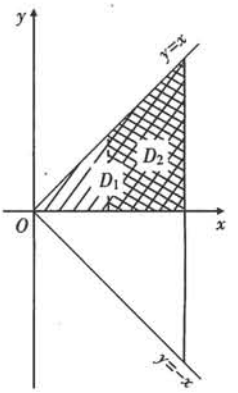


图 3.7

【解】 直接应用公式计算,但要注意非零的定义域.

(Ⅰ) 由于以$(0,0)$,$(1,-1)$,$(1,1)$ 为顶点的三角形面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$(如图 3.7),故

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅱ) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_{-x}^{x} dy = 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

www.TopSage.com

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}dx=1+y, & -1\leqslant y<0,\\ \int_{y}^{1}dx=1-y, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-|y|, & |y|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

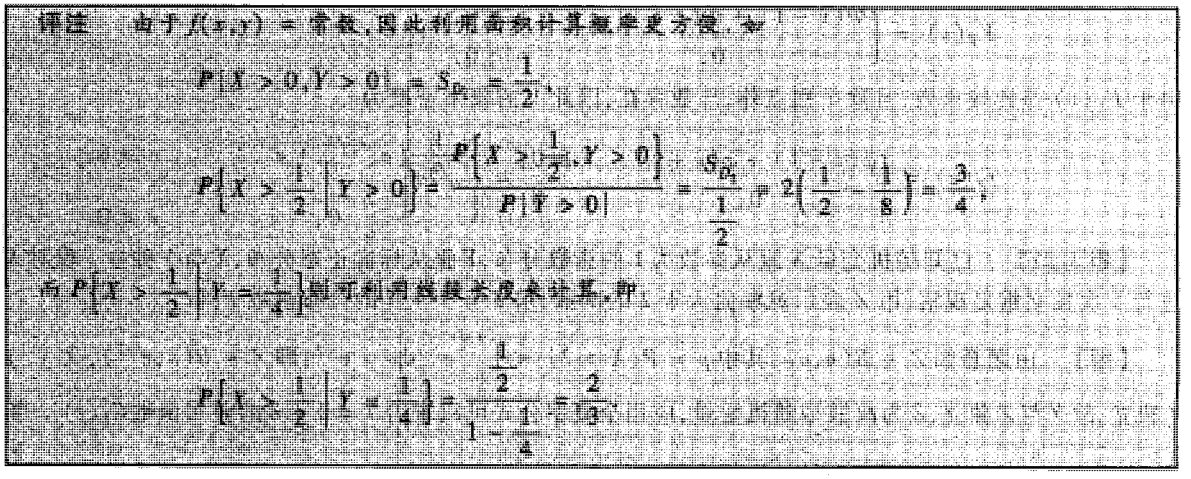
由于$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$,故X与Y不独立.

(Ⅲ) $$P\{X>0,Y>0\}=\iint\limits_{x>0,y>0}f(x,y)\,dxdy=\int_0^1dx\int_0^x dy=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2},$$

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\,\middle|\,Y>0\right\}=\frac{P\left\{X>\frac{1}{2},Y>0\right\}}{P\{Y>0\}}=\frac{\iint\limits_{x>\frac{1}{2},y>0}f(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_{y>0}f(x,y)\,dxdy}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1dx\int_0^x dy}{\int_0^1dx\int_0^x dy}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx}{\int_0^1 x\,dx}=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4},$$

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\,\middle|\,Y=\frac{1}{4}\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_{X|Y}\left(x\mid y=\frac{1}{4}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{1-\frac{1}{4}}dx=\frac{2}{3}.$$



【例3.26】 假设随机变量X与Y相互独立,如果X服从标准正态分布,Y的概率分布为$P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}$,$P\{Y=1\}=\frac{3}{4}$,求:(Ⅰ)$Z=XY$的概率密度$f_Z(z)$;(Ⅱ)$V=|X-Y|$的概率密度$f_V(v)$.

【分析】 由于Y为离散型随机变量,X与Y独立,因此应用全概率公式可得分布函数,进而求得概率密度.

【解】 (Ⅰ)依题意$P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}$,$P\{Y=1\}=\frac{3}{4}$,$X\sim N(0,1)$且X与Y相互独立,于是$Z=XY$的分布函数为

www.TopSage.com

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{XY \leqslant z\} = P\{Y=-1\}P\{XY \leqslant z \mid Y=-1\} + P\{Y=1\}P\{XY \leqslant z \mid Y=1\} \\
&= P\{Y=-1\}P\{-X \leqslant z \mid Y=-1\} + P\{Y=1\}P\{X \leqslant z \mid Y=1\} \\
&= P\{Y=-1\}P\{X \geqslant -z\} + P\{Y=1\}P\{X \leqslant z\} \\
&= \frac{1}{4}[1 - P\{X < -z\}] + \frac{3}{4}P\{X \leqslant z\} \\
&= \frac{1}{4}[1 - \Phi(-z)] + \frac{3}{4}\Phi(z) = \frac{1}{4}\Phi(z) + \frac{3}{4}\Phi(z) = \Phi(z),
\end{aligned}
$$

即 $Z = XY$ 服从标准正态分布，其概率密度为

$$
f_Z(z) = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}.
$$

（Ⅱ）由于 $V = |X - Y|$ 只取非负值，因此当 $v < 0$ 时，其分布函数 $F_V(v) = P\{|X-Y| \leqslant v\} = 0$；当 $v \geqslant 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
F_V(v) &= P\{-v \leqslant X - Y \leqslant v\} \\
&= P\{Y=-1\}P\{-v \leqslant X - Y \leqslant v \mid Y=-1\} \\
&\quad + P\{Y=1\}P\{-v \leqslant X - Y \leqslant v \mid Y=1\} \\
&= \frac{1}{4}P\{-v-1 \leqslant X \leqslant v-1 \mid Y=-1\} + \frac{3}{4}P\{-v+1 \leqslant X \leqslant v+1 \mid Y=1\} \\
&= \frac{1}{4}P\{-v-1 \leqslant X \leqslant v-1\} + \frac{3}{4}P\{-v+1 \leqslant X \leqslant v+1\} \\
&= \frac{1}{4}[\Phi(v-1) - \Phi(-v-1)] + \frac{3}{4}[\Phi(v+1) - \Phi(-v+1)] \\
&= \frac{1}{4}\Phi(v-1) - \frac{1}{4}[1 - \Phi(v+1)] + \frac{3}{4}\Phi(v+1) - \frac{3}{4}[1 - \Phi(v-1)] \\
&= \Phi(v-1) + \Phi(v+1) - 1.
\end{aligned}
$$

综上计算可得

$$
F_V(v) = \begin{cases} \Phi(v-1) + \Phi(v+1) - 1, & v \geqslant 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}
$$

由于 $F_V(v)$ 是连续函数，且除个别点外，导数存在，因此 V 的概率密度为

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \varphi(v-1) + \varphi(v+1), & v \geqslant 0, \\ 0, & v < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[e^{-\frac{(v-1)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+1)^2}{2}}], & v \geqslant 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}
$$

【例 3.27】 已知随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，Y 服从标准正态分布，X 与 Y 独立．现对 X 进行 n 次独立重复观察，用 Z 表示观察值大于 2 的次数，求 $T = Y + Z$ 的分布函数 $F_T(t)$．

【解】 由题意知 $Z \sim B(n,p)$，其中 $p = P\{X > 2\} = \int_2^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-2}$，即 $Z \sim B(n,e^{-2})$，又 X 与 Y 独立，故 Y 与 Z 独立，Z 为离散型随机变量，应用全概率公式可以求得 $T = Y + Z$ 的分布函数 $F_T(t)$．事实上，由于 $\bigcup_{k=0}^{n}\{Z = k\} = \Omega$，所以，根据全概率公式可得

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= P\{Y + Z \leqslant t\} = \sum_{k=0}^{n} P\{Z=k\}P\{Y + Z \leqslant t \mid Z = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{Z=k\}P\{Y \leqslant t - k \mid Z = k\} = \sum_{k=0}^{n} P\{Z=k\}P\{Y \leqslant t-k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\Phi(t-k),
\end{aligned}
$$

其中 $p = e^{-2}$，$t \in R$．

www.TopSage.com

【例 3.28】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从参数为 p 的几何分布，即 $P\{X=m\}=pq^{m-1}$，$m=1,2,\cdots,0<p<1,q=1-p$，Y 服从标准正态分布 $N(0,1)$．求：

（Ⅰ）$U=X+Y$ 的分布函数；（Ⅱ）$V=XY$ 的分布函数．

【解】 （Ⅰ）根据全概率公式有

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{X+Y\leqslant u\}=\sum_{m=1}^{\infty}P\{X=m\}P\{X+Y\leqslant u\mid X=m\}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}P\{X=m\}P\{Y\leqslant u-m\mid X=m\}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}P\{X=m\}P\{Y\leqslant u-m\}=\sum_{m=1}^{\infty}pq^{m-1}\Phi(u-m).$$

（Ⅱ）$$F_V(v)=P\{V\leqslant v\}=P\{XY\leqslant v\}=\sum_{m=1}^{\infty}P\{X=m\}P\{XY\leqslant v\mid X=m\}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}P\{X=m\}P\left\{Y\leqslant\frac{v}{m}\mid X=m\right\}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}P\{X=m\}P\left\{Y\leqslant\frac{v}{m}\right\}=\sum_{m=1}^{\infty}pq^{m-1}\Phi\left(\frac{v}{m}\right).$$

【例 3.29】 汽车加油站共有两个加油窗口，现有三辆车 A,B,C 同时进入该加油站，假设 A、B 首先开始加油，当其中一辆车加油结束后立即开始第三辆车 C 加油．假设各辆车加油所需时间是相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布．（Ⅰ）求第三辆车 C 在加油站等待加油时间 T 的概率密度；（Ⅱ）求第三辆车 C 在加油站度过时间 S 的概率密度．

【解】 首先我们需要求出 T、S 与各辆车加油时间 $X_i(i=1,2,3)$ 之间的关系．假设第 i 辆车加油时间为 $X_i(i=1,2,3)$，则 X_i 独立同分布，且概率密度都为

$$f_i(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}(i=1,2,3,\lambda>0).$$

依题意，第三辆车 C 在加油站等待加油时间 $T=\min(X_1,X_2)$，度过时间 = 等待时间 + 加油时间，即

$$S=T+X_3=\min(X_1,X_2)+X_3.$$

（Ⅰ）由于 $T=\min(X_1,X_2)$，其中 X_1 与 X_2 独立，所以 T 的分布函数

$$F_T(t)=P\{\min(X_1,X_2)\leqslant t\}=1-P\{\min(X_1,X_2)>t\}=1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}$$

$$=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1-\left(\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx\right)^2, & t>0\end{cases}=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1-e^{-2\lambda t}, & t>0.\end{cases}$$

T 的密度函数 $f_T(t)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $T=\min(X_1,X_2)$ 服从参数为 2λ 的指数分布．

（Ⅱ）$S=T+X_3=\min(X_1,X_2)+X_3$，$T$ 与 X_3 独立且已知其概率密度，由卷积公式求得 S 的概率密度为

$$f_S(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_T(t)f_3(s-t)dt=\int_0^{+\infty}2\lambda e^{-2\lambda t}f_3(s-t)dt$$

$$\xrightarrow{令\,s-t=x}\int_s^{-\infty}2\lambda e^{-2\lambda(s-x)}f_3(x)d(-x)=\int_{-\infty}^{s}2\lambda e^{-2\lambda s}\cdot e^{2\lambda x}f_3(x)dx$$

$$=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda s}\int_0^s e^{2\lambda x}\lambda e^{-\lambda x}dx, & s>0,\\ 0, & s\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda s}(e^{\lambda s}-1), & s>0,\\ 0, & s\leqslant 0.\end{cases}$$

【例 3.30】 已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

www.TopSage.com

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x+y}, & x<0,y<0,\\ \dfrac{1}{2}e^{-(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

(Ⅰ) 试求(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$,$f_Y(y)$,并问X与Y是否独立;

(Ⅱ) 令$Z=X-Y$,求Z的分布函数$F_Z(z)$与概率密度$f_Z(z)$.

【解】 画出$f(x,y)$非零定义域,应用定义、公式进行计算.

(Ⅰ) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{x}\cdot e^{y}dy=\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\cdot e^{-y}dy=\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

同理 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{y}, & y<0,\\ \dfrac{1}{2}e^{-y}, & y\geqslant 0,\end{cases}$$

因为$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$,所以X与Y不独立.

(Ⅱ) **方法1° 分布函数法.** $Z=X-Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x-y\leqslant z}f(x,y)\,dxdy.$$

当$z\leqslant 0$时,如图3.8a,有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}dx\int_{x-z}^{0}e^{x}e^{y}dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}dx\cdot\int_{x-z}^{+\infty}e^{-x}e^{-y}dy\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}e^{x}(1-e^{x-z})\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x}e^{-x+z}dx\\&=\frac{1}{2}\left(e^{x}\Big|_{-\infty}^{z}-\frac{1}{2}e^{-z}e^{2x}\Big|_{-\infty}^{z}\right)+\frac{1}{2}e^{z}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_{0}^{\infty}\\&=\frac{1}{2}\left(e^{z}-\frac{1}{2}e^{z}\right)+\frac{1}{2}e^{z}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{z};\end{aligned}$$

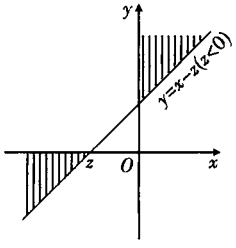


图3.8a

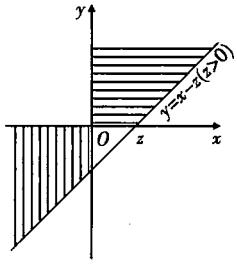


图3.8b

当$z>0$时,如图3.8b,有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}dx\int_{x-z}^{0}e^{x+y}dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}dy\int_{0}^{y+z}e^{-(x+y)}dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x}(1-e^{x-z})\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-y}[1-e^{-(y+z)}]\,dy\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}e^{-z}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}e^{-z}\right)=1-\frac{1}{2}e^{-z}.\end{aligned}$$

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

综上得 $$F_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{z}, & z\leqslant 0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-z}, & z>0.\end{cases}$$

由于 $F_Z(z)$ 为 z 的连续函数，除 $z=0$ 外，导函数存在且连续，故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{z}, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}e^{-z}, & z>0\end{cases}=\frac{1}{2}e^{-|z|}.$$

方法 2° 公式法. 若 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=X-Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+z,x)\,dx,$$

而 $$f(x+z,x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x+z+x}, & x+z<0,x<0,\\ \frac{1}{2}e^{-(x+z+x)}, & x+z>0,x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{z}\cdot e^{2x}, & x<-z,x<0,\\ \frac{1}{2}e^{-z}\cdot e^{-2x}, & x>-z,x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以当 $z\leqslant 0$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{z}e^{2x}dx+\int_{-z}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-z}e^{-2x}dx$

$$=\frac{1}{4}e^{z}+\frac{1}{2}e^{-z}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_{-z}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{4}e^{z}+\frac{1}{4}e^{z}=\frac{1}{2}e^{z};$$

当 $z>0$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{-z}\frac{1}{2}e^{z}e^{2x}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-z}e^{-2x}dx=\frac{1}{4}e^{-z}+\frac{1}{4}e^{-z}=\frac{1}{2}e^{-z}$.

综上得 $$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{z}, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}e^{-z}, & z>0\end{cases}=\frac{1}{2}e^{-|z|}.$$

题型训练

一、选择题

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则下列服从相应区间或区域上均匀分布的是

(A) X^2. (B) $X-Y$. (C) $X+Y$. (D) (X,Y).

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 是

(A) $\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$. (B) $F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z)$.

(C) $F_X(z)\cdot F_Y(z)$. (D) $\frac{1}{2}[F_X(z)+F_Y(z)]$.

3. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，其分布函数分别为

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}\quad F_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

www.TopSage.com

则 $X_1 + X_2$ 的分布函数 $F(x) =$

(A) $F_1(x) + F_2(x)$.　　(B) $\frac{1}{2}F_1(x) + \frac{1}{2}F_2(x)$.

(C) $\frac{1}{2}F_1(x) + \frac{1}{2}F_2(x-1)$.　　(D) $\frac{1}{2}F_2(x) + \frac{1}{2}F_2(x-1)$.

4. 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布,则

(A) $X + Y$ 一定服从正态分布.　　(B) X 和 Y 不相关与独立等价.

(C) (X,Y) 一定服从正态分布.　　(D) $(X,-Y)$ 未必服从正态分布.

5. 假设 X 是只有两个可能值的离散型随机变量,Y 是连续型随机变量,且 X 和 Y 相互独立,则随机变量 $X + Y$ 的分布函数

(A) 是阶梯函数.　　(B) 恰好有一个间断点.

(C) 是连续函数.　　(D) 恰好有两个间断点.

6. 已知随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且有相同的分布:$P\{X_i = -1\} = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{2}(i = 1,2)$,则

(A) X_1 与 X_1X_2 独立且有相同的分布.　　(B) X_1 与 X_1X_2 独立且有不同的分布.

(C) X_1 与 X_1X_2 不独立且有相同的分布.　　(D) X_1 与 X_1X_2 不独立且有不同的分布.

7. 已知随机变量 (X,Y) 在区域 $D = \{(x,y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ 上服从均匀分布,则

(A) $P\{X + Y \geqslant 0\} = \frac{1}{4}$.　　(B) $P\{X - Y \geqslant 0\} = \frac{1}{4}$.

(C) $P\{\max(X,Y) \geqslant 0\} = \frac{1}{4}$.　　(D) $P\{\min(X,Y) \geqslant 0\} = \frac{1}{4}$.

二、填空题

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立同分布,且都服从 $p = \frac{2}{3}$ 的 0-1 分布,则随机变量 $Z = \max\{X,Y\}$ 的分布律为_____.

2. 假设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $P\{X = k\} = \frac{a}{k}$,$P\{Y = -k\} = \frac{b}{k^2}$ $(k = 1,2,3)$,则 $a =$ _____,$b =$ _____,$Z = X + Y$ 的分布律为_____.

3. 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y = 2\} =$ _____.

4. 设随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \min\{x,y\} < 0, \\ \min\{x,y\}, & 0 \leqslant \min\{x,y\} < 1, \\ 1, & \min\{x,y\} \geqslant 1, \end{cases}$$

则随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为_____.

三、计算题与应用题

1. 袋中有大小相同的 10 个球,其中 6 个红球,4 个白球,现随机地抽取两次,每次取一个,定义两个随机变量 X,Y 如下:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第一次抽到红球}, \\ 0, & \text{第一次抽到白球}, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{第二次抽到红球}, \\ 0, & \text{第二次抽到白球}. \end{cases}$$

试就放回与不放回两种情形,求出 (X,Y) 的联合分布律.

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布为

www.TopSage.com

X \ Y	1	2	3
-1	0.1	a	0.2
0	b	0.2	0
1	0	0.1	c

其中 a,b,c 为常数，且 $EXY=-0.1$，$P\{X\leqslant 0 \mid Y\geqslant 2\}=\frac{5}{8}$，记 $Z=X+Y$. 求：(Ⅰ) a,b,c 之值；(Ⅱ) Z 的概率分布；(Ⅲ) $P\{Z=X\}$，$P\{Z=Y\}$.

3. 假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布. 记

$$U=\begin{cases}0, & \text{若 } X\leqslant Y,\\ 1, & \text{若 } X>Y.\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & \text{若 } X\leqslant 2Y,\\ 1, & \text{若 } X>2Y.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求 U 和 V 的联合分布；(Ⅱ) 求 U 和 V 的相关系数 ρ.

4. 雷达的圆形屏幕半径为 r，假设目标出现点 (X,Y) 在屏幕上均匀分布，即联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\leqslant r^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：(Ⅰ) 边缘密度函数；(Ⅱ) 条件密度函数.

5. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,y\leqslant x\leqslant y+1\}$ 内服从均匀分布，求边缘密度函数，并判断 X,Y 的独立性.

6. 设随机变量 X,Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的泊松分布，试证：$Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

7. 设随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right), & \text{若 } 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{若不然}.\end{cases}$$

(Ⅰ) 试求 X 的概率密度 $f(x)$；(Ⅱ) 试求事件“X 大于 Y”的概率 $P\{X>Y\}$；

(Ⅲ) 求条件概率 $P\{Y>1\mid X<0.5\}$.

8. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，其中 $D=\{(x,y)\mid |x+y|\leqslant 1,|x-y|\leqslant 1\}$，求 X 的边缘密度 $f_X(x)$ 与在 $X=0$ 条件下，关于 Y 的条件密度 $f_{Y|X}(y\mid 0)$.

9. 已知 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$

(Ⅰ) 求 $Z=X-Y$ 的概率分布；(Ⅱ) 记 $U_1=XY$，$V_1=\frac{X}{Y}$，求 (U_1,V_1) 的概率分布；

(Ⅲ) 记 $U_2=\max(X,Y)$，$V_2=\min(X,Y)$，求 (U_2,V_2) 的概率分布及 U_2V_2 的概率分布.

10. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，试求：

(Ⅰ) $U=XY$ 的概率密度 $f_U(u)$；(Ⅱ) $V=|X-Y|$ 的概率密度 $f_V(v)$.

www.TopSage.com

第四章　随机变量的数字特征

内容概要与重难点提示

随机变量的数字特征是描述随机变量分布特征的数字，它们能够集中地刻画出随机变量取值规律的特点．随机变量的数字特征考试大纲要求的是数学期望、方差、标准差、各阶原点矩与中心矩、协方差与相关系数．

关于随机变量的数字特征不仅要理解其概念，还应会运用定义与性质计算随机变量及其函数的数字特征．特别是计算一个或两个随机变量函数的数学期望，掌握常用分布的数字特征与其分布参数间的关系．

考核知识要点讲解

一、随机变量的数学期望

（一）随机变量的数学期望的概念与性质

▶1. 随机变量的数学期望的概念

(1) 离散型随机变量的数学期望　设离散型随机变量 X 的分布律为 $\boldsymbol{P}\{X = x_i\} = p_i (i = 1,2,\cdots)$．若无穷级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称无穷级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 的和为随机变量 X 的**数学期望**．记作 $\boldsymbol{EX}$ 或 $\boldsymbol{E}(X)$，即

$$\boldsymbol{EX} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i . \tag{4.1}$$

(2) 连续型随机变量的数学期望　设 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$．若反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的**数学期望**，记为 $\boldsymbol{EX}$ 或 $\boldsymbol{E}(X)$，即

$$\boldsymbol{EX} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x . \tag{4.2}$$

【注】 ① 数学期望简称**期望**，由于数学期望 $\boldsymbol{E}(X)$ 描述随机变量 X 取值的平均大小，因此又称为**均值**．随机变量 X 的数学期望 $\boldsymbol{E}(X)$ 是一个实数．

② 数学期望 $\boldsymbol{E}(X)$ 完全由随机变量 X 的概率分布所确定．若 X 服从某一分布，也称 $\boldsymbol{E}(X)$ 是这一分布的数学期望．

③ 如果上述的无穷级数或反常积分不绝对收敛，则称随机变量的数学期望不存在．

▶2. 随机变量的数学期望的性质

(1) $\boldsymbol{E}c = c$（c 为常数）；　(2) $\boldsymbol{E}(cX) = c\boldsymbol{EX}$；

(3) $\boldsymbol{E}(X + c) = \boldsymbol{EX} + c$；　(4) $\boldsymbol{E}(X + Y) = \boldsymbol{EX} + \boldsymbol{EY}$；

(5) $\boldsymbol{E}[g_1(X) + g_2(X)] = \boldsymbol{E}g_1(X) + \boldsymbol{E}g_2(X)$；

(6) 如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有 $\boldsymbol{E}(XY) = \boldsymbol{EXEY}$．

www.TopSage.com

【注】 ①性质(4)可以推广到任意有限个随机变量之和的情况,即不管 X_i 之间是否相互独立,均有 $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EX_i$.

②性质(6)可以推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况(注意条件:相互独立.).

(二)随机变量函数的数学期望

▶1. 一维随机变量函数的数学期望

设 Y 是随机变量 X 的函数:$Y = g(X)$(g 是连续函数或分段连续函数).设离散型随机变量 X 具有分布律 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1,2,\cdots$,且无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛;设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f(x)$,且反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f(x)\,dx$ 绝对收敛,则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i & (X \text{ 为离散型}), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f(x)\,dx & (X \text{ 为连续型}). \end{cases} \tag{4.3}$$

▶2. 二维随机变量函数的数学期望

设 Z 是随机变量 X,Y 的函数:$Z = g(X,Y)$(g 是连续函数),那么,Z 是一个一维随机变量.设二维离散型随机变量 (X,Y) 具有分布律 $P\{X = x_i, Y = y_i\} = p_{ij}(i,j = 1,2,\cdots)$;设二维连续型随机变量 (X,Y) 具有联合概率密度 $f(x,y)$,则有

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij} & (Z \text{ 为离散型}), \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f(x,y)\,dxdy & (Z \text{ 为连续型}). \end{cases} \tag{4.4}$$

这里设上式右边的无穷级数或反常积分绝对收敛.

【例 4.1】 已知随机变量 X 与 Y 均服从 0-1 分布,且 $EXY = \frac{5}{8}$,则 $P\{X + Y \leqslant 1\} =$

(A) $\frac{1}{8}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{3}{8}$. (D) $\frac{1}{2}$.

【分析】 由 X 与 Y 均服从 0-1 分布,可以列出 (X,Y) 的联合分布如下:

X \ Y	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

又已知 $EXY = \frac{5}{8}$,即 $p_{22} = \frac{5}{8}$,从而 $P\{X + Y \leqslant 1\} = p_{11} + p_{12} + p_{21} = 1 - p_{22} = \frac{3}{8}$,故选(C).

【例 4.2】 已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处连续且 $F(1) = \frac{1}{4}$,若 $Y = \begin{cases} a, & X > 1, \\ b, & X = 1, \\ c, & X < 1, \end{cases}$ $abc \neq 0$,则 $EY =$ _____.

www.TopSage.com

【分析】 直接应用离散型随机变量期望公式计算. 由于 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续,故

$$\begin{aligned} EY &= aP\{X>1\} + bP\{X=1\} + cP\{X<1\} \\ &= a[1-P\{X\leqslant 1\}] + bP\{X=1\} + cP\{X<1\} \\ &= a[1-F(1)] + b[F(1)-F(1-0)] + cF(1-0) \\ &= a\left(1-\frac{1}{4}\right) + b\times 0 + c\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}c. \end{aligned}$$

大家网 TopSage.com

【例 4.3】 已知随机变量 X 在(1,2)上服从均匀分布,在 $X=x$ 条件下 Y 服从参数为 x 的指数分布,则 $E(XY)=$ _____.

【分析】 由题设知 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} xe^{-xy}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0, \end{cases}$ 所以 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} xe^{-xy}, & 1<x<2,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(xy)\,dxdy=\int_1^2 dx\int_0^{+\infty}xyxe^{-xy}dy=\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=1.$$

【注】 $\int_0^{+\infty}yxe^{-xy}dy=\frac{1}{x}(x>0)$ 是参数 $\lambda=x$ 的指数分布的数学期望.

二、随机变量的方差

▶1. 方差及标准差的概念

设 X 是一个随机变量,若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在,则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的**方差**,记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$,即 $D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$.

方差的算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 称为 X 的**均方差或标准差**. 称 $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 为 X 的**标准化随机变量**,此时有 $E(X^*)=0, D(X^*)=1$.

▶2. 方差的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2. \tag{4.5}$$

▶3. 方差的重要性质

假设 a,b 为任意常数,下列各式中期望、方差都存在,则

(1) $D(a)=0$;

(2) $D(aX)=a^2DX$, $D(aX+b)=a^2DX$;

(3) 设 X,Y 是两个随机变量,则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\},$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\};$$

特别,如果 X 与 Y 相互独立,则有 $D(X\pm Y)=DX+DY$; (4.6)

(4) 若 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 两两独立或两两不相关,则

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_m)=DX_1+DX_2+\cdots+DX_m;$$

(5) 对于任意随机变量 X,只要其方差存在,则 $DX\geqslant 0$,而且 $DX=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 $E(X)$,即 $P\{X=E(X)\}=1$;

(6) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,则 $DXY\geqslant DXDY$;

(7) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $EX=EY=0$,则 $DXY=DXDY$.

www.TopSage.com

【注】 ① 注意性质(2)中右边的系数是 a^2,不是 a;也要注意(4.6)式成立的条件:相互独立.
② 各常见分布的期望、方差公式(见第二章之表2.1与表2.2)考生应熟练掌握并会灵活应用.

【例4.4】 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立,其中 X_1 服从区间[0,6]上的均匀分布,X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$,X_3 服从参数为3的泊松分布,则 $\boldsymbol{D}(X_1 - 2X_2 + 3X_3) =$ _____.

【分析】 由题设可知,$\boldsymbol{D}X_1 = \dfrac{(6-0)^2}{12} = 3, \boldsymbol{D}X_2 = 2^2 = 4, \boldsymbol{D}X_3 = 3$,于是

$$\boldsymbol{D}(X_1 - 2X_2 + 3X_3) = \boldsymbol{D}X_1 + 4\boldsymbol{D}X_2 + 9\boldsymbol{D}X_3 = 3 + 4 \times 4 + 9 \times 3 = 46.$$

三、协方差与相关系数

对于二维随机变量 (X,Y),其数字特征不仅包括 X 与 Y 的数学期望和方差,而且还有 X 与 Y 之间相互关系的数字特征 —— 协方差和相关系数.

(一) 协方差

▶1. 协方差的概念

设 (X,Y) 是二维随机变量,如果 $\boldsymbol{E}[(X-\boldsymbol{E}X)(Y-\boldsymbol{E}Y)]$ 存在,则称它为随机变量 X 与 Y 的**协方差**,记作 $\mathrm{Cov}(X,Y)$,即 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \boldsymbol{E}[(X-\boldsymbol{E}X)(Y-\boldsymbol{E}Y)]$.

▶2. 协方差的计算公式

对任意两个随机变量 X,Y,有

$$(1)\mathrm{Cov}(X,Y) = \boldsymbol{E}(XY) - \boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y); \tag{4.7}$$

$$(2)\boldsymbol{D}(X \pm Y) = \boldsymbol{D}X + \boldsymbol{D}Y \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y). \tag{4.8}$$

▶3. 协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X,X) = \boldsymbol{D}X$;

(3) $\mathrm{Cov}(X,c) = 0$ (c 为任意常数);

(4) $\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\mathrm{Cov}(X,Y)$ (a,b 是常数);

(5) $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1,Y) + \mathrm{Cov}(X_2,Y)$;

(6) $[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 \leqslant \boldsymbol{D}X\boldsymbol{D}Y$;

(7) 如果 X 与 Y 独立,则 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

(二) 相关系数

▶1. 相关系数的概念

如果 X,Y 的方差都不等于零,则称 $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\boldsymbol{D}X}\sqrt{\boldsymbol{D}Y}}$ 为随机变量 X 与 Y 的**相关系数**.

▶2. 相关系数的性质

(1) $\rho_{XY} = \rho_{YX}$; (2) $\rho_{XX} = 1$;

(3) $|\rho_{XY}| \leqslant 1$; (4) 若 $X = aY + b$,则当 $a > 0$ 时,$\rho_{XY} = 1$;当 $a < 0$ 时,$\rho_{XY} = -1$;

(5) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充分必要条件是,存在常数 a,b,使 $\boldsymbol{P}\{Y = aX + b\} = 1$.

▶3. 随机变量 X 和 Y 不相关

如果随机变量 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = 0$(即 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$),则称 X 与 Y **不相关**. 关于随机变量 X 和 Y 的独立性与相关性,有如下结论:

www.TopSage.com

(1) 若随机变量 X 与 Y 独立,则 X 与 Y 一定不相关;但是若 X 与 Y 不相关,则 X 与 Y 不一定独立.

(2) 若随机变量 X 与 Y 的联合分布是二维正态分布,则 X 与 Y 独立的充要条件是 X 与 Y 不相关.

(3) 若随机变量 X 与 Y 都服从 0-1 分布,则 X 与 Y 独立的充要条件是 X 与 Y 不相关.

▶4. 对于随机变量 X 与 Y,下面四个结论是等价的

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$;　　(2) X 与 Y 不相关;

(3) $EXY=EXEY$;　　(4) $D(X+Y)=DX+DY$.

【例 4.5】 设 (X,Y) 为二维随机变量,则下列结论正确的是

(A) 若 X 与 Y 不相关,则 X^2 与 Y^2 不相关.

(B) 若 X^2 与 Y^2 不相关,则 X 与 Y 不相关.

(C) 若 X 与 Y 均服从正态分布,则 X 与 Y 独立和 X 与 Y 不相关等价.

(D) 若 X 与 Y 均服从 0-1 两点分布,则 X 与 Y 独立和 X 与 Y 不相关等价.

【分析】 对于(D):设 $X\sim B(1,p)$,$Y\sim B(1,q)$,当 X 与 Y 独立时 X 与 Y 不相关.反之,当 X 与 Y 不相关,即 $EXY=EXEY=pq$ 时,可得下列分布律

Y \ X	0	1	
0	$(1-p)(1-q)$	$p(1-q)$	$1-q$
1	$(1-p)$	pq	q
	$(1-p)$	p	1

由此可知 X 与 Y 独立.故此时 X 与 Y 独立和 X 与 Y 不相关等价,选(D).

由不相关的性质可排除(A)和(B).对于(C),当 X 与 Y 均服从正态分布时,(X,Y) 未必服从二维正态分布,故(C)不正确.

【例 4.6】 设二维随机变量 $(U,V)\sim N\left(2,2;4,1;\frac{1}{2}\right)$,$X=U-bV$,$Y=V$.

(Ⅰ) 问当常数 b 为何值时,X 与 Y 独立?

(Ⅱ) 求 (X,Y) 的密度函数 $f(x,y)$.

【解】 (Ⅰ) 由于 $X=U-bV$,$Y=V$,且 $\begin{vmatrix}1 & -b\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$,故 (X,Y) 服从二维正态分布,所以 X 与 Y 独立等价于 X 与 Y 不相关,即 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$,从而有

$$\mathrm{Cov}(U-bV,V)=0,\ \mathrm{Cov}(U,V)-bDV=0,\text{即}\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{1}-b\cdot 1=0,$$

解得 $b=1$,即当 $b=1$ 时,X 与 Y 独立.

(Ⅱ) 由正态分布的性质知 $X=U-V$ 服从正态分布,且

$$EX=EU-EV=2-2=0,$$

$$DX=D(U-V)=DU+DV-2\mathrm{Cov}(U,V)=4+1-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{1}=3,$$

所以 $X\sim N(0,3)$,同理 $Y=V\sim N(2,1)$.

又因为 X 与 Y 独立,故

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}e^{-\frac{x^2}{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{3}}e^{-\left[\frac{x^2}{6}+\frac{(y-2)^2}{2}\right]},\quad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

【例 4.7】 已知随机变量 X 与 Y 有相同的不为零的方差,则 X 与 Y 相关系数 $\rho=1$ 的充要条件是

www.TopSage.com

(A) $\mathrm{Cov}(X+Y,X)=0$. (B) $\mathrm{Cov}(X+Y,Y)=0$.

(C) $\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=0$. (D) $\mathrm{Cov}(X-Y,X)=0$.

【分析】 直接用定义通过计算确定正确选项. 已知 $DX=DY=\sigma^2>0$,故

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{DX}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Cov}(X,X)}=1\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y-X)=0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X-Y,X)=0,$$

选(D). 其余选项均不正确,这是因为当 $DX=DY$ 时,

$$\mathrm{Cov}(X+Y,X)=0\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,X)=-\mathrm{Cov}(X,Y)\Rightarrow \rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{-\mathrm{Cov}(X,Y)}=-1;$$

$$\mathrm{Cov}(X+Y,Y)=0\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=-\mathrm{Cov}(Y,Y)\Rightarrow \rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-\mathrm{Cov}(Y,Y)}{\mathrm{Cov}(Y,Y)}=-1;$$

$\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=0\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{Cov}(Y,Y)$,即 $DX=DY$.

【例 4.8】 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布,且方差 $\sigma^2>0$,记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则 $X_1-\overline{X}$ 与 $\overline{X}$ 的相关系数为

(A) -1. (B) 0. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

【分析】 由于 X_i 独立同分布,故 $DX_i=\sigma^2$, $D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$, $\mathrm{Cov}(X_1,X_i)=0(i\neq 1)$,

$$\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},\overline{X})=\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{X})=\mathrm{Cov}\Big(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)-D\overline{X}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_i)-D\overline{X}=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)-D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}=0,$$

故应选(B). (注:容易计算 $D(X_1-\overline{X})=\frac{n-1}{n}\sigma^2$.)

四、随机变量的矩

设 (X,Y) 是二维随机变量. 如果 $E(X^kY^l)$ 存在,则称 $E(X^k)(k=1,2,\cdots)$ 为 X 的 k 阶**原点矩**;称 $E(X-EX)^k(k=2,3,\cdots)$ 为 X 的 k 阶**中心矩**;称 $E(X^kY^l)(k,l=1,2,\cdots)$ 为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶**混合原点矩**;称 $E[(X-EX)^k(Y-EY)^l](k,l=1,2,\cdots)$ 为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶**混合中心矩**.

从上述定义看出:数学期望 EX 是 X 的一阶原点矩,方差 DX 是 X 的二阶中心矩,协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 是 X 与 Y 的混合二阶中心矩.

【例 4.9】 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+x-\frac{1}{4}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

则随机变量 X 的二阶原点矩为_____.

【分析】 依题设,即求 EX^2. 首先对所给概率密度作变换:对于 $x(-\infty<x<+\infty)$,有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+x-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{2}}},$$

www.TopSage.com

由此可知随机变量 X 服从正态分布，从而 $EX = \frac{1}{2}, DX = \frac{1}{2}$. 于是

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{3}{4}.$$

考题型及其解题方法与技巧

题型一　随机变量的期望与方差

【例 4.10】 设随机变量 X 在区间 $[-1,1]$ 上服从均匀分布，随机变量 (Ⅰ) $Y = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ 0, & X = 0, \\ -1, & X < 0; \end{cases}$ (Ⅱ) $Y = \frac{X}{1+X^2}$，试分别求出 DY 与 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

【解】 显然 Y 是 X 的函数：$Y = g(X)$，因此计算 DY 可以直接应用公式 $EY = Eg(X)$，或用定义计算.

(Ⅰ) 已知 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则

$$EY = Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} (-1)f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{-1}{2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = 0,$$

$$EY^2 = Eg^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1,$$

故 $$DY = EY^2 - E^2Y = 1.$$

或者 $$EY = 1 \times P\{Y = 1\} + 0 \times P\{Y = 0\} + (-1) \times P\{Y = -1\}$$

$$= P\{X > 0\} - P\{X < 0\} = \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = 0,$$

又 $Y^2 = \begin{cases} 1, & X \neq 0, \\ 0, & X = 0, \end{cases}$ 所以

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = EY^2 = P\{X \neq 0\} = P\{X > 0\} + P\{X < 0\} = 1,$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = EXY - EXEY = EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

(Ⅱ) 由于 $Y = \frac{X}{1+X^2} = g(X)$，故

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0,$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

又 $\mathrm{Cov}(X,Y) = EXY - EXEY$，其中 $EX = 0$，

$$EXY = E\frac{X^2}{1+X^2} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 1 - \arctan x\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4},$$

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

所以 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

【例 4.11】 投篮测试规则为每人最多投三次，投中为止，且第 i 次投中得分为 $(4-i)$ 分，$i = 1,2,3$. 若三次均未投中不得分，假设某人投篮测试中投篮的平均次数为 1.56 次.

（Ⅰ）求该人投篮的命中率；　（Ⅱ）求该人投篮的平均得分.

【解】 （Ⅰ）设该投篮人投篮次数为 X，投篮得分为 Y；每次投篮命中率为 $p(0 < p < 1)$，则 X 的概率分布为

$$\boldsymbol{P}\{X=1\} = p,\quad \boldsymbol{P}\{X=2\} = pq,\quad \boldsymbol{P}\{X=3\} = q^2,$$

$$\boldsymbol{E}X = p + 2pq + 3q^2 = p + 2p(1-p) + 3(1-p)^2 = p^2 - 3p + 3.$$

依题意　$p^2 - 3p + 3 = 1.56$，　即　$p^2 - 3p + 1.44 = 0$.

解得 $p = 0.6$（$p = 2.4$ 不合题意，舍去）.

（Ⅱ）Y 可以取 0,1,2,3 四个可能值，且

$$\boldsymbol{P}\{Y=0\} = q^3 = 0.4^3 = 0.064,\qquad \boldsymbol{P}\{Y=1\} = pq^2 = 0.6\times 0.4^2 = 0.096,$$

$$\boldsymbol{P}\{Y=2\} = pq = 0.6\times 0.4 = 0.24,\qquad \boldsymbol{P}\{Y=3\} = p = 0.6,$$

于是　$\boldsymbol{E}Y = \sum_{i=0}^{3} i\boldsymbol{P}\{Y=i\} = 2.376$（分）.

评注　①求命中率 p 就是求随机变量 X 分布列的未知参数问题，这可以根据题意列出一个以 p 为未知量的方程解决，但要注意作为命中率 p 是不能大于 1 的，故应舍去 $p = 2.4$ 这一解.

②求一个离散型随机变量分布律，首先应明确其全部可能取值，然后计算取各相应值的概率，前者一般是显而易见的，如本例中的投篮次数、投篮得分，而计算概率有时比较复杂.

③本例中若误认为 $\boldsymbol{P}\{X=3\} = pq^2$，则会出现 $\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{P}\{X=i\} \neq 1$ 的矛盾. 这是由于投篮测试规则限定每人最多可投三次，一位投篮者投了三次仅表明他前面两次未投中，不能说明他第三次是投中还是没有投中. 而事件“$Y=1$”，则表示投篮者投了三次且第三次投中了，其概率为 pq^2.

【例 4.12】 已知随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布，$\boldsymbol{P}\{X_1 + X_2 > 0\} = 1 - \mathrm{e}^{-1}$，则 $\boldsymbol{E}(X_1+X_2)^2 =$ _____.

【分析】 已知 $X_i \sim P(\lambda_i)$ 且相互独立，所以 $\boldsymbol{E}X_i = \boldsymbol{D}X_i = \lambda_i, i = 1,2$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X_1+X_2)^2 &= \boldsymbol{E}(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) = \boldsymbol{E}X_1^2 + 2\boldsymbol{E}X_1\boldsymbol{E}X_2 + \boldsymbol{E}X_2^2\\ &= \lambda_1 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_2^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1+\lambda_2)^2.\end{aligned}$$

为求得最终结果我们需要由已知条件求得 $\lambda_1 + \lambda_2$. 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\{X_1+X_2>0\} &= 1 - \boldsymbol{P}\{X_1+X_2\leqslant 0\} = 1 - \boldsymbol{P}\{X_1+X_2=0\}\\ &= 1 - \boldsymbol{P}\{X_1=0, X_2=0\} = 1 - \boldsymbol{P}\{X_1=0\}\boldsymbol{P}\{X_2=0\}\\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2} = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = 1 - \mathrm{e}^{-1},\end{aligned}$$

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$，故 $\boldsymbol{E}(X_1+X_2)^2 = 1 + 1 = 2$.

【例 4.13】 已知 (X,Y) 在以点 $(0,0),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，对 (X,Y) 作 4 次独立重复观察，观察值 $X+Y$ 不超过 1 出现的次数为 Z，则 $\boldsymbol{E}Z^2 =$ _____.

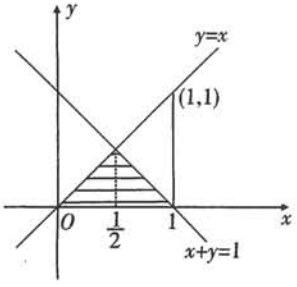


图 4.1

【分析】 由题设知 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases}2, & 0 < y < x < 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

若记 $A =$ “$X+Y\leqslant 1$”，则 Z 是 4 次独立重复试验事件 A 发生的次数，故 $Z \sim B(4,p)$，其中

www.TopSage.com

$$p = P(A) = P\{X + Y \leqslant 1\} = \iint\limits_{x+y\leqslant 1} f(x,y)\,dxdy$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

所以 $$EZ^2 = DZ + (EZ)^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(4 \times \frac{1}{2}\right)^2 = 5.$$

【例 4.14】 甲、乙两人相约于某地在 12:00 ~ 13:00 会面，设 X,Y 分别是甲、乙到达的时间，且假设 X 和 Y 相互独立，已知 X,Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求先到达者需要等待的时间的数学期望.

【解】 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^2y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

按题意需要求的是 $|X - Y|$ 的数学期望，即有（D_1, D_2 如图 4.2）

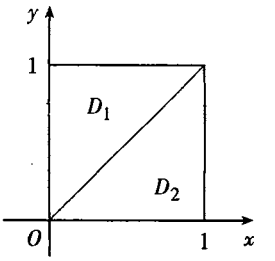


图 4.2

$$E(|X - Y|) = \int_0^1\int_0^1 |x - y|6x^2y\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_1} -(x - y)6x^2y\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x - y)6x^2y\,dxdy$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}(\text{小时}).$$

【例 4.15】 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从标准正态分布，求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的数学期望.

【解】 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$，$X$ 和 Y 相互独立，X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2},$$

于是 $$E(Z) = E(\sqrt{X^2 + Y^2}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2 + y^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy.$$

利用极坐标来计算，令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，得

$$E(Z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} r^2e^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta = \frac{2\pi}{2\pi}\int_0^{+\infty} r^2e^{-\frac{r^2}{2}}dr = -re^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

【注】 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}dr = 1.$

【例 4.16】 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x,y < +\infty,$$

记 $Z = X^2 + Y^2$. 求：(Ⅰ) Z 的密度函数；(Ⅱ) EZ, DZ；(Ⅲ) $P\{Z \leqslant 1\}$.

【解】 (Ⅰ) 当 $z \leqslant 0$ 时，$F(z) = 0$；当 $z > 0$ 时，

$$F(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{X^2 + Y^2 \leqslant z\}$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z} \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy \xrightarrow{\substack{x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta}} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr = \int_0^{\sqrt{z}} \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr,$$

于是 $$f_Z(z) = F'(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

由此可以看出，Z 服从参数为 $\dfrac{1}{2\sigma^2}$ 的指数分布.

www.TopSage.com

(Ⅱ) **方法 1°** 由(Ⅰ)的结果(指数分布)可知,$EZ = 2\sigma^2$,$DZ = 4\sigma^4$.

方法 2° 由$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$可知,$X$与$Y$相互独立,且$X^2$与$Y^2$也独立,又$X \sim N(0,\sigma^2)$,$Y \sim N(0,\sigma^2)$,故

$$EZ = E(X^2 + Y^2) = EX^2 + EY^2 = 2DX = 2\sigma^2,$$

$$DZ = D(X^2 + Y^2) = DX^2 + DY^2 = 2DX^2,$$

$$EX^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \sigma^4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{x^2}{2\sigma^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^4 \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3\sigma^4,$$

$$DX^2 = EX^4 - (EX^2)^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4,$$

故 $$DZ = 4\sigma^4.$$

(Ⅲ) $$P\{Z \leqslant 1\} = \int_0^1 \frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}dz = -e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}\Big|_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}.$$

或 $P\{Z \leqslant 1\} = F(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$($Z$服从参数为$\frac{1}{2\sigma^2}$的指数分布).

评注 用方法 2° 求DZ是比较麻烦的,当不知道Z的分布时可用此法.若已求出Z的分布,而没有注意到它是指数分布,没有用指数分布的期望、方差公式,而是再用定义求EZ与DZ也还是有一定的计算量,所以适当选择计算方法很重要.

【例 4.17】 设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立,且都服从数学期望为 1 的指数分布,求$Z = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$的数学期望和方差.

【解】 $X_i(i = 1,2,\cdots,n)$的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

根据(3.29)式$Z = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$的分布函数为

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F(z)]^n = \begin{cases} 1 - e^{-nz}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Z的概率密度为$f_Z(z) = \begin{cases} ne^{-nz}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

于是 $$E(Z) = \int_0^{+\infty} zne^{-nz}dz = \frac{1}{n}\Gamma(2) = \frac{1}{n}.$$

而 $$E(Z^2) = \int_0^{+\infty} z^2ne^{-nz}dz = \frac{1}{n^2}\Gamma(3) = \frac{2}{n^2},$$

于是 $$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{1}{n^2}.$$

评注 ① 由Z服从参数为n的指数分布可知,$EZ = \frac{1}{n}$,$DZ = \frac{1}{n^2}$.

② 该题在求解过程中用了Γ函数,它在概率统计的计算中提供了很多方便,希望读者能掌握Γ函数的定义与简单性质.

定义 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx(\alpha > 0)$.

性质 $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n + 1) = n!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

www.TopSage.com

【例 4.18】 已知某自动生产线一旦出现不合格品就立即进行调整，经过调整后生产出的产品为不合格品的概率是 0.1，如果用 X 表示两次调整之间生产出的产品数，则 $EX=$ _____.

【分析】 显然 X 是离散型随机变量，可能取值为 $1,2,\cdots$，且 $P\{X=k\}=P\{$调整后生产出的产品前 $k-1$ 个为合格品，第 k 个为不合格品$\}\xlongequal{记}P(A_1\cdots A_{k-1}\overline{A}_k)$，其中 $A_i=$“第 i 个生产出的产品为合格品”，A_i 相互独立，$P(A_i)=0.9$，故

$$P\{X=k\}=0.9^{k-1}\times 0.1,$$

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\times 0.9^{k-1}\times 0.1\xlongequal{令\,q=0.9}0.1\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'$$

$$=0.1\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=0.1\times\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{0.1}{(1-q)^2}=\frac{0.1}{0.1^2}=10.$$

评注 若能看出本例中的随机变量 X 服从参数 $p=0.1$ 的几何分布，作为填空题可以直接根据常见分布的期望公式填写 $EX=\dfrac{1}{p}=10$.

【例 4.19】 已知两袋内各装有 9 个球，都是 6 个红球与 3 个白球，现从第 1 袋内任取 3 个球放入第 2 袋中，求第 2 袋内白球数目 X 的期望与方差.

【分析】 用 Y 表示从第 1 袋内取出的白球数目，则 $X=Y+3$. 只要求出 EY 与 DY 即可.

【解法一】 易见 Y 服从超几何分布，其中参数 $n=3,M=3,N=9$，则

$$EY=n\cdot\frac{M}{N}=1,\qquad DY=n\cdot\frac{M}{N}\cdot\frac{N-M}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}=\frac{1}{2},$$

$$EX=E(Y+3)=4,\qquad DX=D(Y+3)=DY=\frac{1}{2}.$$

【解法二】 先求 X 的概率分布，再计算 EX 与 DX.

$$P\{X=k\}=P\{Y=k-3\}=\frac{C_3^{k-3}C_6^{6-k}}{C_9^3},k=3,4,5,6,$$

即

X	3	4	5	6
p	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$

$$EX=\sum_{k=3}^{6}kP\{X=k\}=3\times\frac{20}{84}+4\times\frac{45}{84}+5\times\frac{18}{84}+6\times\frac{1}{84}=4,$$

$$EX^2=\sum_{k=3}^{6}k^2P\{X=k\}=\frac{9\times 20}{84}+\frac{16\times 45}{84}+\frac{25\times 18}{84}+36\times\frac{1}{84}=\frac{33}{2},$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{33}{2}-16=\frac{1}{2}.$$

【解法三】 令 $X_i=\begin{cases}0, & \text{从第 1 袋中取出的第 } i \text{ 个球是红球},\\ 1, & \text{从第 1 袋中取出的第 } i \text{ 个球是白球},\end{cases}$ 则 X_i 服从参数 $p=\dfrac{1}{3}$ 的 0-1 分布，且 $EX_i=\dfrac{1}{3},DX_i=\dfrac{2}{9},i=1,2,3$. 由于 $X=Y+3=X_1+X_2+X_3+3$，所以

$$EX=E(Y+3)=EY+3=EX_1+EX_2+EX_3+3=4,$$

$$EX_1X_2=P\{X_1X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\mid X_1=1\}$$

$$=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{12},$$

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=EX_1X_2-EX_1EX_2=-\frac{1}{36},$$

www.TopSage.com

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)=\mathrm{Cov}(X_2,X_3)=\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=-\frac{1}{36},$$

$$DX=D(Y+3)=DY=D(X_1+X_2+X_3)$$

$$=DX_1+DX_2+DX_3+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=3\times\frac{2}{9}+2\times 3\times\left(\frac{-1}{36}\right)=\frac{1}{2}.$$

评注 本例的3种解法用到了求一个随机变量期望和方差的4种主要方法：

方法1° 直接用期望和方差定义.

方法2° 应用期望与方差的性质和随机变量函数的期望公式.

方法3° 应用常见分布的期望与方差公式.

方法4° 将一个随机变量分解求期望和方差(如本例中【解法三】、【例4.20】等). 比如,将一个随机变量X表示为一些简单随机变量$X_1,\cdots,X_n$之和,通过这些简单随机变量X_i的期望EX_i、方差DX_i、协方差$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$,再应用期望与方差的性质计算出所要求的随机变量X的期望与方差,即$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$,则有

$$EX=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}EX_i;\quad DX=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

【例4.20】 设盒子中装有m个颜色各异的球,有放回地抽取n次,每次1个球. 设X表示n次中抽到的球的颜色种数,则$EX=$_____.

【分析】 令$X_i=\begin{cases}1, & n\text{次中抽到过第}i\text{种颜色的球}(i=1,\cdots,m),\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$则$X=X_1+X_2+\cdots+X_m$.

事件"$X_i=0$"表示n次中没有抽到第i种颜色的球,由于是有放回抽取,n次中各次抽取结果互不影响,因此有

$$P\{X_i=0\}=\left(1-\frac{1}{m}\right)^n,\quad P\{X_i=1\}=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n.$$

$$EX=E\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)=\sum_{i=1}^{m}EX_i=m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right].$$

题型二　两个随机变量及其函数的数字特征

【例4.21】 设A,B为相互独立的随机事件,$0<P(A)=p<1$,且A发生B不发生与B发生A不发生的概率相等. 记随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{发生},\\ 0, & \text{若}\overline{A}\text{发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若}AB\text{发生},\\ 0, & \text{若}\overline{AB}\text{发生},\end{cases}$$

试求X与Y的相关系数ρ.

【分析与解答】 首先要求出X,Y,XY的分布,从而计算得$EX,DX;EY,DY;EXY$,最后计算得ρ.

由题设知$P(\overline{A}B)=P(B\overline{A})$,即$P(A-B)=P(B-A)$,$P(A)-P(AB)=P(B)-P(BA)$,故$P(A)=P(B)=p$. 又$A$与$B$独立,所以$P(AB)=P(A)P(B)=p^2$. 从而得$X,Y,XY$的分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p^2 & 1-p^2\end{pmatrix},\quad XY\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p^2 & 1-p^2\end{pmatrix}$$

(这是因为$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=p^2$).

由　$EX=p,DX=p(1-p);EY=p^2,DY=p^2(1-p^2);$

$$EXY=p^2,\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=p^2-p^3=p^2(1-p),$$

www.TopSage.com

得 $$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{p^2(1-p)}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{p^2(1-p^2)}}=\sqrt{\frac{p}{1+p}}.$$

大家网 TopSage.com

【例 4.22】 已知二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	1	$P\{X=x_i\}$
-1	0.1	a	0.1	
1	b	0.1	c	0.5
$P\{Y=y_j\}$				

且$P\{X=1\}=0.5$,X与Y不相关.

(Ⅰ)求未知参数a,b,c;

(Ⅱ)事件$A=\{X=1\}$与$B=\{\max(X,Y)=1\}$是否独立,为什么?

(Ⅲ)随机变量$X+Y$与$X-Y$是否相关,是否独立?

【分析与解答】 (Ⅰ)应用联合分布、边缘分布关系及X与Y不相关求参数a、b、c.

由于$P\{X=1\}=0.5$,故$P\{X=-1\}=0.5$,$a=0.5-0.1-0.1=0.3$.

又X与Y不相关$\Rightarrow E(XY)=EX\cdot EY$,其中$EX=(-1)\times0.5+1\times0.5=0$.

XY可能取值为$-1,0,1$,且

$$P\{XY=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}=0.1+b,$$

$$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=0.1+c,$$

$$P\{XY=0\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=a+0.1,$$

所以$E(XY)=-0.1-b+0.1+c=c-b$,由$E(XY)=EXEY=0\Rightarrow c-b=0$,$b=c$,

又$b+0.1+c=0.5$,所以$b=c=0.2$.

(Ⅱ)由于$A=\{X=1\}\subset B=\{\max(X,Y)=1\}$,$P(AB)=P(A)=0.5$,$0<P(B)<1$,又$P(A)P(B)=0.5P(B)<0.5=P(AB)$,即$P(AB)\neq P(A)P(B)$,所以$A$与$B$不独立.

(Ⅲ)因为$\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=DX-DY$,

$$DX=EX^2-(EX)^2=1,EY=0,DY=EY^2-(EY)^2=0.6,$$

所以$\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=1-0.6=0.4\neq0$,$X+Y$与$X-Y$相关$\Rightarrow$ $X+Y$与$X-Y$不独立.

评注 我们也可以应用定义证明$X+Y$与$X-Y$不独立.例如

$P\{X+Y=0,X-Y=0\}=P\{X=-Y,X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}=0$,而

$P\{X+Y=0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}=0.1+0.2=0.3$,

$P\{X-Y=0\}=P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}=0.1+0.2=0.3$,

所以$P\{X+Y=0,X-Y=0\}\neq P\{X+Y=0\}\cdot P\{X-Y=0\}$,$X+Y$与$X-Y$不独立.

【例 4.23】 设甲、乙两人随机决定次序对同一目标进行独立地射击,并约定:若第一次命中,则停止射击,否则由另一人进行第二次射击,不论命中与否,停止射击.设甲、乙两人每次射击命中目标的概率依次为0.6和0.5.

(Ⅰ)计算目标第二次射击时被命中的概率;

(Ⅱ)设X,Y分别表示甲、乙的射击次数,求X与Y的相关系数ρ_{XY}.

【解】 (Ⅰ)设A表示甲先射击,则$\bar{A}$表示乙先射击,又设B_i表示在第i次射击时目标被命中$(i=1,2)$,则由题意,有

www.TopSage.com

$$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2},\quad P(B_2 \mid A) = 0.4 \times 0.5 = 0.2,\quad P(B_2 \mid \bar{A}) = 0.5 \times 0.6 = 0.3.$$

由全概率公式即得

$$P(B_2) = P(A)P(B_2 \mid A) + P(\bar{A})P(B_2 \mid \bar{A}) = \frac{1}{2} \times 0.2 + \frac{1}{2} \times 0.3 = 0.25.$$

(Ⅱ) 由题意知 $P\{X = 0, Y = 0\} = 0$, $P\{X = 1, Y = 0\} = P(AB_1) = 0.3$,

$$P\{X = 0, Y = 1\} = P(\bar{A}B_1) = 0.25,\quad P\{X = 1, Y = 1\} = 0.45,$$

所以 (X,Y) 的分布律及边缘分布律为

Y \ X	0	1	
0	0	0.3	0.3
1	0.25	0.45	0.7
	0.25	0.75	1

计算得 $EX = 0.75, EY = 0.7, DX = 0.25 \times 0.75, DY = 0.3 \times 0.7, E(XY) = 0.45$,于是

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{0.45 - 0.75 \times 0.7}{\sqrt{0.25 \times 0.75}\sqrt{0.3 \times 0.7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

【例 4.24】 设随机变量 U 服从二项分布 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$,随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leqslant 0, \\ 1, & \text{若 } U > 0; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & \text{若 } U < 2, \\ 1, & \text{若 } U \geqslant 2. \end{cases}$$

求随机变量 $X - Y$ 与 $X + Y$ 的方差和 X 与 Y 的协方差.

【解法一】 先求出 X 与 Y 的概率分布及 XY 的概率分布. 即

$$P\{X = -1\} = P\{U \leqslant 0\} = P\{U = 0\} = \frac{1}{4},\quad P\{X = 1\} = \frac{3}{4},$$

$$P\{Y = -1\} = P\{U < 2\} = 1 - P\{U = 2\} = \frac{3}{4},\quad P\{Y = 1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{XY = -1\} = P\{X = -1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P\{XY = 1\} = 1 - P\{XY = -1\} = \frac{1}{2}.$$

其次计算 EX, EY, DX, DY 与 $E(XY)$. 即

$$EX = -P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2},\quad EY = -\frac{1}{2},$$

$$EX^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,\quad DX = \frac{3}{4},\quad DY = \frac{3}{4},$$

$$E(XY) = -P\{XY = -1\} + P\{XY = 1\} = 0.$$

最后应用公式可得

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY = \frac{1}{4},$$

$$D(X + Y) = DX + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + DY = 2,$$

$$D(X - Y) = DX - 2\mathrm{Cov}(X,Y) + DY = 1.$$

【解法二】 先求出 $X \pm Y$ 的概率分布. 即

$$P\{X + Y = -2\} = P\{X = -1, Y = -1\} = P\{U \leqslant 0, U < 2\} = P\{U = 0\} = \frac{1}{4},$$

www.TopSage.com

$$P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2},\qquad P\{X+Y=2\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X-Y=0\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}$$

$$=P\{U=0\}+P\{U=2\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X-Y=2\}=\frac{1}{2}.$$

其次,计算 $E(X\pm Y),D(X\pm Y)$. 即

$$E(X+Y)=0,\quad D(X+Y)=E(X+Y)^2=2,$$

$$E(X-Y)=1,\quad E(X-Y)^2=2,\quad D(X-Y)=1.$$

最后计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$. 解方程组

$$\begin{cases}D(X+Y)=DX+2\mathrm{Cov}(X,Y)+DY,\\ D(X-Y)=DX-2\mathrm{Cov}(X,Y)+DY,\end{cases}$$

可得

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{4}[D(X+Y)-D(X-Y)]=\frac{1}{4}.$$

评注 本题亦可先求出 (X,Y) 的联合概率分布,即

$$(X,Y)\sim\begin{bmatrix}(-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1)\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

然后通过联合概率分布计算有关分布及所需数字特征.

【例 4.25】 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}ye^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

(Ⅰ)求 X 与 Y 的相关系数;

(Ⅱ)令 $Z=XY$,求 Z 的数学期望与方差.

【解法一】 求 X 与 Y 的相关系数通常是计算 EX,EY,DX,DY,EXY,然后根据公式求得 ρ_{XY}.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}xye^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}ye^{-y}\mathrm{d}y=1,$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^2ye^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}ye^{-y}\mathrm{d}y=\Gamma(3)\cdot\Gamma(2)=2,$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=1.$$

同样方法可以计算出 $EY=DY=2$. 又

$$EZ=EXY=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}xy^2e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(3)\cdot\Gamma(2)=2,$$

$$E(XY)^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^2y^3e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}y^3e^{-y}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(4)\cdot\Gamma(3)=12.$$

(Ⅰ)由于 $\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$,故

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0.$$

(Ⅱ) $DZ=DXY=E(XY)^2-[E(XY)]^2=12-2^2=8.$

【解法二】 首先计算 X,Y 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}ye^{-(x+y)}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

www.TopSage.com

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

(Ⅰ)计算得知,对任何 x,y,都有 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$,因此 X 与 Y 独立,从而其相关系数 $\rho_{XY} = 0$.

(Ⅱ)根据 X,Y 的边缘概率密度可以求出它们的数字特征:

$$EX = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1; \quad EX^2 = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2;$$

$$EY = \int_0^{+\infty} y^2e^{-y}dy = 2; \quad EY^2 = \int_0^{+\infty} y^3e^{-y}dy = 6.$$

由(Ⅰ)知 X 与 Y 独立,因此 X^2 与 Y^2 也独立.于是

$$EZ = E(XY) = EXEY = 2,$$

$$EZ^2 = E(XY)^2 = E(X^2Y^2) = EX^2EY^2 = 2 \times 6 = 12,$$

故 $$DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 8.$$

【例 4.26】 已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

记 $U = \begin{cases} 0, & X + Y \leqslant 1, \\ 1, & X + Y > 1, \end{cases}$ $V = \begin{cases} 0, & X + Y \leqslant 2, \\ 1, & X + Y > 2. \end{cases}$

(Ⅰ)求 (U,V) 的概率分布; (Ⅱ)求 U 和 V 的相关系数 ρ.

【分析与解答】 (Ⅰ)由题设易求得 U,V 的概率分布进而可求出 (U,V) 的概率分布.由于

$$P\{U = 0\} = P\{X + Y \leqslant 1\} = \iint\limits_{x+y\leqslant 1} f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$P\{U = 1\} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

$$P\{V = 0\} = P\{X + Y \leqslant 2\} = \iint\limits_{x+y\leqslant 2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$P\{V = 1\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

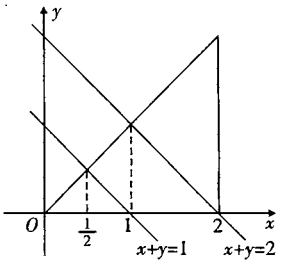


图 4.3

又 $$P\{U = 0, V = 1\} = P\{X + Y \leqslant 1, X + Y > 2\} = 0,$$

故 (U,V) 的概率分布为

U \ V	0	1	
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

(Ⅱ)由 (U,V) 的概率分布可求得 U 与 V 的相关系数 ρ.由于 U,V 分别服从 0-1 分布,故

$$EU = \frac{7}{8}, \quad EV = \frac{1}{2}, \quad DU = \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{64}, \quad DV = \frac{1}{4}.$$

又 $EUV = \frac{1}{2}$,于是 U 与 V 的相关系数

www.TopSage.com

$$\rho = \frac{EUV - EUEV}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{16}}{\frac{\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

【例 4.27】 设二维连续型随机变量(X,Y)在区域$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$上服从均匀分布.(Ⅰ)问$X$与$Y$是否相互独立;(Ⅱ)求$X$与$Y$的相关系数.

【解】 依题意,(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

(Ⅰ)为判断X与Y的相互独立性,先要计算边缘密度$f_X(x)$与$f_Y(y)$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \quad (|x| \leqslant 1).$$

当$|x| > 1$时,$f_X(x) = 0$.

类似地,有 $$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & |y| \leqslant 1, \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

当$x = y = 0$时,$f(0,0) = \frac{1}{\pi}$,而$f_X(0) f_Y(0) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}$.显然它们不相等,因此随机变量$X$与$Y$不是相互独立的.

(Ⅱ)$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx = 0.$$

在这里,被积函数是奇函数,而积分区间$[-1,1]$又是关于原点对称的区间,故积分值为零.类似地,有

$$EY = 0,$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{xy}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\,dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = 0.$$

故 $$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY = 0, \quad \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0.$$

评注 本例的结论告诉我们:两个随机变量X与Y不是相互独立的,但其相关系数ρ_{XY}仍可以为零.这时,虽然我们说X与Y不相关,但这里指的是线性不相关,并不排除X与Y具有其他类型的相互关系.

【例 4.28】 假设随机变量X的密度函数$f(x) = ce^{-\lambda|x|}(\lambda > 0, -\infty < x < +\infty)$,$Y = |X|$.

(Ⅰ)求常数c及EX,DX;

(Ⅱ)X与Y是否相关?为什么?

(Ⅲ)X与Y是否独立?为什么?

【分析与解答】 应用$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$求$c$;应用公式及充要条件解答其他问题.

(Ⅰ)由于$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$,所以$c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|x|}dx = 2c\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{2c}{\lambda} = 1$,故$c = \frac{\lambda}{2}$.

又$f(x)$是偶函数,且反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$收敛,所以

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = 0,$$

$$DX = EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = 2 \cdot \frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}(\text{应用指数分布某些结果}).$$

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

（Ⅱ）由于$f(x)$是偶函数，故$EXY = EX|X| = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|f(x)\mathrm{d}x = 0$，而$EX = 0$，所以$EXY = EX \cdot EY$，故$X$与$Y$不相关.

（Ⅲ）下面我们应用事件关系证明X与$Y = |X|$不独立.因为

$$\{|X| \leqslant 1\} \subset \{X \leqslant 1\}, \text{又 } P\{|X| \leqslant 1\} = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \neq 0, \quad P\{X \leqslant 1\} = \int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x \neq 1,$$

所以$\{|X| \leqslant 1\}$与$\{X \leqslant 1\}$不独立（包含关系不独立），故X与$Y = |X|$不独立.

【例 4.29】 将一颗骰子重复投掷n次，随机变量X表示出现点数小于3的次数，Y表示出现点数不小于3的次数.求$3X + Y$与$X - 3Y$的相关系数.

【解】 依题意，X服从二项分布，参数p为掷一颗骰子出现点数小于3的概率，即$p = \frac{1}{3}$，因此有

$$X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right), \qquad EX = \frac{n}{3}, \qquad DX = \frac{2n}{9};$$

$$Y = n - X \sim B\left(n, \frac{2}{3}\right), \qquad EY = \frac{2n}{3}, \qquad DY = \frac{2n}{9};$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, n - X) = -DX = -\frac{2}{9}n.$$

又

$$D(3X + Y) = 9DX + 6\mathrm{Cov}(X,Y) + DY = 4DX = \frac{8n}{9},$$

$$D(X - 3Y) = DX - 6\mathrm{Cov}(X,Y) + 9DY = 16DX = \frac{32n}{9},$$

$$\mathrm{Cov}(3X + Y, X - 3Y) = 3DX - 8\mathrm{Cov}(X,Y) - 3DY = 8DX = \frac{16n}{9}.$$

于是，$3X + Y$与$X - 3Y$的相关系数ρ为

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(3X + Y, X - 3Y)}{\sqrt{D(3X + Y)}\sqrt{D(X - 3Y)}} = \frac{\frac{16n}{9}}{\sqrt{\frac{8n}{9}}\sqrt{\frac{32n}{9}}} = 1.$$

评注 计算本题的一个更简便方法是：由

$$3X + Y = 3X + n - X = 2X + n, \quad X - 3Y = 4X - 3n \Rightarrow X - 3Y = 2(3X + Y) - 5n.$$

由于随机变量$X - 3Y$是$3X + Y$的线性函数，因此它们的相关系数$\rho = 1$.

题型训练

一、选择题

1. 设二维随机变量(X,Y)满足$E(XY) = EXEY$，则X与Y

（A） 相关. （B） 不相关. （C） 独立. （D） 不独立.

2. 将一枚硬币重复掷n次，以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数，则X和Y的相关系数等于

（A） -1. （B） 0. （C） $\frac{1}{2}$. （D） 1.

3. 对于任意二随机变量X和Y，与命题“X和Y不相关”不等价的是

（A） $EXY = EXEY$. （B） $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

（C） $DXY = DXDY$. （D） $D(X + Y) = DX + DY$.

4. 假设随机变量X在区间$[-1,1]$上均匀分布，则$U = \arcsin X$和$V = \arccos X$的相关系数等于

（A） -1. （B） 0. （C） 0.5. （D） 1.

www.TopSage.com

二、填空题

1. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z = 2X - 1$，则 Y 与 Z 的相关系数为_____.

2. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5，$EX = EY = 0$，$EX^2 = EY^2 = 2$，则 $E(X+Y)^2 =$ _____.

三、计算题与应用题

1. 设随机变量 X 服从(0,1)上的均匀分布，求下列 $Y_i(i = 1,2,3,4)$ 的数学期望和方差：

   (Ⅰ) $Y_1 = e^X$；　(Ⅱ) $Y_2 = -2\ln X$；　(Ⅲ) $Y_3 = \dfrac{1}{X}$；　(Ⅳ) $Y_4 = X^2$.

2. 设随机变量 X,Y 相互独立，已知 X 在[0,1]上服从均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布. 求(Ⅰ)随机变量 $Z = 2X + Y$ 的密度函数；(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(Y,Z)$，并判断 X 与 Z 的独立性.

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < y < x, \quad 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

   试求：(Ⅰ)数学期望 EX,EY；(Ⅱ)方差 DX,DY；(Ⅲ)协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，$D(5X-3Y)$.

4. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ 上服从均匀分布，令 $Z = \min(X,Y)$，求 EZ 与 DZ.

5. 设 X 与 Y 是两个随机变量，已知随机变量 $3X+Y$ 与 $2X-3Y$ 的方差、协方差分别是 $D(3X+Y) = 333$，$D(2X-3Y) = 280$，$\mathrm{Cov}(3X+Y, 2X-3Y) = -42$. 试求 $X-2Y$ 与 $2X+3Y$ 的方差、协方差.

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，$Z = \max\{X,Y\}$，求 EZ.

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{12}$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本，$EX = \mu$，$DX = \sigma$. 记 $Y_1 = X_1 + \cdots + X_8$，$Y_2 = X_5 + \cdots + X_{12}$，求 Y_1 与 Y_2 的相关系数.

8. 写了 n 封信，但信封上的地址是以随机的次序写的，设 Y 表示地址恰好写对的信的数目，求 EY 及 DY.

9. 设随机变量 X 和 Y 独立，并且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求随机变量 $Z = \min(X,Y)$ 的数学期望.

www.TopSage.com

第五章　大数定律和中心极限定理

内容概要与重难点提示

大数定律与中心极限定理都是讨论随机变量序列的极限定理，它们是概率论中比较深入的理论结果.

切比雪夫不等式作为一个引理，可以用它直接证明出切比雪夫大数定律.伯努利大数定律虽然是最简单的大数定律，但是它以严格的数学形式描述了在一定条件下，重复进行大量独立试验，随机事件频率的稳定性.考生应特别注意**切比雪夫大数定律、伯努利大数定律**与**辛钦大数定律**这三个大数定律成立的条件有何异同.

另有一类很重要的极限定理是中心极限定理，它是概率论中一切关于“随机变量之和在一定条件下的极限分布是正态分布”的定理的总称.定理形式有多种，实际中最常用的有：列维 - 林德伯格定理（独立同分布的中心极限定理），棣莫弗 - 拉普拉斯定理（二项分布的极限分布）.考生要会用相关定理近似计算有关随机事件的概率.

考核知识要点讲解

一、大数定律

（一）依概率收敛

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是一个随机变量序列，a 是一个常数，若对于任意正数 ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ **依概率收敛于 a**，记为 $Y_n \xrightarrow{P} a$.

依概率收敛的序列有以下的性质：

设 $X_n \xrightarrow{P} a$，$Y_n \xrightarrow{P} b$，又设函数 $g(x,y)$ 在点 (a,b) 连续，则 $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b)$.

（二）切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望和方差都存在，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|X - EX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}, \quad \text{或} \quad P\{|X - EX| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

切比雪夫不等式给出了在随机变量 X 的分布未知，而只知道 $E(X)$ 和 $D(X)$ 的情况下估计概率 $P\{|X - E(X)| < \varepsilon\}$ 的界限.

【例 5.1】 将一颗骰子连续重复掷 4 次，以 X 表示 4 次掷出的点数之和，则根据切比雪夫不等式，$P\{10 < X < 18\} \geqslant$ _____.

【分析】 以 $X_k (k = 1,2,3,4)$ 表示第 k 次掷出的点数，则 X_k 独立同分布：$P\{X_k = i\} = \frac{1}{6} (i = 1,$

2,…,6). 所以

$$EX_k = \frac{1}{6}(1 + 2 + \cdots + 6) = \frac{7}{2}, \quad EX_k^2 = \frac{1}{6}(1 + 2^2 + \cdots + 6^2) = \frac{91}{6},$$

$$DX_k = EX_k^2 - (EX_k)^2 = \frac{35}{12}.$$

又由于 $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$,而 $X_k(k = 1,2,3,4)$ 相互独立,所以

$$EX = 4 \times \frac{7}{2} = 14, \quad DX = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$

因此,根据切比雪夫不等式,有

$$P\{10 < X < 18\} = P\{-4 < X - 14 < 4\} = P\{|X - 14| < 4\}$$

$$= P\{|X - EX| < 4\} \geqslant 1 - \frac{DX}{4^2} = \frac{13}{48}.$$

(三) 切比雪夫大数定律

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,数学期望 EX_i 和方差 DX_i 都存在,并且方差有公共上界,即 $DX_i \leqslant c, i = 1,2,\cdots$,则对任意 $\varepsilon > 0$,都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

(四) 伯努利大数定律

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立并且都服从参数为 p 的 0-1 分布,则对任意 $\varepsilon > 0$,都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

如果用 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数,而 $p(0 < p < 1)$ 是事件 A 在每次试验中发生的概率即 X 服从参数为 n,p 的二项分布,则伯努利大数定律的结论是:对任意 $\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

(五) 辛钦大数定律

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ 相互独立同分布,期望存在,记 μ 为它们共同的期望,则对任意 $\varepsilon > 0$,都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

【例 5.2】 假设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布,X_i 的概率密度是 $f(x)$,问 $X_1, X_2, \cdots$ 是否一定满足大数定律?

【解】 尽管随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立而且具有相同的概率分布密度,但是由于不知道它们的期望是否存在,因此不能认为它们一定满足大数定律.

评注 对于大数定律,主要应该了解各不同大数定律的条件,注意它们间条件的区别.切比雪夫大数定律中虽然只要求 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立而不要求具有相同的分布,但是对于方差却要求是一致有界的.伯努利大数定律则要求 $X_1, X_2, \cdots$ 不仅相互独立同分布,而且要求它们都服从同参数的 0-1 分布.辛钦大数定律并不要求 X_i 方差的存在性,但要求 $X_1, X_2, \cdots$ 不仅相互独立,而且要有相同的分布,且期望存在.比如,密度函数均为柯西分布 $f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$ 的相互独立随机变量序列,由于各随机变量的期望不存在,因而就不满足大数定律.

www.TopSage.com

二、中心极限定理

（一）列维-林德伯格定理（独立同分布的中心极限定理）

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布，且数学期望和方差存在：$E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 > 0 (k = 1, 2, \cdots)$，则对任意实数 x，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \leqslant x\right\} = \Phi(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

【注】 ① 定理的三个条件："独立、同分布、数学期望与方差存在"，缺一不可.

② 只要 X_n 满足定理条件，那么当 n 很大时，独立同分布随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从正态分布 $N(n\mu, n\sigma^2)$，且 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的标准化随机变量 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$. 由此可知：当 n 很大时有 $P\{a \leqslant \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant b\} \approx \Phi\left(\dfrac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$，这常常是解题的依据. 只要题目涉及独立同分布随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n} X_i$，我们就要考虑中心极限定理.

【例 5.3】 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则根据列维-林德伯格中心极限定理，当 n 充分大时 S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

(A) 有相同期望和方差.　　(B) 服从同一离散型分布.

(C) 服从同一均匀分布.　　(D) 服从同一连续型分布.

【分析】 因为列维-林德伯格中心极限定理的条件是，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布而且各个随机变量的数学期望和方差存在. 显然 4 个选项中只有选项(C)满足此条件：均匀分布的数学期望和方差都存在.

选项(A)不成立，因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 有相同期望和方差，但未必有相同的分布，所以不满足列维-林德伯格中心极限定理的条件；而选项(B)和(D)虽然满足同分布，但数学期望和方差未必存在，因此也不满足列维-林德伯格中心极限定理的条件，故选项(B)和(D)一般也不能保证中心极限定理成立.

（二）棣莫弗-拉普拉斯定理（二项分布以正态分布为其极限分布）

假设随机变量 Y_n 服从参数为 $n, p (0 < p < 1, n = 1, 2, \cdots)$ 的二项分布，则对任何实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \Phi(x).$$

【注】 (1) 如果记 $X_i \sim B(1,p) (0 < p < 1)$，即 $X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ 且相互独立，则 $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$，由列维-林德伯格定理推出该定理.

(2) 该定理表明，当 n 充分大时，服从 $B(n,p)$ 的随机变量 Y_n 的标准化随机变量 $\dfrac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，或者说 Y_n 近似地服从 $N(np, np(1-p))$.

www.TopSage.com

(3) 二项分布概率计算的三种方法：设 $X \sim B(n,p)$，则 ① 当 n 不太大时（$n \leqslant 10$），直接计算 $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,\cdots,n$. ② 当 n 较大且 p 较小（$n > 10, p < 0.1$），又 $\lambda = np$ 适中，根据泊松定理有近似公式

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

③ 当 n 较大而 p 不太大时，根据中心极限定理，二项分布用正态分布近似计算，则有近似公式：

对任何非负整数 $k = 0,1,\cdots,n$，有

$$P\{X = k\} = P\{k - 0.5 < X \leqslant k + 0.5\} \approx \Phi\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right);$$

对任何非负整数 $a,b, 0 \leqslant a < b \leqslant n$，有

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

常考题型及其解题方法与技巧

题型一　有关切比雪夫不等式与大数定律的命题

【例 5.4】 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，$EX_i = \mu, DX_i = 8 (i = 1,2,\cdots,n)$，则概率 $P\{\mu - 4 < \overline{X} < \mu + 4\} \geqslant$ _____，其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

【分析】 由于 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，因此有 $E\overline{X} = \mu, D\overline{X} = \frac{8}{n}$. 应用切比雪夫不等式，有

$$P\{\mu - 4 < \overline{X} < \mu + 4\} = P\{|\overline{X} - \mu| < 4\} \geqslant 1 - \frac{D\overline{X}}{4^2},$$

即

$$P\{\mu - 4 < \overline{X} < \mu + 4\} \geqslant 1 - \frac{1}{2n}.$$

评注 应用切比雪夫不等式，只能直接估计方差存在的随机变量在以期望值为中心的对称区间上取值的概率，即只能直接估计事件 $\{\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon\}$（或其对立事件）的概率. 对于任意 $a < b$，概率 $P\{a < X < b\}$ 是不能用切比雪夫不等式直接估计的.

【例 5.5】 已知随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho = \frac{1}{2}$，且 $EX = EY, DX = \frac{1}{4}DY$，则根据切比雪夫不等式有估计式 $P\{|X - Y| \geqslant \sqrt{DY}\} \leqslant$ _____.

【分析】 由于 $E(X - Y) = EX - EY = 0$，

$$D(X - Y) = DX + DY - 2\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4}DY + DY - 2 \cdot \rho \sqrt{DX}\sqrt{DY}$$

$$= \frac{1}{4}DY + DY - \frac{1}{2}DY = \frac{3}{4}DY,$$

所以

$$P\{|X - Y| \geqslant \sqrt{DY}\} \leqslant \frac{D(X - Y)}{DY} = \frac{\frac{3}{4}DY}{DY} = \frac{3}{4}.$$

【例 5.6】 设随机变量 X 的方差存在，并且满足不等式 $P\{|X - EX| \geqslant 3\} \leqslant \frac{2}{9}$，则一定有

www.TopSage.com

(A) $DX = 2$.　　(B) $P\{|X - EX| < 3\} < \frac{7}{9}$.

(C) $DX \neq 2$.　　(D) $P\{|X - EX| < 3\} \geqslant \frac{7}{9}$.

【分析】 因事件$\{|X - EX| < 3\}$是事件$\{|X - EX| \geqslant 3\}$的对立事件,且题设$P\{|X - EX| \geqslant 3\} \leqslant \frac{2}{9}$,因此一定有$P\{|X - EX| < 3\} \geqslant \frac{7}{9}$,即选项(D)正确.

进一步分析,满足不等式$P\{|X - EX| \geqslant 3\} \leqslant \frac{2}{9}$的随机变量,其方差既可能不等于2,亦可以等于2,因此结论(A)与(C)都不能选.比如:X服从参数为p的0-1分布,$DX = pq < 1$,显然$DX \neq 2$,但是$P\{|X - EX| \geqslant 3\} = P\{\varnothing\} = 0 < \frac{2}{9}$.因此(A)不成立.

若X服从参数$n = 8, p = 0.5$的二项分布,则有$EX = 4, DX = 2$.但是

$$P\{|X - EX| \geqslant 3\} = P\{|X - 4| \geqslant 3\}$$
$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 7\} + P\{X = 8\} = \frac{18}{256} \leqslant \frac{2}{9}.$$

因此(B)也不成立.

【例5.7】 假设随机变量$X_1, X_2, \cdots$相互独立且服从同参数λ的泊松分布,则下面随机变量序列中不满足切比雪夫大数定律条件的是

(A) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$　　(B) $X_1 + 1, X_2 + 2, \cdots, X_n + n, \cdots$

(C) $X_1, 2X_2, \cdots, nX_n, \cdots$　　(D) $X_1, \frac{1}{2}X_2, \cdots, \frac{1}{n}X_n, \cdots$

【分析】 切比雪夫大数定律的条件有三个:第一个条件要求构成随机变量序列的各随机变量是相互独立的.显然无论是$X_1, \cdots, X_n, \cdots$,还是$X_1 + 1, X_2 + 2, \cdots, X_n + n, \cdots, X_1, 2X_2, \cdots, nX_n, \cdots$以及$X_1, \frac{1}{2}X_2, \cdots, \frac{1}{n}X_n, \cdots$都是相互独立的;第二个条件要求各随机变量的期望与方差都存在.由于$EX_n = \lambda$, $DX_n = \lambda$, $E(X_n + n) = \lambda + n$, $D(X_n + n) = \lambda$, $E(nX_n) = n\lambda$, $D(nX_n) = n^2\lambda$, $E\left(\frac{1}{n}X_n\right) = \frac{\lambda}{n}$, $D\left(\frac{1}{n}X_n\right) = \frac{1}{n^2}\lambda$.因此四个备选答案都满足第二个条件;第三个条件是方差$DX_1, \cdots, DX_n, \cdots$有公共上界,即$DX_n < c, c$是与$n$无关的常数.对于(A):$DX_n = \lambda < \lambda + 1$;对于(B):$D(X_n + n) = DX_n = \lambda < \lambda + 1$;对于(C):$D(nX_n) = n^2DX_n = n^2\lambda$没有公共上界;对于(D):$D\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\lambda < \lambda + 1$.

综上分析,只有(C)中方差不满足方差一致有界的条件,因此应选(C).

【例5.8】 设随机变量序列$X_1, \cdots, X_n, \cdots$相互独立,根据辛钦大数定律,当$n \to \infty$时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$依概率收敛于其数学期望,只要$\{X_n, n \geqslant 1\}$

(A) 有相同的数学期望.　　(B) 服从同一离散型分布.

(C) 服从同一泊松分布.　　(D) 服从同一连续型分布.

【分析】 辛钦大数定律要求:$\{X_n, n \geqslant 1\}$独立同分布且数学期望存在.选项(A)缺少同分布条件,选项(B)、(D)虽然服从同一分布但不能保证期望存在,因此选(C).

【例5.9】 设随机变量$X_1, \cdots, X_n, \cdots$相互独立,记$Y_n = X_{2n} - X_{2n-1}(n \geqslant 1)$,根据大数定律,当$n \to \infty$时$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$依概率收敛到零,只要$\{X_n, n \geqslant 1\}$

(A) 数学期望存在.　　(B) 有相同的数学期望与方差.

www.TopSage.com

(C) 服从同一离散型分布. (D) 服从同一连续型分布.

【分析】 由于 X_n 相互独立,所以 Y_n 相互独立. 选项(A)缺少"同分布"条件;选项(C)、(D)缺少"数学期望存在"的条件,因此它们都不满足辛钦大数定律,所以选择(B). 事实上,若 $EX_n = \mu, DX_n = \sigma^2$ 存在,则

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(EX_{2i} - EX_{2i-1}) = 0,$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(DX_{2i} + DX_{2i-1}) = \frac{2n\sigma^2}{n^2} = \frac{2\sigma^2}{n} \leqslant 2\sigma^2,$$

根据切比雪夫大数定律:对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right| \leqslant \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1,$$

即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ 依概率收敛到零.

【例 5.10】 将一枚骰子重复掷 n 次,则当 $n \to \infty$ 时,n 次掷出点数的算术平均值 $\overline{X}_n$ 依概率收敛于_____.

【分析】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是各次掷出的点数,它们显然独立同分布,每次掷出点数的数学期望等于 7/2. 因此,根据辛钦大数定律,$\overline{X}_n$ 依概率收敛于 7/2.

【例 5.11】 随机从数集 $\{1,2,3,4,5\}$ 中有返回的取出 n 个数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,则当 $n \to \infty$ 时 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于_____;$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于_____.

【分析】 依题意 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立且有相同的概率分布:$P\{X_i = k\} = \frac{1}{5}(k = 1,2,3,4,5)$,与相同的数学期望:$EX_i = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$. 根据辛钦大数定律,当 $n \to \infty$ 时,$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于 3.

同理,$X_1^2, \cdots, X_n^2$ 相互独立且 $P\{X_i^2 = k^2\} = \frac{1}{5}(k = 1,2,3,4,5)$,$EX_i^2 = \frac{1}{5}(1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 11$,当 $n \to \infty$ 时 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 11.

【例 5.12】 设随机变量序列 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,记 $Y_n = X_{2n} - X_{2n-1}$,根据辛钦大数定律,当 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ 依概率收敛于_____.

【分析】 由于 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 相互独立,故 $Y_n = X_{2n} - X_{2n-1}(n \geqslant 1)$ 相互独立并且都服从 $N(0, 2\sigma^2)$,所以 $\{Y_n^2, n \geqslant 1\}$ 独立同分布且 $EY_n^2 = DY_n + (EY_n)^2 = 2\sigma^2$,根据辛钦大数定律,当 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ 依概率收敛于 $2\sigma^2$.

题型二 有关中心极限定理的应用

【例 5.13】 设 X_n 表示将一枚匀称的硬币随意投掷 n 次其"正面"出现的次数,则

(A) $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$. (B) $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

www.TopSage.com

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{2X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

【分析】 由于 $X_n \sim B\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$,且 $EX_n = np = \dfrac{n}{2}$,$DX_n = npq = \dfrac{n}{4}$,因此根据"二项分布以正态分布为极限分布"定理,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \leqslant x\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x).$$

故选(C).

【例 5.14】 设随机变量序列 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且都在 $(-1,1)$ 上服从均匀分布,则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \leqslant 1\right\} =$ _____(结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示).

【分析】 由于 X_n 相互独立且都在 $(-1,1)$ 上服从均匀分布,所以 $EX_n = 0$,$DX_n = \dfrac{2^2}{12} = \dfrac{1}{3}$,根据独立同分布中心极限定理,对任意 $x \in R$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}} \leqslant x\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sqrt{3}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x).$$

取 $x = \sqrt{3}$,得 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \leqslant 1\right\} = \Phi(\sqrt{3})$.

【例 5.15】 设随机试验成功的概率 $p = 0.20$,现在将试验独立地重复进行 100 次,则试验成功的次数介于 16 和 32 次之间的概率 $\alpha =$ _____.

【分析】 以 X 表示"在 100 次独立重复试验中成功的次数",则 X 服从参数为 (n,p) 的二项分布,其中 $n = 100$,$p = 0.20$,且

$$EX = np = 20, \sqrt{DX} = \sqrt{np(1-p)} = 4.$$

由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理,知随机变量

$$U_n = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} = \frac{X - 20}{4}$$

近似服从标准正态分布 $N(0,1)$. 因此试验成功的次数介于 16 和 32 次之间的概率

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{16 \leqslant X \leqslant 32\} = P\left\{\frac{16-20}{4} \leqslant \frac{X-20}{4} \leqslant \frac{32-20}{4}\right\}\\ &\approx \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) - [1 - \Phi(1)]\\ &= 0.9987 - (1 - 0.8413) = 0.84,\end{aligned}$$

其中 $\Phi(u)$ 是标准正态分布函数.

【例 5.16】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 是独立同服从参数为 4 的泊松分布的随机变量,$\overline{X}$ 是其算术平均值,则 $P\{\overline{X} \leqslant 4.392\} \approx$ _____.

【分析】 由于 $EX_k = DX_k = 4$,$E\overline{X} = 4$,$D\overline{X} = 4/100$,$\overline{\sigma} = \sqrt{D\overline{X}} = 0.2$. 因为 $n = 100$ 充分大,故由列维-林德伯格定理知,$\overline{X}$ 近似地服从正态分布 $N(4, 0.2^2)$. 因此,有

$$P\{\overline{X} \leqslant 4.392\} \approx P\left\{\frac{\overline{X} - 4}{0.2} \leqslant \frac{4.392 - 4}{0.2}\right\} = P\left\{\frac{\overline{X} - 4}{0.2} \leqslant 1.96\right\} = 0.975.$$

【例 5.17】 对某一目标进行多次同等规模的轰炸,每次轰炸命中目标的炸弹数目是个随机变量,

假设其期望值为2,标准差是1.3,计算在100次轰炸中有180颗到220颗炸弹命中目标的概率.

【解】 设第i次轰炸中命中目标的炸弹数为X_i,100次轰炸中命中目标的炸弹总数为X,则$X = X_1 + \cdots + X_{100}$,且$X_1,\cdots,X_{100}$相互独立同分布.$EX_i = 2, DX_i = 1.3^2, EX = 200, DX = 169$.应用独立同分布中心极限定理,$X$近似服从正态分布$N(200,169)$,则有

$$P\{180 < X < 220\} = P\{|X - 200| < 20\} = P\left\{\left|\frac{X - 200}{13}\right| < \frac{20}{13}\right\}$$

$$\approx 2\Phi(1.54) - 1 = 0.876.$$

【例5.18】 假设某种型号的螺丝钉的重量是随机变量,期望值为50克,标准差为5克.求:

(Ⅰ)100个螺丝钉一袋的重量超过5.1千克的概率;

(Ⅱ)每箱螺丝钉装有500袋,500袋中最多有4%的重量超过5.1千克的概率.

【解】 (Ⅰ)假设X_i表示袋中第i颗螺丝钉的重量,$i = 1,\cdots,100$,则$X_1,\cdots,X_{100}$相互独立同分布,$EX_i = 50, DX_i = 5^2$.记一袋螺钉的重量为S_{100},则

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i, \qquad ES_{100} = 5000, \qquad DS_{100} = 2500.$$

应用列维-林德伯格中心极限定理可知S_{100}近似服从正态分布$N(5000,50^2)$,且

$$P\{S_{100} > 5100\} = 1 - P\{S_{100} \leqslant 5100\} = 1 - P\left\{\frac{S_{100} - 5000}{50} \leqslant 2\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(2) = 0.02275.$$

(Ⅱ)设500袋中重量超过5.1千克的袋数为Y,则Y服从参数$n = 500, p = 0.02275$的二项分布.$EY = 11.375, DY = 11.116$.应用棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理,可知Y近似服从参数$\mu = 11.375, \sigma^2 = 11.116$的正态分布,于是

$$P\left\{\frac{Y}{500} \leqslant 0.04\right\} = P\{Y \leqslant 20\} = P\left\{\frac{Y - 11.375}{\sqrt{11.116}} \leqslant \frac{20 - 11.375}{\sqrt{11.116}}\right\} \approx \Phi(2.59) = 0.995.$$

评注 ①应用两个中心极限定理计算概率时,要分清两个定理的条件,明确使用的是哪一个定理.它们的区别是:二项分布的正态近似是对于一个随机变量X,如果服从参数n,p的二项分布,当n比较大时,X近似服从正态分布$N(np,npq)$;独立同分布中心极限定理是对于大量(n个)相互独立同分布、方差存在的随机变量$X_1,\cdots,X_n$,当n充分大时它们的和近似服从正态分布$N(nEX_i, nDX_i)$.在【例5.17】中如果认为X服从二项分布,且出现符号$EX = np = 200, DX = npq = 169$.尽管计算结果与正解相同,但概念是完全错误的.【例5.18】中将两个极限定理的应用综合在一个题中,读者可进一步理解二者的区别.

②解决此类问题应该注意的是先将具体问题赋予相应的随机变量符号,即设X_i或X表示题中有关的量;然后要判断问题涉及的是一个随机变量(二项分布)还是一个相互独立同分布、方差存在的随机变量序列,以便决定应用哪个中心极限定理;最后在具体求解时应将求解的问题设法化为标准正态分布函数,以便应用其分布表得出所需要的值.

题型训练

一、选择题

1. 设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立,则根据辛钦大数定律,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$依概率收敛于其数学期望,只要$\{X_n : n \geqslant 1\}$

(A) 有相同的期望. (B) 有相同的方差.

www.TopSage.com

(C) 有相同的分布. (D) 服从同参数 p 的 0-1 分布.

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且都服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布,则当 $n \to \infty$ 时,以 $\Phi(x)$ 为极限的是

(A) $P\left\{\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\}$. (B) $P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\}$.

(C) $P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right\}$. (D) $P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n}\lambda} \leqslant x\right\}$.

3. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布,其密度函数为偶函数,且 $DX_i = 1, i = 1, \cdots, n$,则对任意 $\varepsilon > 0$,根据切比雪夫不等式直接可得

(A) $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$. (B) $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$.

(C) $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$. (D) $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$.

二、填空题

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X \sim B(5, 0.8)$, $Y \sim N(1,1)$,则 $P\{0 < X + Y < 10\} \geqslant$ _____.

2. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,$EX_i = \mu_i$, $DX_i = 2$, $i = 1, 2, \cdots$,则当 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)$ 依概率收敛于_____.

三、计算题与应用题

1. 假设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立,服从同参数 λ 的泊松分布. 记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i + n$,当 n 充分大时,求 S_n 的近似分布.

2. 假设排球运动员的平均身高(单位:厘米)为 μ,标准差为 4. 求 100 名排球运动员的平均身高与所有排球运动员平均身高之差在 $(-1, 1)$ 内的概率.

3. 一大袋麦种的发芽率为 80%,从中任意取出 500 粒进行发芽试验,计算其发芽率的偏差不超过 2% 的概率.

4. 有 100 道单项选择题,每个题中有 4 个备选答案,且其中只有一个答案是正确的. 规定选择正确得 1 分,选择错误得 0 分. 假设无知者对于每一个题都是从 4 个备选答案中随机地选答,并且没有不选的情况,计算他能够超过 40 分的概率.

5. 设某种商品的合格率为 90%,某单位要想给 100 名职工每人一件这种商品. 试求:该单位至少购买多少件这种商品才能以 97.5% 的概率保证每人都可以得到一件合格品?

TopSage.com

第六章　数理统计的基本概念

内容概要与重难点提示

统计学的核心问题是由样本推断总体，要理解统计中的一些基本概念，它们是总体、简单随机样本、统计量及样本数字特征．统计量是样本的函数，统计量的选择和运用在统计推断中占据核心地位．我们所涉及的统计量主要是样本的数字特征（如样本均值、样本方差、样本原点矩与样本中心矩等）．

统计量的分布称为抽样分布，它是统计推断方法的重要基础，最常用的有χ^2分布、t分布、F分布．它们都是正态随机变量函数的分布．这三个分布既是本章的重点，也是难点，在考研中出现的频率也较高，要求考生了解服从这几种分布的随机变量的典型模式及某些特殊性质，三种密度函数曲线的形状并会查分位数表，在第七章的区间估计与假设检验中主要都是用的这三种分布以及标准正态分布．

由于在区间估计与假设检验中多涉及正态分布总体，因此考生还应掌握正态总体的抽样分布，它们是样本均值、样本方差、样本矩、样本均值差及样本方差比的抽样分布．

考核知识要点讲解

一、总体与样本

（一）总体、简单随机样本、抽样的概念

1. 研究对象的全体称为**总体**，用X表示，它是一个随机变量．X的分布函数和数字特征分别称为总体的分布函数和数字特征．组成总体的每一个单元，即每一个研究对象称为**个体**．

2. n个相互独立且与总体X（设X的分布函数为$F(x)$）同分布的随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$称为来自总体X或来自分布函数F的，容量为n的**简单随机样本**，简称为**样本**；设$x_1,x_2,\cdots,x_n$分别是$X_1,X_2,\cdots,X_n$的**观测值**，则称$x_1,x_2,\cdots,x_n$为**样本值**，又称为总体X的n个**独立的观测值**．简单地说，样本指一组随机变量，样本值指一组具体的统计数据，样本容量指观测值或数据个数．

3. 对于总体X的n次独立重复观测，称为来自总体X的n次简单**随机抽样**．

（二）样本的概率分布

假设总数X的分布函数为$F(x)$（密度函数为$f(x)$，或概率分布为$p_i=\boldsymbol{P}\{X=a_i\}$），$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体$X$容量为$n$的一个样本，则$(X_1,\cdots,X_n)$的联合分布函数为$F(X_1,\cdots,X_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$（联合密度为$f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$，或联合分布为$\boldsymbol{P}\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{P}\{X_i=x_i\}$，其中$x_i$取$\{a_1,\cdots,a_n,\cdots\}$中的某一个数）．

$X_{(n)}=\max(X_1,\cdots,X_n)$的分布函数为$F_{(n)}(x)=[F(x)]^n$（概率密度函数为$f_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$）．

www.TopSage.com

$X_{(1)} = \min(X_1, \cdots, X_n)$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$（概率密度函数为 $f_{(1)}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$）.

二、统计量

（一）统计量的概念

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数，若 g 中不含有任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个**统计量**. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本值，则称 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**观测值**.

统计量是样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的函数：$T = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. 统计量不依赖于任何未知参数. 作为随机样本的函数，统计量也是随机变量. 样本的数字特征是最常用的统计量.

（二）常用统计量（样本矩）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则

▶1. 样本均值 $\quad \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;

▶2. 样本方差 $\quad S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$;

样本标准差 $\quad S = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$.

【注】 如果总体 X（不管服从什么分布，只要其均值和方差存在）具有数学期望 $E(X) = \mu$ 和方差 $D(X) = \sigma^2$，则总有

$$E(\overline{X}) = E(X) = \mu, \quad D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad E(S^2) = D(X) = \sigma^2.$$

▶3. 样本 k 阶原点矩 $\quad A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,\ k = 1, 2, \cdots$;

▶4. 样本 k 阶中心矩 $\quad B_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k,\ k = 2, 3, \cdots$.

【注】 ① $B_2 = \dfrac{n-1}{n}S^2 \neq S^2$.

② 如果总体 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k) = \mu_k (k = 1, 2, \cdots)$ 存在，则当 $n \to \infty$ 时，有

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k, k = 1, 2, \cdots.$$

【例 6.1】 设总体 $X \sim P(\lambda)$，则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本均值 $\overline{X}$ 的概率分布为 _____.

【分析】 由分布的可加性可知，当 X_1, X_2 独立时，$X_1 + X_2 \sim P(2\lambda)$，继而有 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同为 $P(\lambda)$ 分布时 $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X} \sim P(n\lambda)$. 于是，对任意 $n > 2$，$n\overline{X}$ 的概率分布为

www.TopSage.com

$$P\{n\overline{X}=k\}=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda},k=0,1,2,\cdots,$$

而 $P\{n\overline{X}=k\}=P\left\{\overline{X}=\frac{k}{n}\right\}$，所以

$$P\left\{\overline{X}=\frac{k}{n}\right\}=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda},k=0,1,2,\cdots.$$

三、抽样分布

统计量的分布称为抽样分布．注意：抽样分布可能含有未知参数；有时（当样本函数含有未知参数，但其分布不依赖于未知参数时）将含有未知参数的样本函数的分布也称为抽样分布．

（一）来自正态总体的三个常用统计量的分布

▶1. χ^2 分布

χ^2 分布是一种非负连续型随机变量的分布，其密度函数的图形位于第一象限，峰值向左偏，随着 n 的增大，峰值向右移动．

（1）**典型模式**　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则称统计量

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

服从自由度为 n 的 **χ^2 分布**，记作 $\chi^2\sim\chi^2(n)$．此处，自由度是指上式右端包含的独立变量的个数．

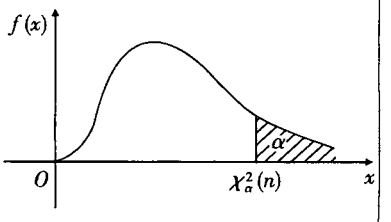


图 6.1

（2）**χ^2 分布的分位点**　对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\alpha$$

（$f(t)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的概率密度函数）的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的**上 α 分位点**，如图 6.1 所示．

（3）**χ^2 分布的性质**

1°　χ^2 分布的数学期望和方差分别为 $E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$．

2°　χ^2 分布具有可加性：设 $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，且 χ_1^2,χ_2^2 相互独立，则有

$$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2).$$

▶2. t 分布

t 分布是一种连续型随机变量的分布，其密度函数的图形关于 y 轴对称，形状与标准正态分布曲线相类似．

（1）**典型模式**　设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则称随机变量

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 **t 分布**，记作 $t\sim t(n)$．

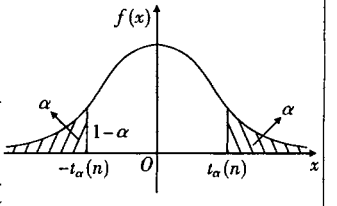


图 6.2

（2）**t 分布的分位点**　对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\alpha$$

（$f(t)$ 为 $t(n)$ 分布的概率密度函数）的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的**上 α 分位点**，如图 6.2 所示．

www.TopSage.com

由 t 分布上 α 分位点的定义及 $f(t)$ 图形的对称性知 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$.

(3)**t 分布的性质**　$t(n)$ 分布的概率密度函数 $f(t)$ 是偶函数,且有

$$\lim_{n\to\infty} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$

可见,当 n 足够大时 t 分布近似于 $N(0,1)$ 分布,但对于较小的 n,t 分布与 $N(0,1)$ 分布相差较大.

若 $t \sim t(n)$,则 $t^2 \sim F(1,n)$.

▶3. F 分布

F 分布是一种非负连续型随机变量 X 的分布,其密度函数含有两个参数 n_1, n_2,函数曲线的形状与 χ^2 分布相似.

(1) **典型模式**　设 $X \sim \chi^2(n_1)$,$Y \sim \chi^2(n_2)$,且 X 与 Y 相互独立,则称随机变量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

服从自由度为 (n_1,n_2) 的 **F 分布**,记作 $F \sim F(n_1,n_2)$.

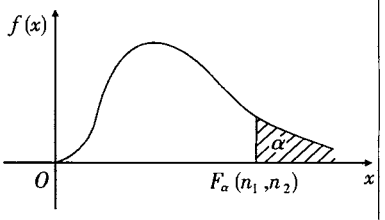


图 6.3

(2)**F 分布的分位点**　对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$,称满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f(t)\,dt = \alpha$$

($f(t)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 分布的概率密度函数)的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 分布的**上 α 分位点**(图 6.3).

(3)**F 分布的性质**

1°　如果 $F \sim F(n_1,n_2)$,则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$;

2°　$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$.

【例 6.2】　设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自正态总体 $X \sim N(0,2^2)$ 的简单随机样本,求常数 a,b,c,d,使

$$Q = aX_1^2 + b(X_2+X_3)^2 + c(X_4+X_5+X_6)^2 + d(X_7+X_8+X_9+X_{10})^2$$

服从 χ^2 分布,并求自由度 m.

【解】　由于 X_i 独立同分布,有

$$X_1 \sim N(0,4), \qquad X_2+X_3 \sim N(0,8),$$
$$X_4+X_5+X_6 \sim N(0,12), \qquad X_7+X_8+X_9+X_{10} \sim N(0,16).$$

于是　$\frac{1}{2}X_1, \frac{1}{\sqrt{8}}(X_2+X_3), \frac{1}{\sqrt{12}}(X_4+X_5+X_6), \frac{1}{4}(X_7+X_8+X_9+X_{10})$ 相互独立都服从标准正态分布 $N(0,1)$. 由 χ^2 分布的典型模式可知

$$\frac{1}{4}X_1^2 + \frac{1}{8}(X_2+X_3)^2 + \frac{1}{12}(X_4+X_5+X_6)^2 + \frac{1}{16}(X_7+X_8+X_9+X_{10})^2 \sim \chi^2(4).$$

所以,当 $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{8}, c=\frac{1}{12}, d=\frac{1}{16}$ 时,Q 服从自由度为 4 的 χ^2 分布.

【例 6.3】　设总体 X 与 Y 独立且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$,已知 $X_1, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是分别来自总体 X 与 Y 的简单随机样本,统计量 $T = \frac{2(X_1+\cdots+X_m)}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_n^2}}$ 服从 $t(n)$ 分布,则 $\frac{m}{n} =$ _____.

【分析】　依题意 $X_i \sim N(0,\sigma^2)$,$Y_i \sim N(0,\sigma^2)$ 且相互独立,所以

$$\sum_{i=1}^m X_i \sim N(0,m\sigma^2), U = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sqrt{m}\sigma} \sim N(0,1), \frac{Y_i}{\sigma} \sim N(0,1), V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n),$$

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

U 与 V 相互独立，由 t 分布典型模式知

$$\frac{U}{\sqrt{V/n}}=\sqrt{\frac{n}{m}}\frac{\sum_{i=1}^{m}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}}\sim t(n).$$

根据题设 $\sqrt{\frac{n}{m}}=2$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$.

【例 6.4】 已知 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{12\pi}e^{-\frac{1}{72}(9x^2+4y^2-8y+4)},$$

则 $\frac{9X^2}{4(Y-1)^2}$ 服从参数为_____的_____分布.

【分析】 由题设知 (X,Y) 服从二维正态分布且密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\times 2\times 3}e^{-\frac{1}{2}[(\frac{x}{2})^2+(\frac{y-1}{3})^2]},$$

故 $X\sim N(0,2^2)$，$Y\sim N(1,3^2)$，X 与 Y 相关系数 $\rho=0$，所以 X 与 Y 独立，$\frac{X}{2}\sim N(0,1)$，$\frac{Y-1}{3}\sim N(0,1)$，根据 F 分布典型模式知

$$\frac{\left(\frac{X}{2}\right)^2\Big/1}{\left(\frac{Y-1}{3}\right)^2\Big/1}=\frac{9X^2}{4(Y-1)^2}\sim F(1,1).$$

（二）正态总体的样本均值与样本方差的分布

▶1. 单个正态总体

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 与 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 分别为相应的样本均值和样本方差，则

(1) $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$；

(2) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$；

(3) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立；

(4) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$，$\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$.

▶2. 两个正态总体

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且这两个样本相互独立（注：指随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$ 相互独立）. 设 $\overline{X},S_X^2$ 和 $\overline{Y},S_Y^2$ 是相应的样本均值和样本方差，S_{XY}^2 是总体 X 和 Y 的联合样本方差，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\quad \overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i,\quad S_X^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_Y^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2,\quad S_{XY}^2=\frac{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2},$$

www.TopSage.com

则 (1) 样本均值差的抽样分布 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$;

(2) 样本方差比的抽样分布 $F=\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$;

特别地,当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2\triangleq\sigma^2$ 时,

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_{XY}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),\quad W=\frac{(n_1+n_2-2)S_{XY}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2).$$

【例 6.5】 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本,$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$,则当 $a=$_____,$b=$_____时,统计量 Y 服从 χ^2 分布,自由度为_____.

【分析】 依题意 $X_i\sim N(0,2^2)$ 且相互独立,所以 $X_1-2X_2\sim N(0,20)$,$3X_3-4X_4\sim N(0,100)$,故 $\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$,$\frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1)$ 且它们相互独立,由 χ^2 分布典型模式及性质知

$$\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2),$$

$$\Rightarrow\quad a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100},Y\sim\chi^2(2),\text{自由度为 }2.$$

常考题型及其解题方法与技巧

题型一 应用分布或数字特征的性质求统计量的数字特征

【例 6.6】 设总体 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 又 $\overline{X},S^2$ 分别为取自总体 X 容量为 n 的样本的均值和方差,则 $E\overline{X}=$_____;$D\overline{X}=$_____;$ES^2=$_____.

【分析】 由于 $E\overline{X}=EX$,$D\overline{X}=\frac{DX}{n}$,$ES^2=DX$,由题设有

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x|x|\,\mathrm{d}x=0.$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2|x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

所以 $E\overline{X}=0$,$D\overline{X}=\frac{1}{2n}$,$ES^2=\frac{1}{2}$.

【例 6.7】 已知总体 X 的数学期望 $EX=\mu$,方差 $DX=\sigma^2$,$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 是来自总体 X 容量为 $2n$ 的简单随机样本,样本均值为 $\overline{X}$,统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$,求 EY.

【解】 由于总体分布未知,我们只好将 Y 化简,应用数字特征性质计算 EY. 由于

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}[X_i^2+X_{n+i}^2+4\overline{X}^2+2X_iX_{n+i}-4\overline{X}(X_i+X_{n+i})]$$

$$=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+4n\overline{X}^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}-4\overline{X}\sum_{i=1}^{2n}X_i$$

www.TopSage.com

$$= \sum_{i=1}^{2n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} X_i X_{n+i} - 4n\overline{X}^2 \quad \left(\sum_{i=1}^{2n} X_i = 2n\overline{X}\right),$$

又 $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$, $EX_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$, $D\overline{X} = \dfrac{\sigma^2}{2n}$,

所以 $$EY = \sum_{i=1}^{2n} EX_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} EX_i EX_{n+i} - 4nE\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{2n}(\sigma^2 + \mu^2) + 2\sum_{i=1}^{n}\mu^2 - 4n\left(\frac{\sigma^2}{2n} + \mu^2\right)$$

$$= 2n\sigma^2 + 2n\mu^2 + 2n\mu^2 - 2\sigma^2 - 4n\mu^2 = 2(n-1)\sigma^2.$$

【例 6.8】 已知 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 容量为 n 的简单随机样本，其均值和方差分别为 $\overline{X}$ 与 S^2.

(Ⅰ) 如果 $EX = \mu, DX = \sigma^2$，试证明：$X_i - \overline{X}$ 与 $X_j - \overline{X}(i \neq j)$ 的相关系数 $\rho = -\dfrac{1}{n-1}$；

(Ⅱ) 如果总体 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，试证明：协方差 $\mathrm{Cov}(X_1, S^2) = 0$.

【证明】 (Ⅰ) 由于总体分布未知，因此只能应用定义与性质证明. 因为 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立且与总体 X 同分布，故 $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$, $D\overline{X} = \dfrac{\sigma^2}{n}$,

$$\mathrm{Cov}(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X}) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) - \mathrm{Cov}(X_i, \overline{X}) - \mathrm{Cov}(\overline{X}, X_j) + \mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{X})$$

$$= 0 - \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_i, X_i) - \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_j, X_j) + D\overline{X}$$

$$= -\frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = -\frac{1}{n}\sigma^2,$$

$$D(X_i - \overline{X}) = D(X_j - \overline{X}) = DX_j + D\overline{X} - 2\mathrm{Cov}(X_j, \overline{X})$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n}\mathrm{Cov}(X_j, X_j) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

所以 $$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X})}{\sqrt{D(X_i - \overline{X})}\sqrt{D(X_j - \overline{X})}} = \frac{-\frac{1}{n}\sigma^2}{\frac{n-1}{n}\sigma^2} = -\frac{1}{n-1}.$$

(Ⅱ) 由于总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，故 $EX_i = 0, DX_i = \sigma^2$.

又 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$，所以

$$\mathrm{Cov}(X_1, S^2) = \mathrm{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_1, X_i^2) - \frac{n}{n-1}\mathrm{Cov}(X_1, \overline{X}^2),$$

由于 $$EX_1^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = 0,$$

故 $$\mathrm{Cov}(X_1, X_i^2) = \begin{cases} EX_1^3 - EX_1 EX_1^2 = 0, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$

又 $$\overline{X}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} X_i X_j\right),$$

于是 $$\mathrm{Cov}(X_1, \overline{X}^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_1, X_i^2) + \frac{2}{n^2}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\mathrm{Cov}(X_1, X_i X_j)$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathrm{Cov}(X_1, X_1^2) + \frac{2}{n^2}\sum_{j=2}^{n}\mathrm{Cov}(X_1, X_1 X_j)$$

$$= \frac{1}{n^2}(EX_1^3 - EX_1 EX_1^2) + \frac{2}{n^2}\sum_{j=2}^{n}(EX_1^2 X_j - EX_1 EX_1 X_j) = 0,$$

www.TopSage.com

故　　$\mathrm{Cov}(X_1, S^2) = 0$.

评注　已知总体的分布(未必正态)确定样本均值的分布及有关问题只要注意下面4条即可:

① 样本均值是简单样本中各个样本变量 X_i 的算术平均值;

② 各个 X_i 与总体独立同分布,因此它们的各阶矩都相等(只要总体的相应矩存在);

③ 关于独立同分布随机变量和的分布,参看第三章的六之(四);

④ 关于总体分布的性质和特点,参看第二章之三.

题型二　应用典型模式求统计量的分布

【例 6.9】　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自标准正态总体的简单随机样本,$\overline{X}$ 和 S^2 为样本均值和样本方差,则

(A)　$\overline{X}$ 服从标准正态分布.　　(B)　$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布.

(C)　$n\overline{X}$ 服从标准正态分布.　　(D)　$(n-1)S^2$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布.

【分析】　显然,$(n-1)S^2$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布,故应选(D).其余选项不成立是明显的:对于服从标准正态分布的总体,

$$\overline{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n\overline{X} \sim N(0, n),$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立并且都服从标准正态分布,可见 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布.

【例 6.10】　设随机变量 $X \sim t(n)$ $(n > 1)$,$Y = \dfrac{1}{X^2}$,则

(A)　$Y \sim \chi^2(n)$.　　(B)　$Y \sim \chi^2(n-1)$.

(C)　$Y \sim F(n, 1)$.　　(D)　$Y \sim F(1, n)$.

【分析】　根据 t 分布的性质,如果随机变量 $X \sim t(n)$,则 $X^2 \sim F(1, n)$,又根据 F 分布的性质,如果 $X^2 \sim F(1, n)$,则 $\dfrac{1}{X^2} \sim F(n, 1)$.因此 $Y = \dfrac{1}{X^2} \sim F(n, 1)$,故应选(C).

评注　判断正态总体的一个给定的样本函数的分布的方法是抓住正态总体常用样本函数及统计中抽样分布的特点.

【例 6.11】　设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,从中抽一样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$,记 $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,　$S_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$,试证:$\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \cdot \dfrac{X_{n+1} - \overline{X}_n}{S_n} \sim t(n-1)$.

【分析】　因为 $\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,由 t 分布知,分子需要一个服从标准正态分布的随机变量,故只需证明 $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \dfrac{X_{n+1} - \overline{X}_n}{\sigma} \sim N(0,1)$ 及 $X_{n+1} - \overline{X}_n$ 与 S_n 的独立性即可.

【证明】　$X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$,$\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$,$X_{n+1} - \overline{X}_n \sim N\left(0, \dfrac{n+1}{n}\sigma^2\right)$,故

$$U = \frac{X_{n+1} - \overline{X}_n}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\sigma} = \frac{X_{n+1} - \overline{X}_n}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim N(0,1).$$

www.TopSage.com

又 $W=\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 $\overline{X}_n$ 及 X_{n+1} 与 W 都独立，所以 U 与 W 也独立，于是有

$$T=\frac{U}{\sqrt{W/(n-1)}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\Big/\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2/\sigma^2}{n-1}}$$

$$=\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1).$$

【例 6.12】 已知总体 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布，$X_1,\cdots,X_8$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 是分别来自总体 X 与 Y 的两个简单随机样本，其均值分别为 $\overline{X},\overline{Y}$，如果记 $Q=\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{9}(Y_j-\overline{Y})^2$，求证：$T=3\overline{Y}\sqrt{\dfrac{15}{Q}}$ 服从参数为 15 的 t 分布.

【证明】 应用 t 分布的典型模式证明. 已知 $X_i\sim N(0,1)$，$Y_i\sim N(0,1)$ 且相互独立，因此样本均值 $\overline{Y}\sim N\left(0,\dfrac{1}{9}\right)$，$3\overline{Y}\sim N(0,1)$. 如果用 S_X^2 与 S_Y^2 分别表示样本方差，则有 $7S_X^2=\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(7)$，$8S_Y^2=\sum\limits_{i=1}^{9}(Y_i-\overline{Y})^2\sim\chi^2(8)$，由于 X_i 与 Y_j 相互独立，S_X^2 仅依赖于 X_i，S_Y^2 仅依赖于 Y_j，因此 S_X^2 与 S_Y^2 独立，根据 χ^2 分布性质（可加性）知 $Q=7S_X^2+8S_Y^2\sim\chi^2(15)$，又 $\overline{Y},S_X^2,S_Y^2$ 相互独立，所以 $\overline{Y}$ 与 $7S_X^2+8S_Y^2=Q$ 相互独立，根据 t 分布典型模式有

$$\frac{3\overline{Y}}{\sqrt{Q/15}}=3\overline{Y}\sqrt{\frac{15}{Q}}\sim t(15),\text{即 } T\sim t(15).$$

题型三　计算与统计量有关的事件的概率及其反问题

【例 6.13】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n=16)$ 是来自 X 的样本，求概率：

（Ⅰ）$P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\leqslant 2\sigma^2\right\}$；　（Ⅱ）$P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\leqslant 2\sigma^2\right\}$.

【解】 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

（Ⅰ）$P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\leqslant 2\sigma^2\right\}=P\left\{\dfrac{n}{2}\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\leqslant 2n\right\}$

$\overset{n=16}{=\!=}P\{8\leqslant\chi^2(16)\leqslant 32\}=P\{\chi^2(16)\geqslant 8\}-P\{\chi^2(16)>32\}=0.95-0.01=0.94.$

（Ⅱ）$P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\leqslant 2\sigma^2\right\}=P\left\{\dfrac{n}{2}\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\leqslant 2n\right\}$

$\overset{n=16}{=\!=}P\{8\leqslant\chi^2(15)\leqslant 32\}=P\{\chi^2(15)\geqslant 8\}-P\{\chi^2(15)>32\}\approx 0.90-0.005=0.895.$

【例 6.14】 （Ⅰ）设 X 与 Y 相互独立，且有 $X\sim N(5,15)$，$Y\sim\chi^2(5)$，求概率 $P\{X-5>3.5\sqrt{Y}\}$；（Ⅱ）设总体 $X\sim N(2.5,6^2)$，X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 是来自 X 的样本，求概率 $P\{(1.3<\overline{X}<3.5)\cap(6.3<S^2<9.6)\}$.

www.TopSage.com

【解】 (Ⅰ) $P\{X-5>3.5\sqrt{Y}\}=P\left\{\dfrac{X-5}{\sqrt{Y}}>3.5\right\}=P\left\{\dfrac{(X-5)/\sqrt{15}}{\sqrt{Y/5}}>\dfrac{3.5/\sqrt{15}}{\sqrt{1/5}}\right\}$

$=P\{t(5)>2.02\}=0.05.$

$\left(\text{因}\dfrac{X-5}{\sqrt{15}}\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(5)\text{ 且两者独立.}\right)$

(Ⅱ) 因 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立,故有

$$p=P\{(1.3<\overline{X}<3.5)\cap(6.3<S^2<9.6)\}$$
$$=P\{1.3<\overline{X}<3.5\}P\{6.3<S^2<9.6\},$$

而 $\overline{X}\sim N(2.5,6^2/5)$, $Y\sim\chi^2(5)$,即有

$$P\{1.3<\overline{X}<3.5\}=P\left\{\frac{1.3-2.5}{6/\sqrt{5}}<\frac{\overline{X}-2.5}{6/\sqrt{5}}<\frac{3.5-2.5}{6/\sqrt{5}}\right\}$$
$$=\Phi\left(\frac{3.5-2.5}{6/\sqrt{5}}\right)-\Phi\left(\frac{1.3-2.5}{6/\sqrt{5}}\right)$$
$$=\Phi(0.37)-\Phi(-0.45)=0.3179,$$
$$P\{6.3<S^2<9.6\}=P\left\{6.3\times\frac{4}{6^2}<\frac{4S^2}{6^2}<9.6\times\frac{4}{6^2}\right\}=P\{0.7<\chi^2(4)<1.067\}$$
$$=P\{\chi^2(4)>0.7\}-P\{\chi^2(4)>1.067\}=0.95-0.90=0.05.$$

于是所求概率为 $p=0.3179\times0.05=0.0159$.

【例 6.15】 设随机变量 X 服从 n 个自由度的 t 分布,定义 t_α 满足 $P\{X\leqslant t_\alpha\}=1-\alpha(0<\alpha<1)$. 若已知 $P\{|X|>x\}=b(b>0)$,则 x 等于

(A) t_{1-b}. (B) $t_{1-\frac{b}{2}}$. (C) t_b. (D) $t_{\frac{b}{2}}$.

【分析】 根据 t 分布的对称性及 $b>0$,可知 $x>0$. 从而

$$P\{X\leqslant x\}=1-P\{X>x\}=1-\frac{1}{2}P\{|X|>x\}=1-\frac{b}{2}.$$

根据题设定义 $P\{X\leqslant t_\alpha\}=1-\alpha$,可知 $x=t_{\frac{b}{2}}$. 应选(D).

【例 6.16】 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为其均值,S 为其标准差,如果 $P\{\overline{X}>\mu+aS\}=0.95$,则参数 $a=$ _____. ($t_{0.05}(15)=1.7531$)

【分析】 由于总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,故 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{16}\right)$, $\dfrac{15S^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{16}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(15)$, $\overline{X}$ 与 S^2 独立,

由 t 分布典型模式得:$t=\dfrac{4(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(15)$,所以

$$P\{\overline{X}>\mu+aS\}=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S}>a\right\}=P\left\{\frac{4(\overline{X}-\mu)}{S}>4a\right\}=P\{t>4a\}=0.95.$$

由此知 $4a$ 为 $t(15)$ 分布上 0.95 分位数,即

$$4a=t_{0.95}(15)=-t_{1-0.95}(15)=-t_{0.05}(15)=-1.7531,a=-0.4383.$$

【例 6.17】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,4)$ 的简单随机样本,而 $\overline{X}$ 是样本均值,则满足 $P\{|\overline{X}-\mu|<\mu\}=0.95$ 的常数 $\mu=$ _____. ($\Phi(1.96)=0.975$)

【分析】 由条件知 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{9}}=\dfrac{3}{2}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)$,从而

$$P\{|\overline{X}-\mu|<\mu\}=P\left\{\frac{3}{2}|\overline{X}-\mu|<\frac{3}{2}\mu\right\}=P\left\{|U|<\frac{3}{2}\mu\right\}=2\Phi\left(\frac{3\mu}{2}\right)-1=0.95,$$

$$\Phi\left(\frac{3\mu}{2}\right)=0.975,\quad\frac{3\mu}{2}=1.96,\quad\mu=\frac{2}{3}\times1.96=1.3067.$$

www.TopSage.com

【例 6.18】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 X 的简单随机样本，$EX=\mu$，$DX=4$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，试分别求出满足下列各式的最小样本容量 n：

(Ⅰ) $P\{|\overline{X}-\mu|\leqslant 0.10\}\geqslant 0.90$；(Ⅱ) $D\overline{X}\leqslant 0.10$；(Ⅲ) $E|\overline{X}-\mu|\leqslant 0.10$.

【解】 依题意，$X\sim N(\mu,4)$，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{4}{n}\right)$，$\frac{\overline{X}-\mu}{2}\sqrt{n}\sim N(0,1)$.

(Ⅰ) $P\{|\overline{X}-\mu|\leqslant 0.10\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{2}\sqrt{n}\right|\leqslant\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right\}=2\Phi(0.05\sqrt{n})-1\geqslant 0.90$，

即 $\Phi(0.05\sqrt{n})\geqslant 0.95$.

查标准正态分布函数表可得 $0.05\sqrt{n}\geqslant 1.65$，$n\geqslant 1089$.

(Ⅱ) 解不等式 $D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{4}{n}\leqslant 0.1$，$n\geqslant 40$.

(Ⅲ) 令 $U=\frac{\overline{X}-\mu}{2}\sqrt{n}$，易见 $U\sim N(0,1)$，于是

$$E|U|=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\varphi(u)\,du=\int_0^{+\infty}\frac{2u}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}d\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

由于 $|\overline{X}-\mu|=\frac{2}{\sqrt{n}}\left|\frac{\overline{X}-\mu}{2}\sqrt{n}\right|=\frac{2}{\sqrt{n}}|U|$，

解不等式 $E|\overline{X}-\mu|=\frac{2}{\sqrt{n}}E|U|\frac{4}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\leqslant 0.10$，$\sqrt{n}\geqslant\frac{40}{\sqrt{2\pi}}$，$n\geqslant 254.65\approx 255$.

题型训练

一、选择题

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别是样本均值与样本方差，则

(A) $\frac{\overline{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$.　　(B) $\frac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

(C) $\frac{\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$.　　(D) $\frac{S^2}{n\overline{X}^2}\sim F(n-1,1)$.

2. 假设两个正态分布总体 $X\sim N(\mu_1,1)$，$Y\sim N(\mu_2,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别是取自总体 X 和 Y 的相互独立的简单随机样本．$\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 分别是其样本均值，S_1^2 与 S_2^2 分别是其样本方差，则

(A) $\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)\sim N(0,1)$.　　(B) $S_1^2+S_2^2\sim\chi^2(m+n-2)$.

(C) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(m-1,n-1)$.　　(D) $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{m+n-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$.

二、填空题

1. 假设总体 X 服从标准正态分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，则统计量 $Y_1=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$ 与 $Y_2=\frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}}$ 都服从_____分布，其分布参数分别为_____和_____.

2. 设总体 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是取自总体 X 的简单随机样本，则

www.TopSage.com

$\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从_____分布，分布参数为_____.

三、计算题与应用题

1. 设正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，求证：

$$W=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1),\quad F=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S}\right)^2\sim F(1,n-1).$$

2. 设总体 X 和 Y 相互独立，分别服从 $N(\mu,\sigma_1^2)$，$N(\mu,\sigma_2^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别来自 X 和 Y 的简单随机样本，其样本均值分别为 $\overline{X},\overline{Y}$，样本方差分别为 S_X^2,S_Y^2. 令 $Z=\alpha\overline{X}+\beta\overline{Y}$，$\alpha=\dfrac{S_X^2}{S_X^2+S_Y^2}$，$\beta=\dfrac{S_Y^2}{S_X^2+S_Y^2}$，求 EZ.

3. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取 16 个样本，S^2 为样本方差，μ,σ^2 未知，求 $P\left\{\dfrac{S^2}{\sigma^2}\leqslant 2.039\right\}$.

4. 设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 都是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的容量为 n 的两个相互独立的样本均值，试确定 n，使得两个样本均值之差的绝对值超过 σ 的概率大约为 0.01.

www.TopSage.com

第七章　参数估计和假设检验

内容概要与重难点提示

数理统计包括统计描述和统计推断两部分，本章讲的是统计推断．统计推断就是由样本推断总体，是统计学的核心内容．统计推断的基本问题可以归纳为两大类：统计估计和统计检验．

统计估计分为参数估计和非参数估计、点估计和区间估计，我们将只涉及参数的点估计和区间估计．参数的点估计，指用样本统计量的值估计未知参数的值．参数的区间估计就是用样本来确定一个区间，使这个区间以很大的概率包含所估计的未知参数，这样的区间称为置信区间，考试大纲中要求掌握正态总体参数的置信区间．

假设检验是根据样本所提供的信息来判断对总体所作的假设是否成立．

统计推断中对正态总体参数的区间估计与假设检验是两种不同性质的问题，但它们又有非常强的内在联系．例如，当σ^2未知时，用来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$对总体参数μ作区间估计，用的是t分布，而对μ进行检验时同样用t分布，且若对总体所作的假设成立时（检验水平为α），则统计估计含被估参数真值的概率为$1-\alpha$，反之亦然．

本章的重点是求估计量的两个方法：矩估计法（一阶矩、二阶矩）与最大似然估计法．

考核知识要点讲解

一、参数估计

（一）参数的点估计

▶1. 估计量、估计值与点估计

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$（多于一个未知参数时，可同样讨论）的形式为已知，θ是待估参数．$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应的一个样本值．点估计问题就是要构造一个适当的统计量$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，用它来估计未知参数$\theta$，用它的观测值$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$作为未知参数$\theta$的近似值．我们称$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$\theta$的**估计量**，称$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$\theta$的**估计值**．注意，估计量实际上是个随机变量，而对于不同的样本观测值，θ的估计值往往是不同的．

▶2. 构造估计量的两种常用方法

（1）矩估计法

基本思想（替换原则）：根据大数定律，样本矩、样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩、总体矩的连续函数．因此我们就用样本矩作为相应总体矩的估计量，以样本矩的连续函数作为相应总体矩的连续函数的估计量，并依此求出总体未知参数的估计．这种构造估计量的方法称为**矩估计法**，简称为**矩法**．所求得的估计量称为**矩（法）估计量**，相应的观测值称为**矩（法）估计值**．

矩估计法的一般步骤：设X为连续型随机变量，其概率密度为$f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，或$X$为离散型随机变量，其分布律为$P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，其中$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$为待估参数．设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的样本．

第一步，计算总体X的前k阶原点矩：

www.TopSage.com

$$\mu_l = E(X^l) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^l f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\mathrm{d}x \quad (X\text{为连续型}),$$

或
$$\mu_l = E(X^l) = \sum_{x\in R_X} x^l p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \quad (X\text{为离散型})$$

(其中 $l=1,2,\cdots,k$, R_X 是 X 可能取值的范围) 存在,一般来说,它们是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数.

第二步,令样本矩 = 总体矩,即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l = E(X^l) \quad (l=1,2,\cdots,k),$$

这是一个包含 k 个未知参数 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的 k 个联立方程组(称为矩法方程).

第三步,求解上述方程,得到 θ_l 的矩估计为

$$\hat{\theta}_l = \hat{\theta}_l(X_1,\cdots,X_n)(l=1,2,\cdots,k),$$

则 $\hat{\theta}_l$ 为 θ_l 的矩估计量, $\hat{\theta}_l(x_1,\cdots,x_n)$ 为 θ_l 的矩估计值.

【注】 矩法估计不要求总体服从什么分布,只要总体矩 EX^l 存在即可. 计算 EX^l 及解矩法方程 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l = EX^l$ 是求得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 的关键. 在这里 l 取多少并没有明确的规定,因此基于矩法方程求得的 θ 的估计量并不唯一,例如总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布,λ 未知. 令 $\overline{X} = EX = \lambda$,得 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1 = \overline{X}$;如果令 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = DX = \lambda$,得 λ 的另一个矩估计量 $\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 为了使矩法估计量有一个选定的标准,就需要约定或补充其他准则. 我们约定:用矩法方程求总体未知参数估计量时,矩从低阶开始.

矩估计量的性质:① 样本原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是总体相应原点矩 EX^k 的无偏、一致估计,即

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = EX^k, \quad \text{且} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} EX^k (n\to\infty).$$

② 样本矩 $A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ 的连续函数是相应总体矩 $\mu_l = EX^l$ 连续函数的一致性估计,但未必是无偏估计,即 $g(A_1,\cdots,A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1,\cdots,\mu_k)$. 但 $Eg(A_1,\cdots,A_k)$ 未必等于 $g(\mu_1,\cdots,\mu_k)$.

(2) 最大似然估计法

基本思想:若已观测到样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,而取到这一样本值的概率为 p(在离散型的情况),或 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 落在这一样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的邻域内的概率为 p(在连续型的情况),而 p 与未知参数有关,我们就取 θ 的估计值使概率 p 取到最大.

设总体 X 属连续型,其概率密度 $f(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$ 的形式已知,θ 为待估参数,Θ 为 θ 可能取值的范围. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合概率密度为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一个样本值,则 θ 的函数

$$L(\theta) = L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta), \theta\in\Theta$$

称为**样本的似然函数**(注意,这里 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是已知的样本值,它们都是常数). 若

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta),$$

www.TopSage.com

则称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ 的**最大似然估计值**，称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的**最大似然估计量**.

当总体 X 属离散型时，用分布律 $P\{X=x\}=p(x;\theta),\theta\in\Theta$ 代替上面的概率密度 $f(x;\theta)$ 即可.

求最大似然估计量的一般步骤：

第一步，写出样本的似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k)\text{ 或}\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k).$$

第二步，求出使 $L(\theta)$ 达到最大值的 $\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k$.

① 如果 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 可微，则 θ 可以从方程 $\frac{\mathrm{d}L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 或 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 中解得. 如果总体 X 的分布中含有 k 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$，则似然函数是这些参数的函数：$L=L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$. 分别令 $\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0$ 或 $\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}=0(i=1,2,\cdots,k)$，解此方程组，可得各个待估参数 θ_i 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，从而得到 θ_i 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n)(i=1,2,\cdots,k)$.

② 如果 $p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 或 $f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 关于 θ_i 不可微，或似然方程无解，则应由定义用其他方法求得 $\hat{\theta}_i$，例如当 $L(\theta)$ 为 θ 单调增（或减）函数时，$\hat{\theta}$ 为 θ 取值上限（或下限）.（参看【例7.18】）要注意，这时似然函数是 θ_i 的函数，选 θ_i 使 L 或 $\ln L$ 取极值，而 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是已经给出的观测值，它是已知的数据，不是选 x_i 使 L 或 $\ln L$ 取极值. 写成估计量时用 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来代替.

第三步，用 $\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k$ 作为参数 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的估计量，用 $\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k$ 的函数作为 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 同一函数估计量.

【注】 求总体分布中未知参数 θ 的最大似然估计量必须知道总体的概率分布或密度. 写出样本的似然函数（或对数似然函数），并求其最大值点是解题的关键.

最大似然估计的性质：

设 $\hat{\theta}$ 是总体 X 的概率密度或分布律中未知参数 θ 的最大似然估计，θ 的函数 $u=u(\theta)$ 具有单值的反函数 $\theta=\theta(u)$，则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计. 这一性质称为**最大似然估计的不变性**.

例如：设总体 X 的方差 σ^2 的最大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则总体 X 的标准差的最大似然估计为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.

▶3. 估计量的评选标准

下面是评价估计量好坏的三个常用的标准. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，$\theta\in\Theta$ 是包含在总体 X 分布中的待估参数，这里 Θ 是 θ 的取值范围.

(1) 无偏性 若估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意 $\theta\in\Theta$ 有 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的**无偏估计量**.

(2) 有效性 设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是未知参数 θ 的无偏估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，有 $D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$，且至少有一个 $\theta\in\Theta$，使上式中的不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ **较** $\hat{\theta}_2$ **有效**.

www.TopSage.com

(3) 一致性(相合性) 设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量,若对于任意 $\theta\in\Theta$,当 $n\to\infty$ 时 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 依概率收敛于 θ,则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量(或**相合估计量**).

【例 7.1】 假设总体 X 的方差 DX 存在,$X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本,其样本均值和样本方差分别为 $\overline{X},S^2$,则 EX^2 的矩估计量是

(A) $S^2+\overline{X}^2$. (B) $(n-1)S^2+\overline{X}^2$. (C) $nS^2+\overline{X}^2$. (D) $\frac{n-1}{n}S^2+\overline{X}^2$.

【分析】 按定义,EX^2 的矩估计量是 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$,由于

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\right),$$

所以 $\frac{n-1}{n}S^2+\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 EX^2 的矩估计量,选(D).

【例 7.2】 假设总体 X 的方差 $DX=\sigma^2$ 存在($\sigma>0$),$X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本,其方差为 S^2,且 $DS>0$,则

(A) S 是 σ 的矩估计量. (B) S 是 σ 的最大似然估计量.

(C) S 是 σ 的无偏估计量. (D) S 是 σ 的相合(一致)估计量.

【分析】 由各选项中概念的定义及 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 知,正确选项是(D),这是因为 $\sigma^2=DX$ 的矩估计量 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\neq S^2$,因而 S 不是 σ 的矩估计量,(A) 不成立;题中未对 X 的分布做出假设,因此 σ 的最大似然估计量是否存在不知,(B) 不成立. 如果 S^2 是 σ^2 的最大似然估计量,根据"最大似然估计不变性原理",可以断言 S 是 σ 的最大似然估计量,选项(B)成立,否则选项(B)不成立. 如果 S 是 σ 的无偏估计即 $ES=\sigma$,由此得 $(ES)^2=\sigma^2$,又 $ES^2=\sigma^2$,所以 $DS=ES^2-(ES)^2=0$,与假设矛盾,所以(C)不成立,因此选(D).

事实上,由大数定律及依概率收敛性质知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}EX^2,\quad\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}\xrightarrow{P}EX,$$

所以 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\overline{X}^2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\overline{X}^2\xrightarrow{P}EX^2-(EX)^2=\sigma^2$.

故 $S\xrightarrow{P}\sigma$,即 S 是 σ 的相合估计量.

(二) 参数的区间估计

区间估计就是用以统计量为端点的随机区间来刻画总体未知参数所在的范围.

▶1. 参数的置信区间的概念

(1) 置信区间 设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 $\theta,\theta\in\Theta$(Θ 是 θ 可能取值的范围),对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$,若由来自总体 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$($\hat{\theta}_1\leqslant\hat{\theta}_2$),对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}\geqslant 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**置信区间**,$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的**置信下限和置信上限**,$1-\alpha$ 称为**置信水平或置信度**.

www.TopSage.com

(2) 单侧置信区间 对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$，若由来自总体 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$（或 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$），对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足

$$P\{\theta>\hat{\theta}_1\}\geqslant 1-\alpha\ (\text{或}\ P\{\theta<\hat{\theta}_2\}\geqslant 1-\alpha),$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,+\infty)$（或 $(-\infty,\hat{\theta}_2)$）是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**，$\hat{\theta}_1$（或 $\hat{\theta}_2$）称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**单侧置信下限（或上限）**.

▶2. 求置信区间的步骤

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本. 寻求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间的具体做法如下：

第一步，求一个包含样本 $X_1,\cdots,X_n$ 与待估参数 θ 而不含其他未知参数的函数（称为极轴变量）

$$G=G(X_1,\cdots,X_n;\theta),$$

其分布已知（我们常常由 θ 的点估计量 $\hat{\theta}$ 出发构造函数 $G=G(\hat{\theta},\theta)$）.

第二步，给定 α，确定常数 a,b 使 $P\{a<G(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha$.

第三步，反解不等式 $a<G<b$ 得等价不等式

$$\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n;a,b)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n;a,b),$$

其中 $\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n;a,b)$ 都是统计量，则有

$$P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha.$$

故 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个置信区间.

▶3. 正态总体均值（或均值差）、方差（或方差比）及与其相联系的数字特征的置信区间

求正态总体未知参数的置信区间，其关键是通过未知参数的点估计求得含有 θ 及样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的极轴变量 $G=G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$ 且分布已知，此时常常要用到正态总体样本均值与方差的分布、各种分布的典型模式及其性质（当 n 充分大时，应考虑中心极限定理），然后根据求置信区间的步骤即可求得置信区间. 依此不难理解、记住教材上的各种置信区间.

【例 7.3】 总体均值 μ 置信度为 95% 的置信区间为 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$，其含义是

(A) 总体均值 μ 的真值以 95% 的概率落入区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$.

(B) 样本均值 $\overline{X}$ 以 95% 的概率落入区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$.

(C) 区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 含总体均值 μ 的真值的概率为 95%.

(D) 区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 含样本均值 $\overline{X}$ 的概率为 95%.

【分析】 直接由置信区间概念可知正确选项是(C). 事实上，由于均值 μ 是客观存在的一个数，无法谈论“μ 以 95% 概率落入 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 内”，选项(A)不成立；$\overline{X}$ 与 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是统计量，(B)，(D)含义不清且与 μ 无关，所以不能选；而(C)则表示 $P\{\hat{\theta}_1<\mu<\hat{\theta}_2\}=95\%$，此即置信区间的定义，故选(C).

二、假设检验

(一) 假设检验的基本概念和原理

▶1. 假设检验的基本概念

(1) 假设检验问题 在总体的分布函数完全未知，或只知其形式但不知其参数的情况，提出某些

www.TopSage.com

关于总体分布函数或关于其参数的假设，然后抽取样本，构造合适的统计量，再根据样本对所提的假设作出是接受还是拒绝的决策，这样的问题称为**假设检验问题**.

(2) 检验法 借助于样本值来判断接受假设或拒绝假设的法则，称为**检验法**.

(3) 原假设和备择假设 称需要着重考察的假设为**原假设**，原假设常记为 H_0；与原假设相对立的假设称为**备择假设**或**对立假设**，备择假设常记为 H_1.

(4) 检验统计量 如果基于某一个统计量的观测值来确定接受 H_0 或拒绝 H_0 时，这一统计量称为**检验统计量**.

(5) 拒绝域和临界点 当检验统计量的观测值落在某个区域时就拒绝 H_0，这一区域称为**拒绝域**，拒绝域的边界点称为**临界点**.

(6) 假设检验的两类错误 H_0 实际上为真时，而拒绝 H_0，这类“弃真”的错误称为**第 Ⅰ 类错误**. H_0 实际上为假时，而接受 H_0，这类“取伪”的错误称为**第 Ⅱ 类错误**.

(7) 显著性水平 α 是一个小的正数，在作检验时要求犯第 Ⅰ 类错误的概率 $\leqslant \alpha$，α 称为检验的**显著性水平**. α 通常取 0.1，0.05，0.01，0.005 等值.

(8) 显著性检验 对于给定的样本容量，只控制犯第 Ⅰ 类错误的概率，而不考虑犯第 Ⅱ 类错误的概率的检验法，称为**显著性检验**.

▶2. 假设检验的基本思想与原理

假设尽管有种种不同的形式，但对这些假设进行检验的基本思想都是相同的，即都是采用某种带有概率性质的反证法. 依据是小概率原理：认为小概率事件在一次试验或观察中实际上不会发生，若在一次试验中发生了，就认为“不合理”. “小概率”的值通常根据实际问题的要求，规定一个可以接受的充分小的数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$，当一个事件的概率不大于 α 时，即认为它是小概率事件，这里 α 为显著性水平.

▶3. 假设检验的一般步骤

(1) 提出所要检验的原假设 H_0 与备择假设 H_1；

(2) 选择检验的统计量，并在 H_0 成立下求出它的分布；

(3) 给定显著性水平 α，在 H_0 成立下确定临界值和否定域；

(4) 由样本值计算统计量的值，并判断该值是否落入否定域，从而对假设 H_0 作出拒绝还是接受的判断. 若该值落入否定域，则拒绝 H_0，否则接受 H_0，认为 H_0 是相容的.

【例 7.4】 在假设检验中，显著性水平 α 的意义是

(A) 原假设 H_0 成立，经检验被拒绝的概率. (B) 原假设 H_0 成立，经检验被接受的概率.

(C) 原假设 H_0 不成立，经检验被拒绝的概率. (D) 原假设 H_0 不成立，经检验被接受的概率.

【分析】 显著性水平 α 是确定小概率事件的一个界限，由检验准则知，$\alpha = P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\}$，所以正确选项为(A). 选项(B)是 $P\{\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = 1 - \alpha$；(D)是 $P\{\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 不成立}\} = P\{\text{犯第二类错误}\} = \beta$；(C)是 $P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 不成立}\} = 1 - \beta$.

【例 7.5】 在假设检验问题中，如果原假设 H_0 的否定域为 C，那么样本值 $(x_1, \cdots, x_n)$ 只可能有下列四种情况，其中拒绝 H_0 且不犯错误的是

(A) H_0 成立，$(x_1, \cdots, x_n) \in C$. (B) H_0 成立，$(x_1, \cdots, x_n) \notin C$.

(C) H_0 不成立，$(x_1, \cdots, x_n) \in C$. (D) H_0 不成立，$(x_1, \cdots, x_n) \notin C$.

【分析】 “拒绝 H_0 且不犯错误”意指“样本值落入否定域且 H_0 不成立”=“$(x_1, \cdots, x_n) \in C$，且 H_0 不成立”，选(C). 选项(A)表示“H_0 成立，否定 H_0”，犯第一类错误；选项(B)表示“H_0 成立，接受 H_0”即接受 H_0 且不犯错误；选项(D)表示“H_0 不成立，检验结果接受 H_0”，犯第二类错误.

www.TopSage.com

（二）正态总体均值、方差的假设检验

正态总体假设检验分为一个正态总体与两个正态总体的假设检验问题．即在总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的条件下，关于期望 μ 与方差 σ^2 的种种假设检验问题；两个相互独立正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，关于期望 μ_1 与 μ_2，方差 σ_1^2 与 σ_2^2 的种种假设检验问题．虽然检验问题不同，然而它们都是按照检验基本思想与步骤进行的，其关键是检验统计量的选取与否定域的确定．

对于正态总体均值和方差的检验，选取检验统计量时都是考虑相应的样本均值和方差，根据正态总体样本均值与方差的分布不难推出这些统计量的分布，进而求得否定域．只要理解检验的统计思想就不难推导出教材中的各种检验否定域，千万不要死记硬背．

【例 7.6】 已知正态总体 $X\sim N(a,\sigma_x^2)$ 和 $Y\sim N(b,\sigma_y^2)$ 相互独立，其中 4 个分布参数都未知．设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别来自 X 和 Y 的简单随机样本，样本均值分别为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$，样本方差相应为 S_x^2 和 S_y^2，则检验假设 H_0：$a\leqslant b$ 使用 t 检验的前提条件是

（A） $\sigma_x^2\leqslant\sigma_y^2$．　（B） $S_x^2\leqslant S_y^2$．　（C） $\sigma_x^2=\sigma_y^2$．　（D） $S_x^2=S_y^2$．

【分析】 应该选（C）．因为 t 检验使用统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_{xy}}\sqrt{\frac{mn}{m+n}},$$

其中 S_{xy}^2 是两个总体的联合样本方差：

$$S_{xy}^2=\frac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{m+n-2}.$$

只有当选项（C）即 $\sigma_x^2=\sigma_y^2$ 成立时才能导出统计量 t 的抽样分布——t 分布，并且根据 t 分布来构造 t 检验．

常考题型及其解题方法与技巧

题型一　点估计的无偏性与有效性

【例 7.7】 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，参数 $\sigma>0$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本（$n>1$），令估计量

$$\hat{\sigma}_1^2=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad \hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

（Ⅰ）验证 $\hat{\sigma}_1^2$ 与 $\hat{\sigma}_2^2$ 的无偏性；（Ⅱ）求方差 $D\hat{\sigma}_1^2$ 与 $D\hat{\sigma}_2^2$ 并比较其大小．

【解】 （Ⅰ）由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且与总体 X 同分布，故

$$EX_i=0,\quad DX_i=\sigma^2,\quad EX_i^2=\sigma^2,\quad E\overline{X}=0,\quad E\overline{X}^2=D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$E\hat{\sigma}_1^2=ES^2=\frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-nE\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right)=\sigma^2,$$

$$E\hat{\sigma}_2^2=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\sigma^2.$$

（Ⅱ）根据抽样分布有关结论知

www.TopSage.com

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

$$\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1),\quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n).$$

大家网 TopSage.com

再由 χ^2 分布随机变量的方差公式有：$Y\sim\chi^2(n)$，则 $DY=2n$.

所以 $$D\hat{\sigma}_1^2=DS^2=D\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\right)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\right)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1},$$

$$D\hat{\sigma}_2^2=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=D\left(\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

计算可知 $D\hat{\sigma}_2^2<D\hat{\sigma}_1^2$，因此 $\hat{\sigma}_2^2$ 比 $\hat{\sigma}_1^2$ 有效.

【例 7.8】 已知总体 X 服从瑞利分布，其密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0,\quad \theta>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$X_1,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的简单随机样本，求 θ 的矩估计，并问这个估计量是否为无偏估计量？

【解】 记 $EX=\mu,DX=\sigma^2$，则

$$\mu=EX=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\int_0^{+\infty}x\,d\left(-e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\right)$$

$$=-xe^{-\frac{x^2}{2\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\sqrt{\frac{\theta\pi}{2}}.$$

由等式 $\mu=\sqrt{\frac{\theta\pi}{2}}$ 解出 $\theta=\frac{2\mu^2}{\pi}$，因此参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}^2}{\pi}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

由于样本均值 $\overline{X}$ 的期望 $E\overline{X}$ 与总体 X 的期望相等，因此 $E\overline{X}=EX=\mu$，而 $D\overline{X}=\frac{1}{n}DX=\frac{1}{n}\sigma^2$，

$$EX^2=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\int_0^{+\infty}x^2d\left(-e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\right)=-x^2e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=2\theta,$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=2\theta-\frac{\theta\pi}{2},\quad D\overline{X}=\frac{1}{n}\left(2\theta-\frac{\theta\pi}{2}\right),$$

$$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{1}{n}\left(2\theta-\frac{\theta\pi}{2}\right)+\frac{\theta\pi}{2}=\frac{2\theta}{n}+\frac{n-1}{2n}\theta\pi,$$

$$E\hat{\theta}=\frac{2}{\pi}E\overline{X}^2=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\theta}{n}+\frac{n-1}{2n}\theta\pi\right)\neq\theta,$$

计算可知 $\hat{\theta}$ 是 θ 的有偏估计量.

评注 利用 Γ 函数计算 EX,EX^2 很方便.

$$EX=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\int_0^{+\infty}\sqrt{2\theta}\sqrt{\frac{x^2}{2\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}d\left(\frac{x^2}{2\theta}\right)$$

$$=\sqrt{2\theta}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2\theta}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi\theta}{2}},$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=2\theta\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}d\left(\frac{x^2}{2\theta}\right)=2\theta\Gamma(2)=2\theta.$$

【例 7.9】 已知总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，其均值为 $\overline{X}$，方差为 S^2，如果 $\hat{\lambda}=a\overline{X}+(2-3a)S^2$ 是 λ 的无偏估计，则 $a=$ _____.

www.TopSage.com

【分析】 直接由 $E\hat{\lambda}=\lambda$ 求 a. 依题意 $EX=DX=\lambda$,故 $E\bar{X}=\lambda$,$ES^2=DX=\lambda$,$E\hat{\lambda}=aE\bar{X}+(2-3a)ES^2=a\lambda+(2-3a)\lambda=(2-2a)\lambda=\lambda$,解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

【例 7.10】 已知总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,\cdots,X_{2n}$ 是来自总体 X 容量为 $2n$ 的简单随机样本,当 σ^2 未知时,$Y=C\sum\limits_{i=1}^{n}(X_{2i}-X_{2i-1})^2$ 为 σ^2 无偏估计,则 $C=$_____,$DY=$_____.

【分析】 通过 $EY=\sigma^2$ 求得 C,为此需先求得 $X_{2i}-X_{2i-1}$ 分布. 由于 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$,且相互独立,故 $X_{2i}-X_{2i-1}\sim N(0,2\sigma^2)$,$E(X_{2i}-X_{2i-1})^2=D(X_{2i}-X_{2i-1})+[E(X_{2i}-X_{2i-1})]^2=2\sigma^2$.

所以由 $EY=C\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_{2i}-X_{2i-1})^2=Cn2\sigma^2=\sigma^2$,解得 $C=\dfrac{1}{2n}$.

又 $\dfrac{X_{2i}-X_{2i-1}}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$ 且相互独立,故 $W=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_{2i}-X_{2i-1}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$.

$$Y=C\cdot 2\sigma^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_{2i}-X_{2i-1}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2=2C\sigma^2W,\quad DW=2n,$$

所以
$$DY=4C^2\cdot\sigma^4DW=4\cdot\frac{1}{4n^2}\cdot\sigma^4\cdot 2n=\frac{2}{n}\sigma^4.$$

【例 7.11】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,μ,σ^2 未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本,试确定常数 C,使 $CY=C[(X_1-X_2)^2+(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2]$ 是 σ^2 的无偏估计.

【解】
$$E[(X_1-X_2)^2]=D(X_1-X_2)+[E(X_1-X_2)]^2$$
$$=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2(\text{因 }X_1,X_2\text{ 独立}),$$

同样 $E[(X_3-X_4)^2]=E[(X_5-X_6)^2]=2\sigma^2$,

于是
$$E\{C[(X_1-X_2)^2+(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2]\}$$
$$=C\{E[(X_1-X_2)^2]+E[(X_3-X_4)^2]+E[(X_5-X_6)^2]\}$$
$$=C(2\sigma^2+2\sigma^2+2\sigma^2)=6C\sigma^2.$$

即有 $E(CY)=6C\sigma^2$. 要使 CY 为 σ^2 的无偏估计,令 $E(CY)=6C\sigma^2=\sigma^2$,得 $C=1/6$.

题型二 矩估计与最大似然估计

【例 7.12】 已知总体 X 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的几何分布:$P\{X=x\}=(1-p)^{x-1}p(x=1,2,\cdots)$,$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则未知参数 p 的矩估计量为_____;最大似然估计量为_____.

【分析】 由几何分布的期望公式即得

$$\mu\triangleq EX=\frac{1}{p},$$

则由上式解得 p 的矩估计量 $\hat{p}=\dfrac{1}{\bar{X}}$,其中 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

又样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的似然函数

$$L(x_1,\cdots,x_n;p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}p=p^n(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n},$$

$$\ln L=n\ln p+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\ln(1-p),$$

www.TopSage.com

令$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{n}{p}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n}{1-p}=0$,解得$p=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{X}}$.故$p$的最大似然估计量$\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$.

【例7.13】 设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x, & 0<x<1,\\ 1-c\theta x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中$0<\theta<1$是未知参数,c是常数.$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本,则$c=$_____;θ的矩估计量$\hat{\theta}=$_____.

【分析】 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^1\theta x\mathrm{d}x+\int_1^2(1-c\theta x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\theta+1-\frac{c}{2}\theta(4-1)$

得$c=\frac{1}{3}$.

又
$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^1\theta x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\left(1-\frac{1}{3}\theta x\right)x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\theta+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}\theta x^3\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3}\theta+\frac{3}{2}-\frac{7}{9}\theta=\frac{3}{2}-\frac{4}{9}\theta,$$

即
$$\theta=\frac{9}{4}\left(\frac{3}{2}-EX\right).$$

所以,θ的矩估计量$\hat{\theta}=\frac{9}{4}\left(\frac{3}{2}-\overline{X}\right)$.

【例7.14】 已知总体X是离散型随机变量,X可能取值为0,1,2,且$P\{X=2\}=(1-\theta)^2$,$EX=2(1-\theta)$(θ为未知参数).(Ⅰ)试求X的概率分布;(Ⅱ)对X抽取容量为10的样本,其中5个取1,3个取2,2个取0,求θ的矩估计值、最大似然估计值.

【解】 (Ⅰ)设X的概率分布为$P\{X=0\}=p_0$,$P\{X=1\}=p_1$,$P\{X=2\}=p_2$,由题设知$p_2=(1-\theta)^2$,又$EX=2(1-\theta)=0\times p_0+1\times p_1+2p_2=p_1+2p_2=p_1+2(1-\theta)^2$,解得$p_1=2(1-\theta)-2(1-\theta)^2=2\theta(1-\theta)$,而$p_0+p_1+p_2=1$,所以$p_0=1-p_1-p_2=\theta^2$,$X$的概率分布为

k	0	1	2
$P\{X=k\}$	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

(Ⅱ)应用定义求矩估计值、最大似然估计值.令$\mu=EX=2(1-\theta)$,解得$\theta=1-\frac{\mu}{2}$,于是θ的矩估计量$\hat{\theta}=1-\frac{1}{2}\overline{X}$,将样本值代入得$\theta$的矩估计值为$1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}(5\times1+3\times2+2\times0)=1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}$.又样本值的似然函数

$$L(x_1,\cdots,x_{10};\theta)=\prod_{i=1}^{10}P\{X=x_i,\theta\}=[2\theta(1-\theta)]^5(1-\theta)^6\theta^4=2^5\theta^9(1-\theta)^{11},$$
$$\ln L=5\ln2+9\ln\theta+11\ln(1-\theta),$$

令$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{9}{\theta}-\frac{11}{1-\theta}=0$,解得$\theta$最大似然估计量$\hat{\theta}=\frac{9}{20}$.

评注 对于离散分布总体,求分布中未知参数的最大似然估计时,关键是要正确写出样本的似然函数.像本题中总体X的概率分布不能用一个统一式子表示,这需要用似然函数定义正确写出给定样本值的似然函数.

www.TopSage.com

【例 7.15】 已知总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-2)}, & x>2,\\ 0, & x\leqslant 2\end{cases}(\lambda>0)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$Y=X^2$.

（Ⅰ）求 Y 的期望 EY（记 EY 为 b）；

（Ⅱ）求 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$；

（Ⅲ）利用上述结果求 b 的最大似然估计量.

【解】 （Ⅰ）直接应用公式 $Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 计算.

$$EY=EX^2=\int_2^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda(x-2)}\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{令 } x-2=t}\int_0^{+\infty}(t+2)^2\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}t^2\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t+4\int_0^{+\infty}t\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t+4\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}+\frac{4}{\lambda}+4=2\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)^2+2\xrightarrow{\text{记}}b.$$

（Ⅱ）令 $\mu=EX$，其中

$$EX=\int_2^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda(x-2)}\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{令 } x-2=t}\int_0^{+\infty}(t+2)\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}+2,$$

即 $\mu=\frac{1}{\lambda}+2$，解得 $\lambda=\frac{1}{\mu-2}$，于是 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1=\frac{1}{\overline{X}-2}$.

样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\lambda)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-2n\right)}, & \text{一切 } x_i>2,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

$$\ln L=n\ln\lambda-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\right),$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\right)=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{\overline{x}-2}$，故 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2=\frac{1}{\overline{X}-2}$.

（Ⅲ）由于 $b=2\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)^2+2(\lambda>0)$ 是 λ 的单调连续函数，有单值反函数，根据最大似然估计不变原理得 b 的最大似然估计为

$$\hat{b}=2\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_2}+1\right)^2+2=2(\overline{X}-1)^2+2.$$

【例 7.16】 设某种电子器件的寿命（以小时计）T 服从指数分布，概率密度为 $f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$ 未知. 现从这批器件中任取 n 只在时刻 $t=0$ 时投入独立寿命试验，试验进行到预定时间 T_0 结束. 此时有 $k(0<k<n)$ 只器件失效，试求 λ 的最大似然估计.

【解】 考虑事件 A：“试验直至时间 T_0 为止，有 k 只器件失效，而有 $n-k$ 只未失效”的概率. 记 T 的分布函数为 $F(t)$，即有

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

一只器件在 $t=0$ 时投入试验，则在时间 T_0 以前失效的概率为 $P\{T\leqslant T_0\}=F(T_0)=1-e^{-\lambda T_0}$；而在时间 T_0 未失效的概率为 $P\{T>T_0\}=1-F(T_0)=e^{-\lambda T_0}$. 由于各只器件的试验结果是相互独立的，因此事件 A 的概率为

www.TopSage.com

$$L(\lambda) = C_n^k(1 - e^{-\lambda T_0})^k(e^{-\lambda T_0})^{n-k},$$

这就是所求的似然函数. 取对数得

$$\ln L(\lambda) = \ln C_n^k + k\ln(1 - e^{-\lambda T_0}) + (n - k)(-\lambda T_0),$$

令 $$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{kT_0 e^{-\lambda T_0}}{1 - e^{-\lambda T_0}} - (n - k)T_0 = 0,$$

得 $$ne^{-\lambda T_0} = n - k, \text{解得 } \lambda = \frac{1}{T_0}\ln\frac{n}{n - k}.$$

于是 λ 的最大似然估计为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{T_0}\ln\frac{n}{n - k}$.

评注 似然函数的函数值,就是当参数取 θ 时,事件"随机样本取现有观测值"的概率或事件"随机样本落在现在观测值某一邻域"的概率(差一常数因子). 因此,求出这一事件的概率就得到了似然函数.

【例 7.17】 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,μ,σ^2 未知,而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本.

(Ⅰ) 求使得 $\int_a^{+\infty} f(x;\mu,\sigma^2)dx = 0.05$ 的点 a 的最大似然估计,其中 $f(x;\mu,\sigma^2)$ 是 X 的概率密度;

(Ⅱ) 求 $P\{X \geqslant 2\}$ 的最大似然估计.

【解】 已知 μ,σ 的最大似然估计分别为

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

(Ⅰ) $$\int_a^{+\infty} f(x;\mu,\sigma^2)dx = F(+\infty;\mu,\sigma^2) - F(a;\mu,\sigma^2) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right),$$

其中,F 为 X 的分布函数.

要使 $$1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 0.05, \text{即} \quad \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 0.95 = \Phi(1.645),$$

必须有 $$\frac{a - \mu}{\sigma} = 1.645, \text{即 } a = \mu + 1.645\sigma.$$

由最大似然估计的不变性,得 a 的最大似然估计为 $\hat{a} = \hat{\mu} + 1.645\hat{\sigma}$.

(Ⅱ) $P\{X \geqslant 2\} = 1 - \Phi\left(\frac{2 - \mu}{\sigma}\right)$,由最大似然估计的不变性,知 $P\{X \geqslant 2\}$ 的最大似然估计为

$$\hat{P}\{X \geqslant 2\} = 1 - \Phi\left(\frac{2 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right).$$

【例 7.18】 设总体 X 在区间 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本,$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$X_{(n)} = \max(X_1,\cdots,X_n)$.

(Ⅰ) 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量;

(Ⅱ) 求常数 a,b,使 $\hat{\theta}_1 = a\bar{X}$,$\hat{\theta}_2 = bX_{(n)}$ 均为 θ 的无偏估计,并比较其有效性;

(Ⅲ) 应用切比雪夫不等式证明:$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的一致性(相合性)估计.

【解】 直接应用定义求解.

(Ⅰ) 依题意总体 X 的密度函数、分布函数分别为

$$f(x) = \begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0 \leqslant x \leqslant \theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases}0, & x < 0,\\ \frac{x}{\theta}, & 0 \leqslant x \leqslant \theta,\\ 1, & x \geqslant \theta,\end{cases}$$

www.TopSage.com

大家网 TopSage.com

令 $\mu = EX = \frac{\theta}{2}$,解得 $\theta = 2\mu$,于是 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

又样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leqslant x_i \leqslant \theta(\text{一切 } i), \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

$L(\theta)$ 为 θ 的单调减函数,且 $0 \leqslant x_i \leqslant \theta$,即 θ 要取大于 x_i 的一切值,因此 θ 的最小取值为 $\max(x_1,\cdots,x_n)$,θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta} = \max(X_1,\cdots,X_n) = X_{(n)}$.

(Ⅱ) 由于 $EX = \frac{\theta}{2}, DX = \frac{\theta^2}{12}$,所以 $E\hat{\theta}_1 = aE\overline{X} = aEX = \frac{a\theta}{2}$,取 $a = 2$,即 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}, E\hat{\theta}_1 = \theta$,$\hat{\theta}_1$ 为 θ 的无偏估计,且 $D\hat{\theta}_1 = D(2\overline{X}) = 4D\overline{X} = 4 \cdot \frac{DX}{n} = \frac{4\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$.

为求得 b,必须求 $X_{(n)}$ 的分布函数 $F_{(n)}(x)$ 及密度函数 $f_{(n)}(x)$,由 $X_{(n)} = \max(X_1,\cdots,X_n)$ 得

$$F_{(n)}(x) = P\{X_{(n)} \leqslant x\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leqslant x\} = [F(x)]^n,$$

$$f_{(n)}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \leqslant x \leqslant \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故

$$EX_{(n)} = \int_0^\theta x \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n} dx = \frac{n\theta}{n+1},$$

$$EX_{(n)}^2 = \int_0^\theta x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n} dx = \frac{n\theta^2}{n+2},$$

$$DX_{(n)} = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

则 $E\hat{\theta}_2 = bEX_{(n)} = b \cdot \frac{n\theta}{n+1}$,当 $b = \frac{n+1}{n}$ 时,$E\hat{\theta}_2 = \theta$,即 $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ 为 θ 的无偏估计,且

$$D\hat{\theta}_2 = \frac{(n+1)^2}{n^2} DX_{(n)} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{3n} = D\hat{\theta}_1,$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

(Ⅲ) 由于 $E\hat{\theta}_i = \theta$ 且 $D\hat{\theta}_i \to 0 (n \to \infty)$,故由切比雪夫不等式:对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$0 \leqslant P\{|\hat{\theta}_i - E\hat{\theta}_i| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D\hat{\theta}_i}{\varepsilon^2} \to 0, \text{即} \lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_i - \theta| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

从而 $\hat{\theta}_i \xrightarrow{P} \theta (i = 1,2)$,$\hat{\theta}_i$ 为 θ 的一致性估计.

评注 无偏、一致性估计量不唯一.

题型三 正态总体期望与方差的区间估计

【例 7.19】 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 σ^2 为已知,则当样本容量 n 一定时,总体均值 μ 的置信区间长度 l 增大,其置信度 $1-\alpha$ 的值

(A) 随之增大. (B) 随之减小.

(C) 增减不变. (D) 增减不定.

www.TopSage.com

【分析】 对于一个正态总体方差已知关于 μ 的置信区间公式为

$$I=\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

其中 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 满足 $P\{|U|<u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$,$U\sim N(0,1)$,即 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 随 $1-\alpha$ 增大而增大. 因此置信区间长度 $l=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$ 亦随 $1-\alpha$ 增大而增大,应选(A).

【例 7.20】 某自动包装机包装洗衣粉,其重量服从正态分布,今随机抽查 12 袋,测得重量(单位:克)分别为:1001,1004,1003,1000,997,999,1004,1000,996,1002,998,999.

(Ⅰ)求平均袋重 μ 的矩估计值;　　(Ⅱ)求方差 σ^2 的矩估计值;

(Ⅲ)求 μ 的 95% 的置信区间;　　(Ⅳ)求 σ^2 的 95% 的置信区间;

(Ⅴ)若已知 $\sigma^2=8$,求 μ 的 95% 置信区间.

【解】 (Ⅰ)$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{12}(1001+\cdots+999)=1000.25$;

(Ⅱ)$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{12}\left[\sum_{i=1}^{12}X_i^2-12(\overline{X})^2\right]=76.25/12\approx 6.35$;

(Ⅲ)σ^2 未知,关于 μ 的置信区间为 $I=\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$.

查表得 $t_{0.025}(11)=2.201$,　$\frac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{6.93}{12}}=0.760$.

所以 $I=(1000.25-2.201\times 0.760,\ 1000.25+2.201\times 0.760)=(998.58,\ 1001.92)$.

(Ⅳ)μ 未知,σ^2 的 95% 置信区间为

$$I=\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).$$

查表 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(11)=21.920$,　$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(11)=3.816$.

故置信区间为

$$I=\left(\frac{76.25}{21.920},\quad \frac{76.25}{3.816}\right)\approx(3.48,19.98).$$

(Ⅴ)当 $\sigma^2=8$ 为已知时,$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,则关于 μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. 代入各组数据,且 $u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$,得

$$I=\left(1000.25-1.96\sqrt{\frac{8}{12}},\ 1000.25+1.96\sqrt{\frac{8}{12}}\right)$$
$$=(1000.25-1.6,\ 1000.25+1.6)=(998.65,\ 1001.85).$$

【例 7.21】 设两总体 X,Y 相互独立,$X\sim N(\mu_1,60)$,$Y\sim N(\mu_2,36)$,从 X,Y 中分别抽取容量为 $n_1=75$,$n_2=50$ 的样本,且算得 $\overline{X}=82$,$\overline{Y}=76$,求 $\mu_1-\mu_2$ 的 95% 的置信区间.

【解】 这是在两正态总体方差已知的条件下,求均值差的置信区间,应用公式

$$I=\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right),$$

由 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$,代入各组数值,可以得到置信区间 $I=(6-2.42,6+2.42)=(3.58,8.42)$.

【例 7.22】 一商店销售的某种商品来自甲、乙两个厂家,为考察商品性能的差异,现从甲、乙两厂产品中分别抽取了 8 件和 9 件产品,测其性能指标 X,得到两组数据,经对其作相应运算,得 $\bar{x}_1=0.190$,$s_1^2=0.006$,$\bar{x}_2=0.238$,$s_2^2=0.008$,假设性能指标服从正态分布 $N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2)$. 求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 和 $\mu_1-\mu_2$ 的

www.TopSage.com

90% 置信区间,并对所得结果加以说明.

【解】 (Ⅰ)为求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的90%的置信区间,首先查$F$分布表,

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(7,8)=3.50,$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.95}(7,8)=F_{0.05}^{-1}(8,7)=\frac{1}{3.73}.$$

置信区间为$I=\left(\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2},\ F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$

$$=\left(\frac{1}{3.50}\cdot\frac{0.006}{0.008},3.73\frac{0.006}{0.008}\right)=(0.214,2.798).$$

因为此区间包含1,故可以认为$\sigma_1^2=\sigma_2^2$,因而可以利用方差相等的条件构造$\mu_1-\mu_2$的置信区间.

(Ⅱ)由于$\sigma_1^2=\sigma_2^2$,但其值未知,故关于$\mu_1-\mu_2$的置信区间为

$$I=\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

计算 $S_W^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{7\times0.006+8\times0.008}{8+9-2}=0.007,$

$$t_{0.05}(15)=1.753,\quad\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}\approx0.486,\quad\delta=t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S_W\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\approx0.071.$$

最后可得$\mu_1-\mu_2$的置信区间$(\bar{x}_1-\bar{x}_2-\delta,\bar{x}_1-\bar{x}_2+\delta)=(-0.119,0.023)$.

从以上结果可以看出,$\mu_1-\mu_2$的置信区间包含0,故可以认为$\mu_1-\mu_2=0$,即两厂家的产品性能无显著差异.

题型四 正态总体期望与方差的假设检验

【例7.23】 某种内服药有使病人血压增高的副作用,已知血压的增高服从均值为$\mu_0=22$的正态分布.现研制出一种新药品,测试了10名服用新药病人的血压,记录血压增高的数据如下:

18, 27, 23, 15, 18, 15, 18, 20, 17, 8

问这组数据能否支持"新药的副作用小"这一结论($\alpha=0.05$)?

【分析】 如果能够根据观察数据$x_1,\cdots,x_{10}$拒绝$\mu\geqslant\mu_0=22$的假设,我们便可以支持"新药的副作用小"这一结论.

【解】 $H_0:\mu\geqslant\mu_0=22,\quad H_1:\mu<22.$ 选取统计量$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$.

当$\mu=\mu_0$时,$T\sim t(n-1)$.如果$\mu>\mu_0$,则T的值有增大趋势,所以我们应该在T取较小的值时拒绝H_0.因此H_0的否定域为$R=\{T\leqslant-\lambda\}$,其中λ满足$P\{T\leqslant-\lambda\}=\alpha=0.05$.查$t$分布表得到$\lambda=t_{0.05}(9)=1.83$,$R=\{T\leqslant-1.83\}$.具体计算可得

$$\bar{x}=17.9,\quad S^2=25.4,\quad T=\frac{17.9-22}{5.04/\sqrt{10}}=-2.57\in R.$$

由于$T\in R$,故应否定H_0接受H_1,即新药对血压的副作用小.

【例7.24】 已知$x_1,x_2,\cdots,x_{10}$是取自正态总体$N(\mu,1)$的10个观测值,统计假设为

$$H_0:\mu=\mu_0=0;H_1:\mu\neq0.$$

(Ⅰ)如果检验的显著性水平$\alpha=0.05$,且拒绝域$R=\{|\bar{X}|\geqslant k\}$,求$k$的值;

(Ⅱ)若已知$\bar{x}=1$,是否可以据此样本推断$\mu=0(\alpha=0.05)$?

www.TopSage.com

（Ⅲ）若 $H_0:\mu=0$ 的拒绝域为 $R=\{|\overline{X}|\geqslant 0.8\}$，求检验的显著性水平 α.

【分析】 方差 σ^2 为已知关于正态总体期望值 μ 的检验 $H_0:\mu=\mu_0$，选取的统计量为 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，由于 $\mu=\mu_0$ 时，$\overline{X}\sim N\left(\mu_0,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$U\sim N(0,1)$，因此拒绝域 $R=\{|U|\geqslant\lambda\}$ 与 $\overline{X}$ 的拒绝域 $R=\left\{|\overline{X}-\mu_0|\geqslant\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda\right\}$ 等价.

【解】 （Ⅰ）对于 $H_0:\mu=\mu_0=0$；$H_1:\mu\neq 0$，当 H_0 成立时，检验统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\sqrt{10}\,\overline{X}\sim N(0,1)$. 根据 $\alpha=0.05$，所以 $\lambda=1.96$，即 $P\{|U|\geqslant 1.96\}=0.05$. 该检验的拒绝域为

$$R=\{|U|\geqslant 1.96\}=\{|\sqrt{10}\overline{X}|\geqslant 1.96\}=\left\{|\overline{X}|\geqslant\frac{1.96}{\sqrt{10}}\right\},$$

于是 $k=\dfrac{1.96}{\sqrt{10}}\approx 0.62$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知拒绝域 $R=\{|\overline{X}|\geqslant 0.62\}$，如果 $\overline{x}=1$，则 $\overline{x}>0.62$，因此应拒绝 H_0，即不能据此样本推断 $\mu=0$.

（Ⅲ）显著性水平 α 是在 H_0 成立，拒绝 H_0 的概率，即

$$\begin{aligned}\alpha&=P\{(x_1,x_2,\cdots,x_{10})\in R\,|\,H_0\text{ 成立}\}=P\{(x_1,x_2,\cdots,x_{10})\in R\,|\,\mu=0\}\\&=P\{|\overline{X}|\geqslant 0.8\,|\,\mu=0\}.\end{aligned}$$

由于 $\mu=0$ 时，$\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$，所以有

$$\begin{aligned}\alpha&=P\{|\overline{X}|\geqslant 0.8\}=P\{|\sqrt{10}\overline{X}|\geqslant 0.8\sqrt{10}\}=1-P\{|\sqrt{10}\overline{X}|<0.8\sqrt{10}\}\\&=2[1-\Phi(2.53)]=0.0114.\end{aligned}$$

评注 假设检验的拒绝域可以有不同的等价形式，显著性水平是犯第一类错误的概率的上限.

【例 7.25】 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,36)$，未知参数 μ 只可能取 8 或 11 两个值，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本，给定显著性水平 α，检验假设为

$$H_0:\mu=8;\qquad H_1:\mu=11,$$

拒绝域 $R=\left\{U=\dfrac{\overline{X}-8}{6/\sqrt{n}}>\lambda\right\}$，$\lambda$ 满足 $P\{U>\lambda\}=\alpha$，其中 $U\sim N(0,1)$.

（Ⅰ）对于该检验法，根据给定的 α 求犯第二类错误的概率 β；

（Ⅱ）对于给定的 $\alpha=0.05$ 与 $\alpha=0.01$，分别求出犯第二类错误的概率 β；

（Ⅲ）如果 $\alpha=0.05$，要控制 $\beta\leqslant 0.05$，样本容量 n 为何？

【解】 （Ⅰ）$\beta=P\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R\,|\,H_1\text{ 成立}\}=P\{U<\lambda\,|\,\mu=11\}$

$$=P\left\{\frac{\overline{X}-8}{6/\sqrt{n}}<\lambda\,\middle|\,\mu=11\right\}=P\left\{\frac{\overline{X}-11}{6/\sqrt{n}}<\lambda-\frac{\sqrt{n}}{2}\,\middle|\,\mu=11\right\},$$

当 H_1 成立，即 $\mu=11$ 时，$X\sim N(11,36)$，$\dfrac{\overline{X}-11}{6/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，于是

$$\beta=\Phi\left(\lambda-\frac{\sqrt{n}}{2}\right),\text{其中 }\lambda\text{ 满足 }P\{U>\lambda\}=\alpha,U\sim N(0,1).$$

（Ⅱ）对于 $\alpha=0.05,0.01$，则查标准正态分布函数表分别得到拒绝域 R 中的分位数 $\lambda=1.64$ 与 $\lambda=2.33$. 此时犯第二类错误的概率分别为

www.TopSage.com

$$\beta_1 = \Phi\left(1.64 - \frac{\sqrt{n}}{2}\right), \quad \beta_2 = \Phi\left(2.33 - \frac{\sqrt{n}}{2}\right).$$

（Ⅲ）对于给定的 $\alpha = 0.05$，要使 $\beta \leqslant 0.05$，即

$$\beta_1 = \Phi\left(1.64 - \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \leqslant 0.05,$$

根据 $\Phi(-1.64) = 0.05$ 可得下面不等式，并解该不等式求出 n.

$$1.64 - \frac{\sqrt{n}}{2} \leqslant -1.64 \quad \Rightarrow \quad n \geqslant 6.56^2 = 43.0336.$$

故样本容量至少为44，才可使 $\beta \leqslant 0.05$.

题型训练

一、选择题

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本，$DX = \sigma^2$，$\overline{X}$ 是样本均值，则 σ^2 的无偏估计量是

（A） $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.　　（B） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

（C） $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.　　（D） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - \overline{X}^2)$.

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，记 $EX = \mu, DX = \sigma^2, \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, DS > 0$，则

（A） S 是 σ 的无偏估计.　　（B） S^2 是 σ^2 的无偏估计.

（C） $\overline{X}^2$ 是 μ^2 的无偏估计.　　（D） $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 EX^2 的无偏估计.

3. 设 $\overline{X}$ 是从总体 X 中取出的简单随机样本 $X_1, \cdots, X_n$ 的样本均值，则 $\overline{X}$ 是 μ 的矩估计，如果

（A） $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.　　（B） X 服从参数为 μ 的指数分布.

（C） $P\{X = m\} = \mu(1-\mu)^{m-1}, m = 1, 2, \cdots$.　　（D） X 服从 $[0, \mu]$ 上均匀分布.

二、填空题

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，$a\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + b\overline{X}^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计量，则 $a =$ _____，$b =$ _____.

2. 设总体 X 服从 (a, b) 上的均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自 X 的简单随机样本，则未知参数 a, b 的矩估计量为 $\hat{a} =$ _____，$\hat{b} =$ _____.

三、计算题与应用题

1. 接连不断地、独立地对同一目标射击，直到命中为止，假定共进行 $n(n \geqslant 1)$ 轮这样的射击，各轮射击次数相应为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，试求命中率 p 的最大似然估计值和矩估计值.

2. 已知总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \quad \theta > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$X_1, \cdots, X_n$ 为简单随机样本，求 θ 的矩估计量.

3. 设 X 服从 $[a, b]$ 上的均匀分布，$X_1, \cdots, X_n$ 为简单随机样本，求 a, b 的最大似然估计量.

www.TopSage.com

4. 已知总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}e^{-\frac{x-\beta}{\sqrt{\theta}}}, & x\geqslant\beta,\ \theta>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ,β 为未知参数，$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本，求 θ 和 β 的矩估计量.

5. 设总体 X 服从韦布尔分布，密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta\alpha x^{\alpha-1}e^{-\theta x^{\alpha}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 为已知，$\theta>0$ 是未知参数，试根据来自 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 θ 的最大似然估计量.

6. 设总体 X 的概率密度为

$$f(\theta;x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的一个简单随机样本，求 θ 的矩估计量.

7. 设有一批同型号产品，其次品率记为 p. 现有五位检验员分别从中随机抽取 n 件产品，检测后的次品数分别为 1,2,2,3,2.

（Ⅰ）若已知 $p=2.5\%$，求 n 的矩估计值 $\hat{n}$；

（Ⅱ）若已知 $n=100$，求 p 的极大似然估计值 $\hat{p}$；

（Ⅲ）在情况（Ⅱ）下，检验员从该批产品中再随机检测 100 个产品，试用中心极限定理近似计算其次品数大于 3 的概率$\left(\text{注：}\Phi\left(\dfrac{5}{7}\right)=0.76\right)$.

8. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，证明：k 阶样本原点矩 $\hat{\gamma}_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$ 是总体 k 阶原点矩 $\gamma_k=EX^k$ 的无偏估计量.

9. 假设批量生产的某种配件的内径 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今随机抽取 16 个配件，测得平均内径 $\bar{x}=3.05$ 毫米，样本标准差 $s=0.4$ 毫米，试求 μ 和 σ^2 的 90% 置信区间.

10. 在测量反应时间中假设反应时间服从正态分布，一心理学家估计的标准差是 0.05 秒. 为了以 95% 的置信度使他对平均反应时间的估计误差不超过 0.01 秒，应取的样本容量 n 为多少？

11. 某装置的平均工作温度据制造厂家称低于 190℃. 今从一个由 16 台装置构成的随机样本测得工作温度的平均值和标准差分别为 195℃ 和 8℃，根据这些数据能否支持厂家结论？设 $\alpha=0.05$，并假定工作温度近似服从正态分布.

大家网 TopSage.com

www.TopSage.com