

2019 李永乐·王式安
考研数学系列

数学基础过关

660题

数学一

主编◎李永乐 王式安 武忠祥

编委◎ “高数”：李正元 武忠祥 刘西垣 章纪民 蔡燧林
“线代”：李永乐 胡金德 “概率论”：王式安

核心搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》

哪里不会 重难点视频讲解 下载V研客APP
扫哪里 APP扫书中二维码 获取方式详见封二使用说明

- 一线名师强强联手
- 典型习题精选精编
- 解答精准评注点睛
- 循序渐进稳步提升
- 实力打造考研精品
- 难度适中题量适当
- 全面指导解题思路
- 基础过关举一反三

超值
加赠

金榜图书
考研数学体验课
高等数学
听课码: YWTHCVS1LB

双色印刷

高品质
阅读体验



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

全国各大考研辅导机构通用教材

2019 李永乐·王式安
考研数学系列

数学基础过关

660题

数学一

主 编

李永乐 王式安 武忠祥

编 委

王式安 (北京理工大学)	刘西垣 (北 京 大 学)
李正元 (北 京 大 学)	李永乐 (清 华 大 学)
武忠祥 (西安交通大学)	胡金德 (清 华 大 学)
章纪民 (清 华 大 学)	蔡燧林 (浙 江 大 学)

※按姓氏笔画排序



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

《数学基础过关 660 题》是为参加硕士研究生入学考试的考生编写的数学基础习题集,题目覆盖考试大纲要求的所有知识点。多年来,编写团队老师一直不断进行修改与完善,已经是广大考生公认的一本优秀考研数学题集。全书以选择题和填空题的小题形式来考查各个知识点的掌握程度。很多小题的结果都是很常用的结论,熟练掌握这些题目的解题方法可以帮助提高做题的效率。希望大家通过练习这些题目,逐步提高成绩。

图书在版编目(CIP)数据

数学基础过关 660 题. 数学一/李永乐,王式安,武忠祥主编. —西安:西安交通大学出版社,2017.11
ISBN 978-7-5605-8978-7

I. ①数… II. ①李… ②王… ③武… III. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 293201 号

书 名 数学基础过关 660 题·数学一
主 编 李永乐 王式安 武忠祥
责任编辑 张 阳 于睿哲

出版发行 西安交通大学出版社
西安市兴庆南路 10 号(邮政编码 710049)
网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
印 刷 三河市燕山印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 24 字数 521 千字
版次印次 2017 年 12 月第 1 版 2017 年 12 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-8978-7
定 价 69.80 元

读者购书、书店添货,如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

版权所有 侵权必究



金榜图书官方天猫店
店名:时代巨流图书专营店
(<http://sdjlts.tmall.com>)



金榜图书官方微店



西安交通大学出版社
天猫官方店



西安交通大学出版社
官方微店

金榜考研数学系列及使用说明

考研数学满分 150 分,数学在考研科目中的比重明显,同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来总是差别很大,因此有得数学者得考研之说。既然数学对考研成绩的意义如此重要,就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本书编写老师们根据多年的命题经验和阅卷经验总结,发现考研数学命题的灵活性非常大,反映在命题中,不仅仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更多的是表现在考查多个知识点的综合上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会千差万别。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的问题来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练所致。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐、王式安考研数学辅导团队结合多年来的考研辅导和研究,精心编写了本系列图书,目的就在于帮助考生有计划有步骤地完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。

一、本系列重点图书和复习建议

每年硕士研究生入学数学考试的时间一般都安排在上午,考生们可将数学的复习时间安排在每天上午。基础、强化阶段,每天至少应安排 2 小时来复习数学,对于数学基础较差的同学建议提早复习基础知识,每天再多花点时间来做做习题。

重点图书	复习建议
《考研数学复习全书》	重视基础积累,纵向学习,夯实知识点 由于全书的编写起点是学完大学数学课程,所以建议基础薄弱的同学,先花点时间整体的看看书中的理论知识,然后再看例题。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照规律来复习,经过必要的重复会起到事半功倍的效果。系统复习,打好基础,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。完成基础准备。另外按章节顺序完成相应的配套练习题,通过练习检验你是否真正地掌握了。
《数学基础过关 660 题》	在完成基础知识的学习后,有针对性的做一些练习。熟练掌握定理公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,体系化,系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是哪个知识点,考什么,然后做题过程中看看自己是否掌握了,应用的定理、公式的条件是否熟悉。这样才是真正做一道题。
《数学历年真题权威解析》	通过真题,进一步提高解题能力和技巧,达到实际考试的要求 第一阶段,看看各年真题,熟悉题型和常考点。 第二阶段,进行专项复习。 书中将真题按考点进行分类。对重点题型和自己薄弱的内容进行突破,达到全面掌握,不留考点空白。 第三阶段,按年份,逐年练习。

重点图书	复习建议
《数学历年真题权威解析·试卷版》	考前真题真练,提高应考技巧 仿照真实试卷,独立试卷,答题卡,答题纸。模拟考场真实环境。按照考试的要求在规定时间内去做一套真题,调动所有知识储备,调整心态,快速进入考试状态。做过的真题,自己要整理,总结的自己的薄弱环节,针对性复习,加深记忆。
《高等数学辅导讲义》	单科强化 武忠祥老师的高数教学讲稿改编而成,系统阐述了高等数学的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。
《线性代数辅导讲义》	单科强化 李永乐老师的代数教学讲稿改编而成,系统阐述了线性代数的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。
《概率论与数理统计辅导讲义》	单科强化 王式安老师的概率教学讲稿改编而成,系统阐述了概率论与数理统计的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。
《李永乐数学决胜冲刺6+2》	冲刺模拟题 通过整套题的训练,进行总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时复习一下基本概念、公式、定理,准确记忆。

备注:以上内容仅供参考。各位同学可以根据自身的能力和学习习惯进行调整。

二、本书使用说明

本书精选精编选择题与填空题,可以应用于考研的各个阶段,着重训练考生对基本概念、基本理论的理解和运用,培养学生的解题技巧和应试能力。

同时本书的重点题型还配有**视频讲解**,凡是**蓝色字印刷的题目**,解析都配有**二维码**,扫码就能观看,帮助同学更好地理解解题方法,掌握做题技巧。视频扫码详细使用方法见封二。

同时,建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多思考,要对做什么题目、做多少道题目、如何做才能获得满分有所思考和研究,不但要研究考研数学复习必须注意的考点和题型,还要思考和研究,从一道题目中,你学到了多少知识、掌握了什么解题方法,发现了多少自身存在的问题,体会到了多少命题的思路和考点。使用本书的同时,也可以配合使用本书作者编写的《考研数学复习全书》、《数学历年真题权威解析》等,提高复习效率。

前言

本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书,从2002年至今,已出版17年了,十多年来,得到了广大考生的信任与好评,成为考生心目中基础复习必备题集。2019版《660题》在2018版的基础上,进行了修订和调整,精益求精,全新升级,力争给考生们的复习带来更大的益处。

本书内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计,题型为选择题和填空题。在题目的编制设计上,我们有两个基本构思:一是选择题与填空题的模拟题,二是为解答题铺路的基础板块。

从教育部考试中心公布的统计结果来看,最近六年数学一的选择題、填空题难度系数如下:

	2012年	2013年	2014年	2015年	2016年	2017年
选择题	0.642	0.573	0.600	0.695	0.509	0.595
填空题	0.523	0.531	0.367	0.504	0.431	0.560

是不是丢分丢得有点多了?对于往届考生的失误要引以为戒,应当重视选择题、填空题的复习吧。

针对大多数考生基础薄弱,很长时间没有复习数学的事实,加大数学复习的强度是有必要的,一定量的练习是必不可少的。本书从各科的难度和需要考生掌握的程度出发,对各科的题目相应的增加,总题目数增至800题,对一些旧、难题重新编写。是一本不可多得的复习用书。

硕士研究生入学考试的性质是“具有选拔功能的水平考试”,而“考查考生对基础知识的掌握程度,是数学考试的重要目标之一”,同时“由于数学学科本身的特点,考生的数学成绩历来相关较大,这说明数学学科的考试选拔性质更加突出”。近年来,一些考生的失误“并不是因为缺乏灵活的思维和敏锐的感觉,而恰恰是因对数学大纲中规定的基础知识和基本理论的掌握还存在某些欠缺,甚至有

所偏废所致”。因此,希望广大考生要按考试大纲踏实、认真、全面、系统地复习,心态要平和,戒浮躁,要循序渐进,不断积累,逐步提高。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com/清华李永乐考研数学辅导团队。



清华李永乐
考研数学辅导团队



微信公众号

希望本书的修订再版能对同学们的复习备考有更大的帮助。对书中不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2017年12月

目录

第 1 部分 选择题

高等数学	3
线性代数	39
概率论与数理统计	57
参考答案	73
高等数学	73
线性代数	160
概率论与数理统计	198

第 2 部分 填空题

高等数学	233
线性代数	247
概率论与数理统计	256
参考答案	264
高等数学	264
线性代数	322
概率论与数理统计	350

第1部分

选择题

· 高等数学 ·

· 线性代数 ·

· 概率论与数理统计 ·

· 参考答案 ·



高等数学

1 有以下命题: 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不 $\exists$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ 不 $\exists$,

- ① $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$ 不 $\exists$. ② $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) + h(x))$ 不 $\exists$.
 ③ $\lim_{x \rightarrow a} (h(x) \cdot g(x))$ 不 $\exists$. ④ $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) + f(x))$ 不 $\exists$.

则以上命题中正确的个数是

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

2 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty (-\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty (-\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则下列命题中

不正确的是

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty (-\infty)$. (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)h(x)) = \infty$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + h(x)) = +\infty (-\infty)$. (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = +\infty$.

3 $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x-1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时有

- (A) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\pi$. (B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$. (D) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq \infty$.

4 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} =$

- (A) 0. (B) $-\frac{1}{6}$. (C) $-\frac{1}{8}$. (D) $-\frac{1}{12}$.

5 已知 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx - \ln(1 - 2x + x^2)}{x^2} = 5$, 则

- (A) $a = -4, b = 2$. (B) $a = 4, b = -2$.
 (C) $a = 3, b = -2$. (D) $a = -3, b = 2$.

6 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x^2 + x^2 f(x)}{x^6} \right) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + f(x)}{x^4}$ 为

- (A) 0. (B) 3. (C) $\frac{9}{2}$. (D) ∞ .

7 下列各题计算过程中正确无误的是

- (A) 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)'}{n'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- (B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{6x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \sin \pi x}{6} = 0$.
- (C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在.
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \infty$.

8 下列叙述正确的是

- (A) 如果 $f(x)$ 在 x_0 的任意空心邻域内无界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.
- (B) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的任意空心邻域内无界.
- (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.
- (D) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

9 设有下列命题

- ① 数列 $\{x_n\}$ 收敛(即 $\exists$ 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), 则 x_n 有界.
- ② 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+l} = a$. 其中 l 为某个确定的正整数.
- ③ 数列 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$.
- ④ 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \exists \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

则以上命题中正确的个数是

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

10 设 $x_n \leq z_n \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

- (A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定等于零.
- (C) 不一定存在. (D) 一定不存在.

11 下列命题中正确的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) \geq g(x)$.
- (B) 若 $\exists \delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B_0$ 均 $\exists$, 则 $A_0 > B_0$.
- (C) 若 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- (D) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$.

12 设 $x \rightarrow 0$ 时 $ax^2 + bx + c - \cos x$ 是比 x^2 高阶无穷小, 其中 a, b, c 为常数, 则

(A) $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 1$. (B) $a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = 0$.

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = 1$. (D) $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 0$.

13 当 $x \rightarrow 0$ 时下列无穷小中阶数最高的是

(A) $(1+x)^{x^2} - 1$. (B) $e^{x^4-2x} - 1$.

(C) $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$. (D) $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$.

14 设 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小, 则下列命题

① $f(x)g(x)$ 是 $x-a$ 的 $n+m$ 阶无穷小.

② 若 $n > m$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $x-a$ 的 $n-m$ 阶无穷小.

③ 若 $n \leq m$, 则 $f(x) + g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

④ 若 $f(x)$ 连续, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 是 $x-a$ 的 $n+1$ 阶无穷小.

中, 正确的个数是

(A) 1. (B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

15 以下极限等式(若右端极限存在, 则左端极限存在且相等)成立的个数是

① 设 $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = 0 (i = 1, 2)$ 且 $f_1(x) \sim f_2(x) (x \rightarrow a)$, 又 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$,

则 $\lim_{x \rightarrow a} (1 + f_1(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (1 + f_2(x))^{g(x)}$.

② 设 $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \lim_{x \rightarrow a} g_i(x) = 0, f_i(x) > 0, (0 < |x-a| < \delta), i = 1, 2$, 且 $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x) (x \rightarrow a)$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)^{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)^{g_2(x)}$.

③ 设 $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \lim_{x \rightarrow a} g_i(x) = 0 (i = 1, 2), \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0, f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x) (x \rightarrow a)$ 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = r \neq 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) - g_1(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x) - g_2(x)}{h(x)}$.

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

16 设 $f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x}}$ 则

(A) $x = 0$ 与 $x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x = 0$ 与 $x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

17 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ 的间断点及类型是

- (A) $x = 1$ 为第一类间断点, $x = -1$ 为第二类间断点.
 (B) $x = \pm 1$ 均为第一类间断点.
 (C) $x = 1$ 为第二类间断点, $x = -1$ 为第一类间断点.
 (D) $x = \pm 1$ 均为第二类间断点.

18 设数列极限函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(1 + \frac{x^{2n}}{1 + x^n}\right)$, 则 $f(x)$ 的定义域 I 和 $f(x)$ 的连续区间 J 分别是

- (A) $I = (-\infty, +\infty), J = (-\infty, +\infty)$.
 (B) $I = (-1, +\infty), J = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
 (C) $I = (-1, +\infty), J = (-1, +\infty)$.
 (D) $I = (-1, 1), J = (-1, 1)$.

19 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且 $f(x)$ 在 x_0 间断, 则在点 x_0 处必定间断的函数是

- (A) $f(x)\sin x$.
 (B) $f(x) + \sin x$.
 (C) $f^2(x)$.
 (D) $|f(x)|$.

20 下列命题

- ① $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, $f(u)$ 在 $u = u_0 = \varphi(x_0)$ 连续, 则 $f(\varphi(x))$ 在 $x = x_0$ 连续.
 ② $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, $f(u)$ 在 $u = u_0 = \varphi(x_0)$ 不连续, 则 $f(\varphi(x))$ 在 $x = x_0$ 不连续.
 ③ $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续, $f(u)$ 在 $u = u_0 = \varphi(x_0)$ 连续, 则 $f(\varphi(x))$ 在 $x = x_0$ 不连续.
 ④ $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续, $f(u)$ 在 $u = u_0 = \varphi(x_0)$ 不连续, 则 $f(\varphi(x))$ 在 $x = x_0$ 可能连续.
 中正确的个数是
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

21 “ $f(x)$ 在 x_0 点连续”是 $|f(x)|$ 在 x_0 点连续的

- (A) 充分条件, 但不是必要条件.
 (B) 必要条件, 但不是充分条件.
 (C) 充分必要条件.
 (D) 既不是充分, 也不是必要条件.

22 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A (\exists)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界的

- (A) 充分非必要条件.
 (B) 必要非充分条件.
 (C) 充要条件.
 (D) 既非充分又非必要条件.

23 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, 则“ $\exists x_n \in [a, +\infty)$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ ”是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界的

- (A) 充分非必要条件.
 (B) 必要非充分条件.
 (C) 充要条件.
 (D) 既非充分又非必要条件.

24 下列函数中在 $[1, +\infty)$ 无界的是

(A) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$.

(B) $f(x) = \sin x^2 + \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$.

(C) $f(x) = x \cos \sqrt{x} + x^2 e^{-x}$.

(D) $f(x) = \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2}$.

25 以下函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 无界的是

(A) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$.

(B) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$.

(C) $f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^x & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$.

(D) $f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^{\frac{1}{x}} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$.

26

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x^2}{x^3}, & x > 0, \\ g(x) \arcsin^2 x, & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

(A) 极限不存在.

(B) 极限存在, 但不连续.

(C) 连续, 但不可导.

(D) 可导.

27

设存在常数 $K > 0$ 使得

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K |x_2 - x_1|^2 \quad (\forall x_1, x_2 \in (a, b))$$

(A) $f(x)$ 在 (a, b) 有间断点.

(B) $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 但有不可导点.

(C) $f(x)$ 在 (a, b) 可导, $f'(x) \neq 0$.

(D) $f(x)$ 在 (a, b) 可导, $f'(x) \equiv 0$.

28

设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且 $f'(4) = 1$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-3\tanh h)}{h}$

等于

(A) 5.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 7.

29

设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 可微, 则下列结论中正确的个数是

① $x_0 \in (a, b)$, 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $dy|_{x=x_0}$ 与 Δx 是同阶无穷小.

② $df(x)$ 只与 $x \in (a, b)$ 有关.

③ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, 则 $dy \neq \Delta y$.

④ $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $dy - \Delta y$ 是 Δx 的高阶无穷小.

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

30 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a, b) 上可导, 考虑下列叙述:

① 若 $f(x) > g(x)$, 则 $f'(x) > g'(x)$. ② 若 $f'(x) > g'(x)$ 则 $f(x) > g(x)$.
则

- (A) ①、② 都正确. (B) ①、② 都不正确.
(C) ① 正确, 但 ② 不正确. (D) ② 正确, 但 ① 不正确.

31 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在二阶导数, 且 $f(x) = f(-x)$, 当 $x < 0$ 时有 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 则当 $x > 0$ 时, 有:

- (A) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$. (B) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.
(C) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$. (D) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

32 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = a$, 则

- (A) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必可导且 $f'(x_0) = a$.
(B) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续, 但未必可导.
(C) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必有极限但未必连续.
(D) 以上结论都不对.

33 设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}-1}, & |x| < 1, \\ x^4 - bx^2 + c, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 可导, 则 $(b, c) =$

- (A) $(2, 1)$. (B) $(1, 0)$. (C) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. (D) $(3, 2)$.

34 设 α 是实数, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^\alpha} \cos \frac{1}{x-1}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 则 α 的取值为

- (A) $\alpha < -1$. (B) $-1 \leq \alpha < 0$.
(C) $0 \leq \alpha < 1$. (D) $\alpha \geq 1$.

35 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x = a$ 处不可导的充分必要条件是

- (A) $f(a) = 0$, 且 $f'(a) = 0$. (B) $f(a) = 0$, 且 $f'(a) \neq 0$.
(C) $f(a) > 0$, 且 $f'(a) > 0$. (D) $f(a) < 0$, 且 $f'(a) < 0$.

36 设 $f(x) = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$, 则 $f'(x)$ 不存在的点个数是

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

37 设 $F(x) = g(x)\varphi(x)$ 在点 $x = a$ 某邻域内有定义, $x = a$ 是 $\varphi(x)$ 的跳跃间断点, $g'(a)$ 存在, 则 $g(a) = 0, g'(a) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = a$ 处可导的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 必要非充分条件. (D) 非充分非必要条件.

38 函数 $f(x) = (x^2 + x - 2)|\sin 2\pi x|$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 区间上不可导点的个数是

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

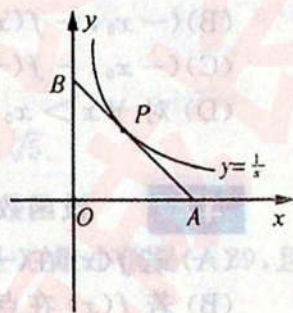
39 设直线 $y = ax + b$ 同时与曲线 $y = x^2$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 相切, 则常数 a, b 为

- (A) $a = -4, b = -4$. (B) $a = -3, b = -4$.
(C) $a = -4, b = -3$. (D) $a = -3, b = -3$.

40 在曲线 $y = \frac{1}{x} (0 < x < +\infty)$ 上任一点 $P(x, y)$ 处作切

线, 该切线分别交 x 轴与 y 轴于 A 和 B (如图所示), 则

- (A) $\overline{PA} < \overline{PB}$.
(B) $\overline{PA} = \overline{PB}$.
(C) $\overline{PA} > \overline{PB}$.
(D) $\overline{PA}, \overline{PB}$ 的大小关系与 P 的位置有关.



41 设 $f(x) = |x| \sin^2 x$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n =$

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

42 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 且 $f'(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得

- (A) $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 单调上升.
(B) $f(x) > f(x_0), x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$.
(C) $f(x) > f(x_0), x \in (x_0, x_0 + \delta)$.
(D) $f(x) < f(x_0), x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

43 下列函数 $f(x)$ 中, 导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续的是

- (A) $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
(C) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

44 设 $f(x)$ 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 满足方程 $(x-1)f''(x) + 2(x-1)[f'(x)]^3 = 1 - e^{1-x}$, 且 $f(x)$ 在 $x = a (a \neq 1)$ 处 $f'(a) = 0$, 则 $x = a$

- (A) 是 $f(x)$ 的极小值点. (B) 是 $f(x)$ 的极大值点.
(C) 不是 $f(x)$ 的极值点. (D) 是 $f(x)$ 的拐点.

45 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$, 则

- (A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
- (B) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
- (C) $(1, f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标.
- (D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(1, f(1))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标.

46 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导, $x_0 \neq 0, (x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 则

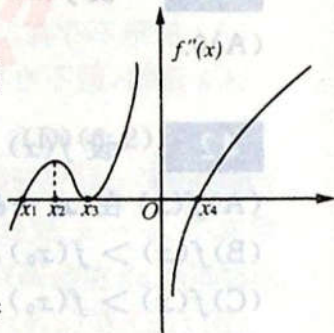
- (A) x_0 必是 $f'(x)$ 的驻点.
- (B) $(-x_0, -f(x_0))$ 必是 $y = -f(-x)$ 的拐点.
- (C) $(-x_0, -f(-x_0))$ 必是 $y = -f(x)$ 的拐点.
- (D) 对 $\forall x > x_0$ 与 $x < x_0, y = f(x)$ 的凹凸性相反.

47 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 则下述命题中正确的是

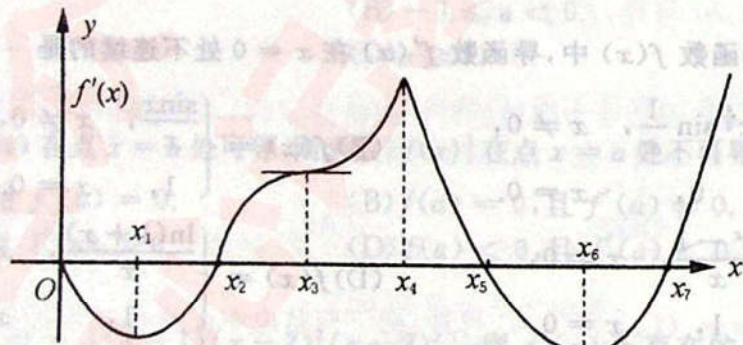
- (A) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导且单调增加, 则对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f'(x) > 0$.
- (B) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$.
- (C) 若 $f''(x_0) = 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点坐标.
- (D) 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

48 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 其二阶导函数的图形如图所示, 则 $y = f(x)$ 的拐点的个数是

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.



49 设 $[0, +\infty)$ 区间上 $y = f(x)$ 的导函数的图形如下图所示



则 $y = f(x)$ 的拐点的个数是

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

50 函数 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $[1, +\infty)$

- (A) 单调上升.
- (B) 单调下降.
- (C) 为常数.
- (D) 有两个单调性区间.

51

曲线 $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$

- (A) 既有垂直又有水平与斜渐近线. (B) 仅有垂直渐近线.
(C) 只有垂直与水平渐近线. (D) 只有垂直与斜渐近线.

52

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(a) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则

- (A) $f'_+(a) = 0$. (B) $f'_+(a) \geq 0$.
(C) $f'_+(a) < 0$. (D) $f'_+(a) \leq 0$.

53

数列 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ 的最大项为

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $\sqrt[3]{3}$. (C) $\sqrt[4]{4}$. (D) $\sqrt[5]{5}$.

54

设 $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值是 3, 最小值是 -29, 且 $a > 0$, 则

- (A) $a = 2, b = -29$. (B) $a = 3, b = 2$.
(C) $a = 2, b = 3$. (D) 以上都不对.

55

原点 $O(0, 0)$ 与曲线 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 之间的最短距离为

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

56

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, 又 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 单调上升, 在 $[x_0, +\infty)$ 单调下降, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上相应的值域是

- (A) $[f(a), f(x_0)]$. (B) $[l, f(x_0)]$.
(C) $(l, f(x_0)]$. (D) 以上均不对.

57

以下四个命题中, 正确的是

- (A) 若 $f'(x)$ 在 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.
(B) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.
(C) 若 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.
(D) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 则 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界.

58

设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导, 则 $f'(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有界是 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有界的

- (A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 充分且必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

59 设 $f(x)$ 处处可导, 则下面命题正确的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$.
 (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.
 (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

60 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 二阶可导, 满足 $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f''(x) < 0 (x > 0)$, 又设 $b > a > 0$, 则 $a < x < b$ 时恒有

- (A) $af(x) > xf(a)$. (B) $bf(x) > xf(b)$.
 (C) $xf(x) > bf(b)$. (D) $xf(x) > af(a)$.

61 设 $f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内存在导数, $f'(x)$ 单调减少, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 则

- (A) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$.
 (B) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$.
 (C) 在 $(1-\delta, 1)$ 内有 $f(x) < x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内有 $f(x) > x$.
 (D) 在 $(1-\delta, 1)$ 内有 $f(x) > x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内有 $f(x) < x$.

62 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 零点个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

63 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内方程 $x^2 - x \sin x - \cos x = 0$

- (A) 无实根. (B) 有且仅有一个实根.
 (C) 有且仅有两个实根. (D) 有无穷多个实根.

64 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 有二阶导数, $f(2) = 0$, $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 则 $F''(x)$ 在 $(1, 2)$ 上

- (A) 没有零点. (B) 必有零点.
 (C) 若有零点, 必不止一个. (D) 若有零点必唯一.

65 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数, 则 $f(x) + F(x)$ 在 (a, b) 上

- (A) 可导. (B) 连续.
 (C) 存在原函数. (D) 是初等函数.

66 设 $f(x)$ 一阶可导, $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, 则当 $\Delta x > 0$ 时

- (A) $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt > f(x) \Delta x > 0$. (B) $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt < f(x) \Delta x < 0$.
 (C) $f(x) \Delta x > \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt > 0$. (D) $f(x) \Delta x < \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt < 0$.

67 考察下列叙述:

- ① 设 $f^2(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.
 ② 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则 $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 连续.
 ③ 设 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.
 ④ 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 只有有限个间断点, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 可积, 即在 $[a, b]$ 存在定积分. 我们可知

- (A) 只有 ①、② 正确. (B) 只有 ②、③ 正确.
 (C) 只有 ②、④ 正确. (D) 只有 ③、④ 正确.

68 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则下列结论中正确的有 _____ 个.

① $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的任意子区间 $[\alpha, \beta]$ 上有 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, 则 $f(x) = 0 (\forall x \in [a, b])$.

② $f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$, 又 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则 $f(x) = 0 (x \in [a, b])$.

③ $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^{\beta} f(x) dx$.

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

69 在下列定积分中, 积分值等于零的是

(A) $\int_{-1}^1 x^7 \sin^9 x dx$. (B) $\int_{-1}^1 x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$.

(C) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos^5 x dx$. (D) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin^5 x dx$.

70 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) dx$, 则下列选项中正确的是

- (A) $I < J < 1$. (B) $I < 1 < J$. (C) $J < I < 1$. (D) $I = J$.

71 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx$, 则

- (A) $I_1 < 1 < I_2$. (B) $1 < I_1 < I_2$. (C) $I_2 < 1 < I_1$. (D) $I_1 < I_2 < 1$.

72 数列极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt[n]{n}} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} dx =$

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$. (B) $\frac{\pi}{12}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

73 $\frac{d}{dx} \int_{\cos^2 x}^{2x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt =$

(A) $\frac{1}{\sqrt{1+4x^6}} - \frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

(B) $\frac{6x^2}{\sqrt{1+4x^6}} - \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

(C) $\frac{6x^2}{\sqrt{1+4x^6}} + \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

(D) $\frac{6x^2}{\sqrt{1+4x^6}} - \frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

74

设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ \cos x, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则在区间 $(-1, 1)$ 上

- (A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在原函数.
- (B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不存在原函数.
- (C) $f(x)$ 存在原函数, $g(x)$ 不存在原函数.
- (D) $f(x)$ 不存在原函数, $g(x)$ 存在原函数.

75

设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4+x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sqrt{1-x}, & x < 0, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

- (A) $F(x)$ 在 $x = 0$ 点不连续.
- (B) $F(x)$ 在 $x = 0$ 点不可导.
- (C) $F(x)$ 在 $x = 0$ 点可导, $F'(0) = f(0)$.
- (D) $F(x)$ 在 $x = 0$ 点可导, 但 $F'(0) \neq f(0)$.

76

下列叙述错误的是

- (A) 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 连续为奇函数, 则 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 的全体原函数为偶函数.
- (B) 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 连续为偶函数, 则 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 的全体原函数为奇函数.
- (C) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 以 T 为周期且为奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 也是以 T 为周期的函数.
- (D) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 以 T 为周期, 又 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 也是以 T 为周期的函数.

77

设 $f(x)$ 可导, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $F(x) = \int_0^x t^2 f(x^3 - t^3) dt$, $g(x) = \frac{x^7}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x)$ 是 $g(x)$ 的

- (A) 低阶无穷小.
- (B) 高阶无穷小.
- (C) 等价无穷小.
- (D) 同阶但非等价无穷小.

78

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 在 $(0, 1)$ 可导且 $f'(x) < 0 (x \in (0, 1))$, 则

- (A) 当 $0 < x < 1$ 时 $\int_0^x f(t) dt > \int_0^1 xf(t) dt$.
- (B) 当 $0 < x < 1$ 时 $\int_0^x f(t) dt = \int_0^1 xf(t) dt$.
- (C) 当 $0 < x < 1$ 时 $\int_0^x f(t) dt < \int_0^1 xf(t) dt$.
- (D) 以上结论均不正确.

79

$$\int_0^a f(x) dx$$

- $$(A) \geq 0.$$

80

是 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 单调增加的

- (A) 充分非必要条件.

81

- (A) 1 个.

82

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \text{则 } \varphi(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处}$$

- (A) 不连续.

83

$$(A) \int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt.$$

$$(C) \int_0^x f(t^2) dt.$$

91

- (A) $F(0)$ 是极大值.

85

$$I = \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx, \text{ 则}$$

- (A) $I = 0$

86 设 $a_n = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n-1} \sqrt{1+x^{2n}} dx$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n =$

- (A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$. (B) $(1+e^2)^{\frac{3}{2}} - 1$.
(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$. (D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$.

87 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\pi n} |\sin x| dx}{(n+1)\pi} =$

- (A) 0. (B) 不存在. (C) $\frac{2}{\pi}$. (D) $\frac{1}{\pi}$.

88 $I = \int_0^{100\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx =$

- (A) $200\sqrt{2}$. (B) $50\sqrt{2}$. (C) $100\sqrt{2}$. (D) 200.

89 函数 $F(x) = \int_x^{x+\pi} \ln(1+\cos^2 t) \cos 2t dt$

- (A) 为正数. (B) 为负数. (C) 恒为零. (D) 不是常数.

90 设 $f(x) = \int_0^x (e^{\cos t} - e^{-\cos t}) dt$, 则

- (A) $f(x) = f(x+2\pi)$.
(B) $f(x) > f(x+2\pi)$.
(C) $f(x) < f(x+2\pi)$.
(D) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(x+2\pi)$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) < f(x+2\pi)$.

91 设 $\sin x \ln |x|$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则不定积分 $\int x f'(x) dx =$

- (A) $x \cos x \ln |x| + x \cdot \frac{\sin x}{|x|} - \sin x \ln |x| + C$.
(B) $x \cos x \ln |x| + \sin x - \sin x \ln |x| + C$.
(C) $\cos x \ln |x| - \frac{\sin x}{|x|} - \sin x \ln |x| + C$.
(D) 以上均不正确.

92 积分 $I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x}} dx =$

- (A) $\frac{156}{315}$. (B) $\frac{256}{315}$. (C) $\frac{198}{315}$. (D) $\frac{208}{315}$.

93 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) =$

- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

94

设 n, m 为非负整数 $I_{n,m} = \int_0^1 x^n \ln^m x dx$ 是(A) 定积分且值为 $\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{m+1}}$.(B) 定积分且值为 $\frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.

(C) 反常积分且发散.

(D) 反常积分且值为 $\frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.

95

关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx$, 下列结论正确的是

(A) 取值为零.

(B) 取正值.

(C) 发散.

(D) 取负值.

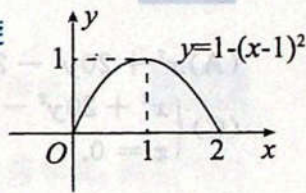
96

曲线 $y = e^{-x} \sin x (0 \leq x \leq 3\pi)$ 与 x 轴所围成的面积可表示为(A) $-\int_0^{3\pi} e^{-x} \sin x dx$.(B) $\int_0^{3\pi} e^{-x} \sin x dx$.(C) $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx$.(D) $\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx$.

97

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(x) > 0$, 下面不等式 $f(a)(b-a) < \int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 成立的条件是(A) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.(B) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.(C) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.(D) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

98

由曲线 $y = 1 - (x-1)^2$ 及直线 $y = 0$ 围成图形绕 y 轴旋转而成立体的体积 V 是(A) $\int_0^1 \pi(1 + \sqrt{1+y})^2 dy$.(B) $\int_0^1 \pi(1 - \sqrt{1-y})^2 dy$.(C) $\int_0^1 \pi[(1 + \sqrt{1-y}) - (1 - \sqrt{1-y})]^2 dy$.(D) $\int_0^1 \pi[(1 + \sqrt{1-y})^2 - (1 - \sqrt{1-y})^2] dy$.

99

曲线 $r = ae^{b\theta} (a > 0, b > 0)$ 从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \alpha (\alpha > 0)$ 的一段弧长为(A) $s = \int_0^\alpha ae^{b\theta} \sqrt{1+b^2} d\theta$.(B) $s = \int_0^\alpha \sqrt{1+(abe^{b\theta})^2} d\theta$.(C) $s = \int_0^\alpha \sqrt{1+(ae^{b\theta})^2} d\theta$.(D) $s = \int_0^\alpha abe^{b\theta} \sqrt{1+(abe^{b\theta})^2} d\theta$.

100 旋轮线的一支 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的质心是

- (A) $(\pi a, \frac{4}{3}a)$. (B) $(\pi a, \frac{2}{3}a)$.
(C) $(\pi a, \frac{5}{4}a)$. (D) $(\pi a, \frac{7}{4}a)$.

101 半圆形闸门半径为 R (米), 将其垂直放入水中, 且直径与水面齐. 设水密度与重力加速度乘积 $\rho g = 1$. 若坐标原点取在圆心, x 轴正向朝下, 则闸门所受压力 p 为

- (A) $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$. (B) $\int_0^R 2 \sqrt{R^2 - x^2} dx$.
(C) $\int_0^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx$. (D) $\int_2^R (R - x) \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

102 设 a, b, c 为非零向量, 则与 a 不垂直的向量是

- (A) $(a \cdot c)b - (a \cdot b)c$. (B) $b - \frac{a \cdot b}{|a|^2}a$.
(C) $a \times b$. (D) $a + (a \times b) \times a$.

103 设 a, b 是空间中的两个非零常向量, 且 $|b| = 1$, $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{3}$ ($\langle a, b \rangle$ 为 a 与 b 的夹角), 则 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a + xb| - |a|}{x} =$

- (A) 1. (B) 0. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

104 曲线 $L: \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 1 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ (1) 在 xOy 面上的投影柱面方程是

- (A) $x^2 + 20y^2 - 24x - 116 = 0$. (B) $4y^2 + 4z^2 - 12z - 7 = 0$.
(C) $\begin{cases} x^2 + 20y^2 - 24x - 116 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 4y^2 + 4z^2 - 12z - 7 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

105 设平面 Π 位于平面 $\Pi_1: x - 2y + z - 2 = 0$ 和平面 $\Pi_2: x - 2y + z - 6 = 0$ 之间, 且将此二平面的距离分为 $1:3$, 则平面 Π 的方程为

- (A) $x - 2y + z - 5 = 0$ 或 $x - 2y + z - 3 = 0$.
(B) $x - 2y + z + 8 = 0$.
(C) $x + 2y + 4z = 0$.
(D) $x - 2y + 5z - 3 = 0$.

106 直线 $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$ 与平面 $\Pi: x - y + 2z + 4 = 0$ 的夹角为

- (A) π . (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{\pi}{6}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

107 直线 L 为 $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$, 平面 Π 为 $4x-2y+z-2=0$, 则

- (A) L 平行于 Π . (B) L 在 Π 上.
(C) L 垂直于 Π . (D) L 与 Π 斜交.

108 点 $M_1(0, 1, -1)$ 到直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ 的距离 $d =$

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

109 与直线 $L_1: \begin{cases} x=1 \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$ 及直线 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点的平面 Π 的方程是

- (A) $x+y+z=0$. (B) $x-y+z=0$.
(C) $x+y-z=0$. (D) $x-y+z+2=0$.

110 设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, 则直线 $L_3: \frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $L_1:$

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$
 是

- (A) 相交于一点. (B) 重合.
(C) 平行但不重合. (D) 异面直线.

111 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2}$

- (A) 不存在. (B) 等于 1.
(C) 等于 2. (D) 等于 $\frac{1}{2}$.

112 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$

- (A) 不存在. (B) 等于 2.
(C) 等于 $\frac{1}{2}$. (D) 等于 0.

113 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \ln(x^2+y^2)$

- (A) 不存在. (B) 等于 1.
(C) 等于 0. (D) 等于 2.

114 设 k 为常数, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4}$

(A) 等于 0.

(B) 等于 $\frac{1}{2}$.

(C) 不存在.

(D) 存在与否与 k 取值有关.

115 二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续是函数 $z = f(x, y)$ 在该点处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 都存在的

(A) 必要但非充分条件.

(B) 充分但非必要条件.

(C) 充要条件.

(D) 既非充分条件也非必要条件.

116 设 $f'_x(x_0, y_0) = a, f'_y(x_0, y_0) = b$, 则下列结论正确的是

(A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 存在, 但 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不连续.

(B) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

(C) $dz \Big|_{(x_0, y_0)} = adx + bdy$.

(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0)$ 及 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y)$ 都存在且相等.

117 设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 都存在, 则

(A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

(B) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 存在.

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$.

(D) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微.

118 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处

(A) 连续、偏导数存在.

(B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在.

(D) 不连续、偏导数不存在.

119 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

(A) 两个偏导数都不存在.

(B) 两个偏导数都存在但不可微.

(C) 偏导数连续.

(D) 可微但偏导数不连续.

120 已知 $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^4}$, 则

(A) $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都存在.

(B) $f'_x(0, 0)$ 存在但 $f'_y(0, 0)$ 不存在.

(C) $f'_x(0, 0)$ 不存在但 $f'_y(0, 0)$ 存在.

(D) $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都不存在.

121 函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微的充分条件是

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = f'_x(0, 0)$ 且 $\lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y) = f'_y(0, 0)$.
 (B) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y}$ 都存在.
 (D) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_x(x, y) = f'_x(0, 0)$ 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_y(x, y) = f'_y(0, 0)$.

122 设 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

- (A) 不连续. (B) 连续但两个偏导数不存在.
 (C) 两个偏导数存在但不可微. (D) 可微.

123 设 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|} = -1$, 则下列结论不

正确的是

- (A) $f'_x(0, 0)$ 不存在. (B) $f'_y(0, 0)$ 不存在.
 (C) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处取极小值. (D) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处不可微.

124 设 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

- (A) 不连续. (B) 连续但两个偏导数不存在.
 (C) 两个偏导数存在但不可微. (D) 可微.

125 设 $z = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则该函数在 $(0, 0)$ 点

- (A) 不连续. (B) 连续但偏导数不存在.
 (C) 连续且偏导数存在但不可微. (D) 可微.

126 如果 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在.

127 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使不等

式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是

- (A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.
 (C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.

128 已知 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{h} =$

(A) $f'_x(x_0, y_0)$.

(B) 0.

(C) $2f'_x(x_0, y_0)$.

(D) $\frac{1}{2}f'_x(x_0, y_0)$.

129 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, Δz 是 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量, 则在点 (x_0, y_0) 处

(A) $\Delta z = dz$.

(B) $\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$.

(C) $\Delta z = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$.

(D) $\Delta z = dz + o(\rho)$.

130 函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处

(A) 不连续.

(B) 偏导数存在.

(C) 可微.

(D) 沿任一方向方向导数存在.

131 已知 $f'_x(0, 0) = 2, f'_y(0, 0) = 3$, 则

(A) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续.

(B) $df(x, y) \Big|_{(0,0)} = 2dx + 3dy$.

(C) $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(0,0)} = 2\cos\alpha + 3\cos\beta$, 其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 为 l 的方向余弦.

(D) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处沿 x 轴负方向的方向导数为 -2 .

132 设可微函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} > 1, \frac{\partial f}{\partial y} < -1, f(0, 0) = 0$, 则下列结论正确的是

(A) $f(1, 1) > 1$.

(B) $f(-1, 1) > -2$.

(C) $f(-1, -1) < 0$.

(D) $f(1, -1) > 2$.

133 已知 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在, 则

(A) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续.

(B) $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 都存在.

(C) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

(D) 以上三个选项都不对.

134 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f'_x(0, 0) = 2, f'_y(0, 0) = 1$, 则

(A) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的法向量为 $\{2, 1, 1\}$.

(B) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的切向量为 $\{1, 0, 2\}$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的切向量为 $\{2, 0, 1\}$.

(D) $dz \Big|_{(0,0)} = 2dx + dy$.

135 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(0, 0) = 0, f(2, 1) > 3, f'_y(x, y) < 0$, 则至少存在一点 (x_0, y_0) 使

- (A) $f'_x(x_0, y_0) < 1$. (B) $f'_x(x_0, y_0) < -3$.
(C) $f'_x(x_0, y_0) = \frac{3}{2}$. (D) $f'_x(x_0, y_0) > \frac{3}{2}$.

136 已知方程 $f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 确定了函数 $z = z(x, y)$, 其 $f(u, v)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

- (A) z . (B) $-z$. (C) y . (D) $-y$.

137 设 $z = f(xy, x^2 + y^2)$, 其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

- (A) $f_1 + xyf_{11} + 4xyf_{22}$. (B) $f_1 + xyf_{11} + 2(x^2 + y^2)f_{12} + 4xyf_{22}$.
(C) $xyf_{11} + 2(x^2 + y^2)f_{12} + 4xyf_{22}$. (D) $xyf_{11} + 4xyf_{22}$.

138 已知函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, f'_x(1, y) = y + 1, f(1, y) = y + 2$, 则 $f(x, y) =$

- (A) $x^2 + (y - 1)x + 2$. (B) $x^2 + (y + 1)x + 2$.
(C) $x^2 + (y - 1)x - 2$. (D) $x^2 + x(y + 1) - 2$.

139 已知 $df(x, y) = (2y^2 + 2xy + 3x^2)dx + (4xy + x^2)dy$, 则 $f(x, y) =$

- (A) $2xy^2 + x^2y$. (B) $2xy^2 + x^2y + x^3$.
(C) $2xy^2 + x^2y + x^3 + C$. (D) $3xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

140 已知 $\frac{(x + ay)dx + ydy}{(x + y)^2}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则 a 等于

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

141 已知 $du(x, y) = (axy^3 + \cos(x + 2y))dx + (3x^2y^2 + b\cos(x + 2y))dy$, 则

- (A) $a = 2, b = -2$. (B) $a = 3, b = 2$.
(C) $a = 2, b = 2$. (D) $a = -2, b = 2$.

142 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ 的方向导数为

- (A) 12. (B) 6. (C) 4. (D) 2.

143 函数 $f(x, y, z) = x^2y^3 + 3y^2z^3$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处方向导数的最大值为

- (A) $\sqrt{107}$. (B) $\sqrt{117}$. (C) 117. (D) 107.

144 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $(1, 0)$ 处的梯度向量为

- (A) $-i$. (B) i . (C) $-j$. (D) j .

145 设可微函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的梯度向量为 $g, l = (0, 2, 2)$ 为一常向量, 且 $g \cdot l = 1$, 则函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处沿 l 方向的方向导数等于

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. (C) $-2\sqrt{2}$. (D) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

146 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$ 则点 P 的坐标是

- (A) $(1, -1, 2)$. (B) $(-1, 1, 2)$.
(C) $(1, 1, 2)$. (D) $(-1, -1, 2)$.

147 在曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线

- (A) 只有一条. (B) 只有两条.
(C) 至少有三条. (D) 不存在.

148 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的切线方程为

- (A) $\frac{x-1}{2} = y+1 = z$. (B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$.
(C) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$. (D) $x-1 = y+1 = -\frac{z}{2}$.

149 函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处沿曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 在该点指向 x 轴负向一侧的切线方向的方向导数等于

- (A) -12 . (B) 12 . (C) $-\frac{12}{\sqrt{14}}$. (D) $\frac{12}{\sqrt{14}}$.

150 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^x = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$.
(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$.

151 曲面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 4$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和为

- (A) 48. (B) 64. (C) 36. (D) 16.

152 下列命题正确的是

- (A) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的驻点.
(B) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的驻点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的极值点.

(C) 若 (x_0, y_0) 为有界闭区域 D 上连续的函数 $f(x, y)$ 在 D 内部唯一的极值点, 且 $f(x, y)$ 在该点取极大值, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得它在 D 上的最大值.

(D) 若 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 则 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值.

153 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取极大值, 则下列结论正确的是

(A) $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(B) $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$, 且 $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

(C) $-f(x_0, y)$ 在 y_0 处取极小值.

(D) $|f(x, y)|$ 在 (x_0, y_0) 处取极大值.

154 设 $F(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0, F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) > 0$. 若一元函数 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的在点 (x_0, y_0) 附近的隐函数, 则 x_0 是函数 $y = y(x)$ 的极小值点的一个充分条件是

(A) $F''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

(B) $F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

(C) $F''_{yy}(x_0, y_0) > 0$.

(D) $F''_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

155 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = -2$, 则

(A) $f'_x(0, 0)$ 不存在.

(B) $f'_x(0, 0)$ 存在但不为零.

(C) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点取极大值.

(D) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点取极小值.

156 设 $u(x, y)$ 在平面有界闭区域 D 上有连续二阶偏导数, 在 D 内 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则函数 $u(x, y)$

(A) 最大值点和最小值点必定都在 D 的内部.

(B) 最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上.

(C) 最大值点在 D 的内部, 最小值点在 D 的边界上.

(D) 最大值点在 D 的边界上, 最小值点在 D 的内部.

157 函数 $f(x, y) = kx^2 + y^3 - 3y$ 在点 $(0, 1)$ 处

(A) 取极大值.

(B) 取极小值.

(C) 不取得极值.

(D) 是否取得极值与 k 取值有关.

158 函数 $f(x, y) = 1 + x + y$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值与最小值之积为

(A) -1 .

(B) 1 .

(C) $1 + \sqrt{2}$.

(D) $1 - \sqrt{2}$.

159 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上到平面 $x + 2y + z = 10$ 距离最大的点为

(A) $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

(B) $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

(C) $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

(D) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

160 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$, $(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) d\sigma$ 等于

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y d\sigma$.

(B) $2 \iint_{D_1} xy d\sigma$.

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) d\sigma$.

(D) 0.

161 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 可写成

(A) $\int_0^2 dx \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$.

(C) $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx$.

(D) $\int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy$.

162 累次积分 $\int_0^2 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$ 可写成

(A) $\int_0^2 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^2 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$.

(C) $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy$.

(D) $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$.

163 交换积分次序 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ 为

(A) $\int_0^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx$.

(B) $\int_e^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$.

(C) $\int_0^{\ln e} dy \int_1^e f(x, y) dx$.

(D) $\int_0^1 dy \int_e^1 f(x, y) dx$.

164 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$, ($a > 0$) 则积分域为

(A) $x^2 + y^2 \leq a^2$.

(B) $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($x \geq 0$).

(C) $x^2 + y^2 \leq ax$.

(D) $x^2 + y^2 \leq ax$ ($y \geq 0$).

165 设 $f(x, y)$ 在 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$ 上连续, 则 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \iint_D f(x, y) d\sigma$

(A) 不一定存在.

(B) 存在且等于 $f(0, 0)$.

(C) 存在且等于 $\pi f(0, 0)$.

(D) 存在且等于 $\frac{1}{\pi} f(0, 0)$.

166 设 $g(x)$ 是可微函数 $y = f(x)$ 的反函数, 且 $f(1) = 0$, $\int_0^1 xf(x) dx = 1009$, 则

$\int_0^1 dx \int_0^{f(x)} g(t) dt$ 的值为

(A) 0.

(B) 2017.

(C) 2018.

(D) 2100.

167 设 $g(x)$ 有连续的导数, $g(0) = 0, g'(0) = a \neq 0, f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域

内连续, 则 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy}{g(r^2)}$

(A) $\frac{f(0,0)}{a}$.

(B) $\frac{f(0,0)}{2a}$.

(C) $\frac{\pi}{a} f(0,0)$.

(D) $\frac{\pi}{2a} f(0,0)$.

168

已知 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dx \int_t^x e^{-y^2} dy}{t^\alpha} = \beta \neq 0$, 则

(A) $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$.

(B) $\alpha = 2, \beta = \frac{1}{2}$.

(C) $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$.

(D) $\alpha = 3, \beta = -\frac{1}{2}$.

169

设 $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} dx dy, I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} dx dy, I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} dx dy$, 其中 D 由不

等式 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 所确定, 则

(A) $I_2 < I_3 < I_1$.

(B) $I_1 < I_2 < I_3$.

(C) $I_3 < I_1 < I_2$.

(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

170

设平面域 D 由 $x+y = \frac{1}{2}, x+y = 1$ 及两条坐标轴围成, $I_1 = \iint_D \ln(x+y)^3 dx dy$,

$I_2 = \iint_D (x+y)^3 dx dy, I_3 = \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy$ 则

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

(B) $I_3 < I_1 < I_2$.

(C) $I_1 < I_3 < I_2$.

(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

171

设 D 为单位圆域 $x^2 + y^2 \leq 1, I_1 = \iint_D (x^3 + y^3) dx dy, I_2 = \iint_D (x^4 + y^4) dx dy$,

$I_3 = \iint_D (2x^6 + y^5) dx dy$, 则

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

(B) $I_3 < I_1 < I_2$.

(C) $I_3 < I_2 < I_1$.

(D) $I_1 < I_3 < I_2$.

172

设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$, 其中 D 是由 $y = 0, y = x^2$,

$x = 1$ 所围区域, 则 $f(x, y)$ 等于

(A) xy .

(B) $2xy$.

(C) $xy + \frac{1}{8}$.

(D) $xy + 1$.

173 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$; 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv.$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv.$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv.$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$

174 设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 所围成的区域, $f(x, y, z)$ 连续, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 等于

(A) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$ (B) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$

(C) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$ (D) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz.$

175 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2, y = x, y = 0, z = 1$ 在第一卦限所围成的区域, $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^1 f(x, y, z) dz.$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$

176 设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(0) = 0$, 区域 Ω 由柱面 $x^2 + y^2 = t^2 (t > 0)$ 和两平面 $z = 0, z = 1$ 所围成, 则 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dv$ 等于

(A) $\pi f'(0).$ (B) $\pi f(0).$ (C) $\frac{\pi}{2} f(0).$ (D) $\frac{\pi}{2} f'(0).$

177 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0), S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分, 则

(A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS.$

(B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} y dS.$

(C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} z dS.$

(D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS.$

178 下列结论

(1) $\oint_{x^2+y^2=a^2} (x^2 + y^2) ds = a^2 \oint_{x^2+y^2=a^2} ds = 2\pi a^3$

(2) $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) d\sigma = a^2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} d\sigma = \pi a^4$

$$(3) \oint_{x^2+y^2+z^2=a^2} (x^2+y^2+z^2) dS = a^2 \oint_{x^2+y^2+z^2=a^2} dS = 4\pi a^4$$

$$(4) \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} (x^2+y^2+z^2) dv = a^2 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} dv = \frac{4}{3}\pi a^5$$

中正确的条数为

- (A) 1 条. (B) 2 条. (C) 3 条. (D) 4 条.

179 设 $C_k (k=1,2,3)$ 分别为曲线 $x^2+y^2=1, \frac{x^2}{2}+y^2=1, x^2+y^2=2$, 其方向为

逆时针方向, $I_k = \oint_{C_k} (3yx^2+y^3)dx + (3x+y)dy, (k=1,2,3)$. 则

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_1 < I_3 < I_2$.
(C) $I_3 < I_2 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.

180 设曲线 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其周长为 l , 则 $\oint_L (bx+ay)^2 ds$ 等于

- (A) $(a+b)l$. (B) $(a^2+b^2)l$. (C) a^2b^2l . (D) abl .

181 设 L 是以 $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$ 为顶点的正方形边界, 则

$\oint_L \frac{x+y+1}{|x|+|y|} ds$ 等于

- (A) $4\sqrt{2}$. (B) 0. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 4.

182 设 L 为折线 $y=1-|1-x|$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$ 的一段, 则线积分 $\int_L (x^2 +$

$y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ 等于

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{5}{3}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\frac{4}{3}$.

183 在力场 $F = \frac{y^3i - x^3j}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的作用下, 一质点沿圆周 $x^2+y^2=1$ 逆时针运动一圈所

作的功为

- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{3\pi}{2}$. (C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $-\frac{3\pi}{2}$.

184 设 L 是圆周 $x^2+y^2=1$, n 为 L 的外法线向量, $u(x,y) = \frac{1}{12}(x^4+y^4)$, 则 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds$

等于

- (A) 0. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) π . (D) $-\pi$.

185 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为该球面外法线向量的方向余弦, 则 $\oint_{\Sigma} (x^3 \cos\alpha + y^3 \cos\beta + z^3 \cos\gamma) dS$ 等于

- (A) $4\pi R^5$. (B) $2\pi R^3$. (C) $3\pi R^4$. (D) $\frac{12\pi R^5}{5}$.

186 下列曲线积分

(1) $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

(2) $\int_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$.

(3) $\int_L \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(4) $\int_L \frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2}$.

中, 在平面 $D: x^2 + y^2 > 0$ 上与路径无关的有

- (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

187 设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列积分小于零的是

(A) $\int_{\Gamma} f(x, y) dx$.

(B) $\int_{\Gamma} f(x, y) dy$.

(C) $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$.

(D) $\int_{\Gamma} f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$.

188 设 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 对于该线积分容易验证 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2 \neq 0)$, 则

(A) 对于任何不过坐标原点的闭曲线 L , 恒有 $I = 0$.

(B) 线积分 $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ 在 $x^2 + y^2 > 0$ 上与路径无关.

(C) 对于任何不过坐标原点的闭曲线 L , $I \neq 0$.

(D) 当 L 围成区域 D 不包含坐标原点时, $I = 0$, 其中 L 为分段光滑的简单闭曲线.

189 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上半部分的上侧, 则下列结论不正确的是

(A) $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = 0$.

(B) $\iint_{\Sigma} x dy dz = 0$.

(C) $\iint_{\Sigma} y^2 dy dz = 0$.

(D) $\iint_{\Sigma} y dy dz = 0$.

190 设有曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 从 x 轴正向看去为逆时针方向, 则 $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ 等于

- (A) $\sqrt{2}\pi a^2$. (B) $-\sqrt{2}\pi a^2$. (C) $-\sqrt{3}\pi a^2$. (D) $\sqrt{3}\pi a^2$.

191 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \sin(n+k)$ (k 为常数)

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
(C) 发散. (D) 收敛性与 k 有关.

192 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于

- (A) 3. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

193 设 $u_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, 则级数

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

194 设 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}$

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
(C) 发散. (D) 敛散性与 λ 有关.

195 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

196 设 $a_n > 0$, ($n = 1, 2, \dots$), 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则

- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散. (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.
(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛. (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

197 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.
(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛. (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

198 下列各选项正确的是

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛.
 (C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n \geq \frac{1}{n}$.
 (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $u_n \geq v_n (n = 1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

199 设有以下命题

- ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
 ② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$ 收敛.
 ③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.
 ④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

- (A) ①②. (B) ②③. (C) ③④. (D) ①④.

200 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

- (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.
 (C) 必发散. (D) 敛散性不能确定.

201 a_n 和 b_n 符合下列哪一个条件, 可由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散推得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

- (A) $a_n \leq b_n$. (B) $|a_n| \leq b_n$. (C) $a_n \leq |b_n|$. (D) $|a_n| \leq |b_n|$.

202 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ (λ 为常数)

- (A) 当 $\lambda \leq \frac{1}{2}$ 时条件收敛. (B) 当 $\lambda > -\frac{1}{2}$ 时条件收敛.
 (C) 当 $\lambda \geq \frac{1}{2}$ 时绝对收敛. (D) 当 $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ 时条件收敛.

203 设 $\lambda > 0$, 则级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{\lambda}{\ln n})$

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
 (C) 发散. (D) 敛散性与 λ 取值有关.

204 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\alpha \ln n}$ 收敛, 则必有

- (A) $\alpha > \ln 3$. (B) $\alpha \neq 1$. (C) $\alpha > \frac{1}{\ln 3}$. (D) $\alpha < \ln 3$.

205 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必收敛.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 必发散. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |b_n|)$ 必发散.

206 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛, 则

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (D) 当 $a_n > 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛.

207 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛的

- (A) 充要条件. (B) 充分条件.
(C) 必要条件. (D) 即非充分条件, 又非必要条件.

208 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

- (A) 都收敛. (B) 都发散.
(C) 敛散性不同. (D) 同时收敛或同时发散.

209 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 则

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ 必发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必发散.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |b_n|)$ 必发散. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 必发散.

210 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数中必收敛的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} a_n$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+k})$, k 为正整数.

211 下列命题成立的是

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
 (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.
 (C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一个发散.
 (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一个收敛.

212 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \beta^n}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) 的敛散性

- (A) 仅与 β 取值有关. (B) 仅与 α 取值有关.
 (C) 与 α 和 β 的取值都有关. (D) 与 α 和 β 的取值都无关.

213 下列四个级数中发散的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.
 (C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [3 + (-1)^n 2]^n}{6^n}$.

214 设有命题

- ① 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
 ② 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq 1$.
 ③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.
 ④ 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛.

以上四个命题中正确的个数为

- (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

215 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=1$ 处收敛, 则此级数在 $x=-2$ 处

- (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.
 (C) 发散. (D) 敛散性不定.

216 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x>0$ 处发散, 在 $x=0$ 处收敛, 则常数 a 等于

- (A) 0. (B) -1. (C) 1. (D) 2.

217 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处发散, 则该级数在 $x=2$ 处

- (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.
(C) 发散. (D) 敛散性不能确定.

218 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛, 则该幂级数

- (A) 收敛半径为 2. (B) 收敛区间为 $(0, 2]$.
(C) 收敛域为 $(0, 2]$. (D) 收敛区间为 $(0, 2)$.

219 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n2^n}$ 在 $x=2$ 处条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{n}$ 在 $x=$

$-\pi$ 处

- (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.
(C) 发散. (D) 敛散性不能确定.

220 下列命题中

① 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2 , 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min(R_1, R_2)$.

② 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$.

③ 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$.

④ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$.

正确的有

- (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

221 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x-1, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x (-\infty < x < +\infty)$, 其

中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$, 则 $S(-\frac{5}{2})$ 等于

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $-\frac{3}{2}$.

222 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α

是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1)$ 等于

- (A) 2π . (B) π . (C) $e^{\frac{\pi}{2}}$. (D) $\pi e^{\frac{\pi}{2}}$.

223 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x_0) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0

- (A) 取得极大值. (B) 取得极小值.
(C) 某个邻域内单调增加. (D) 某个邻域内单调减少.

224 方程 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ 的特解形式为

- (A) $y = axe^{2x}$. (B) $y = (ax + b)e^{2x}$.
(C) $y = x(ax + b)e^{2x}$. (D) $y = x^2(ax + b)e^{2x}$.

225 方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x + 1 + e^x \cos 2x$ 的特解形式为

- (A) $y = axe^x + b + Ae^x \cos 2x$.
(B) $y = ae^x + b + e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$.
(C) $y = axe^x + b + xe^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$.
(D) $y = axe^x + b + e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$.

226 方程 $y'' + 2y' = x^2 + xe^{-2x}$ 的特解形式为

- (A) $y = ax^2 + bx + c + x(dx + e)e^{-2x}$.
(B) $y = x^2(ax^2 + bx + c) + x^2e^{-2x}$.
(C) $y = (ax^2 + bx + c) + (dx + e)e^{-2x}$.
(D) $y = x^2(ax^2 + bx + c) + x(dx + e)e^{-2x}$.

227 已知 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同的特解, 则该方程的通解为

- (A) $y = Cy_1(x)$. (B) $y = Cy_2(x)$.
(C) $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. (D) $y = C(y_1(x) - y_2(x))$.

228 已知 $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x$ 为方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个特解, 则该方程的通解是

- (A) $y = C_1x + C_2x^2 + e^x$.
(B) $y = C_1x^2 + C_2e^x + x$.
(C) $y = C_1(x - x^2) + C_2(x - e^x) + x$.
(D) $y = C_1(x - x^2) + C_2(x^2 - e^x)$.

229 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt + \ln 2$, 则 $f(x)$ 等于

- (A) $e^x \ln 2$. (B) $e^{2x} \ln 2$.
(C) $e^x + \ln 2$. (D) $e^{2x} + \ln 2$.

230 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于

- (A) $\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$. (B) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
(C) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 1$. (D) $1 - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

231 设 $y = y(x)$ 是方程 $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的解, 则 $\int_0^{\frac{1}{2}} y(x) dx =$

- (A) $-\ln 3$. (B) $\ln 3$. (C) $-\frac{1}{2}\ln 3$. (D) $\frac{1}{2}\ln 3$.

232 设 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi(\frac{x}{y})$ 的解, 则 $\varphi(\frac{x}{y})$ 的表达式为

- (A) $-\frac{y^2}{x^2}$. (B) $\frac{y^2}{x^2}$. (C) $-\frac{x^2}{y^2}$. (D) $\frac{x^2}{y^2}$.

233 在下列方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是

- (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.
(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

234 具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是

- (A) $y''' - y'' - y' + y = 0$. (B) $y''' + y'' - y' - y = 0$.
(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. (D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

235 若 $y = xe^x + x$ 是微分方程 $y'' - 2y' + ay = bx + c$ 的解则

- (A) $a = 1, b = 1, c = 1$. (B) $a = 1, b = 1, c = -2$.
(C) $a = -3, b = -3, c = 0$. (D) $a = -3, b = 1, c = 1$.

236 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{2}f(x) + 1$, 则 $f(x)$ 等于

- (A) $1 + Cxe^{x^2}$. (B) $2 + Cx \sin x$. (C) $2 + Cx$. (D) $2 + x$.

237 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

- (A) 不存在. (B) 等于 1. (C) 等于 2. (D) 等于 3.

238 已知方程 $y'' + qy = 0$ 存在当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于零的非零解, 则

- (A) $q > 0$. (B) $q \geq 0$. (C) $q < 0$. (D) $q \leq 0$.

239 已知微分方程 $y'' + by' + y = 0$ 的每个解都在区间 $(0, +\infty)$ 上有界, 则实数 b 的取值范围是

- (A) $[0, +\infty)$. (B) $(-\infty, 0]$. (C) $(-\infty, 4]$. (D) $(-\infty, +\infty)$.

240 若级数 $2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ($-\infty < x < +\infty$) 的和函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'' - y = -1$ 的解, 则 $y(x)$ 等于

- (A) $2\cosh x$. (B) $1 + \sinh x$. (C) $\cosh x + 1$. (D) $1 + \cos x$.

241 可导函数 $f(x)$, 对任意的 x, y 恒有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 且 $f'(0) = 1$, 则 $f(x)$ 等于

- (A) $x + \cos x$. (B) $\sinh x$. (C) e^x . (D) $1 - e^{-x}$.

242 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数, $f(0) = 0$, $du(x, y) = f(x)ydx + [\sin x - f(x)]dy$, 则 $f(x)$ 等于

- (A) $\cos x + \sin x - 1$. (B) $\frac{1}{2}(\cos x + \sin x - e^{-x})$.
(C) $\cos x - \sin x + xe^x$. (D) $\cos x - \sin x + xe^{-x}$.

243 已知线积分 $\int_L yf(x)dx + [f(x) - x^2]dy$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 有连续一阶导数, $f(0) = 1$, 则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)dx + [f(x) - x^2]dy$ 等于

- (A) $3e + 1$. (B) $3e + 5$. (C) $3e + 2$. (D) $3e - 5$.

244 方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 的通解为

- (A) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. (B) $y = (C_1 + C_2x)e^x$.
(C) $y = C_1x + C_2x^2$. (D) $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2x$.

245 设曲线 $y = y(x)$ 满足 $xdy + (x - 2y)dx = 0$, 且 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1$ 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转的旋转体体积最小, 则 $y(x) =$

- (A) $x - \frac{1}{4}x^2$. (B) $x + \frac{5}{4}x^2$. (C) $x - \frac{5}{4}x^2$. (D) $x + \frac{1}{4}x^2$.

线性代数

246

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 且 $|A| = m$, $B = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{11} - a_{12} & a_{21} - a_{22} & a_{31} - a_{32} \end{bmatrix}$,
 则 $|B| =$
 (A) m . (B) $-8m$. (C) $2m$. (D) $-2m$.

247

行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$
 (A) 34. (B) -34 . (C) 32. (D) -32 .

248

设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是三阶矩阵, 则下列行列式中等于 $|A|$ 的是 =
 (A) $|\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1|$. (B) $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1|$.
 (C) $|\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2|$. (D) $|\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2|$.

249

已知 A 是 n 阶矩阵, α, β 都是 n 维列向量. 若 $|A| = a$, $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} = 0$, 则
 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} =$
 (A) ab . (B) $a(b+c)$.
 (C) $a(b-c)$. (D) 条件不够, 不能确定.

250

设 n 阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $B = [\alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$, 若行列式 $|A| = 1$, 则
 $|A - B| =$
 (A) 0. (B) 2. (C) $1 + (-1)^{n+1}$. (D) $1 + (-1)^n$.

251

已知 A, B, C 分别是 m 阶, n 阶, t 阶矩阵, 且 $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, 设
 $D = \begin{bmatrix} O & O & A \\ O & B & O \\ C & O & O \end{bmatrix}$, 则 $|D| = kabc$, 而 $k =$
 (A) -1 . (B) $(-1)^{m+n+t}$.
 (C) $(-1)^{mnt}$. (D) $(-1)^{mn+mt+nt}$.

- 252** 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为四维列向量, $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1], B = [\alpha_1, -\alpha_2, 2\alpha_3, \beta_2]$ 且 $|A| = 3, |B| = -2$, 则 $|A + 2B| =$
 (A) 15. (B) -30. (C) 60. (D) -75.

- 253** 设 A 为五阶矩阵, 且 $|A| = 4$, 则 $\left| \left(\frac{1}{4}A \right)^{-1} - \frac{1}{2}A^* \right| =$
 (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) 8. (D) 16.

- 254** 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $A^*B + 2A^{-1} = B$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|B| =$
 (A) $\frac{2}{15}$. (B) $\frac{2}{9}$. (C) $\frac{1}{30}$. (D) $\frac{1}{12}$.

- 255** 设 A 是三阶矩阵, 且 $A + iE (i = 1, 2, 3)$ 均不可逆, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则行列式 $\left| \left(\frac{1}{2}A \right)^* \right| =$
 (A) $\frac{9}{16}$. (B) $\frac{16}{9}$. (C) $-\frac{9}{16}$. (D) $-\frac{16}{9}$.

- 256** 设 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ 和 $A = [a_{ij}]$ 都是 n 阶矩阵

则 $AJ =$

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$

- 257** A, B 都是 n 阶矩阵, 下列命题中正确的是

- (A) $AB \neq O \Rightarrow A \neq O$ 且 $B \neq O$.
 (B) 如 $AB = O$, 则必有 $A = O$ 或 $B = O$.
 (C) 如 $AB = O$, 则 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$.
 (D) 如 $AB = B$, 则 $A = E$.

258 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则下列结论不正确的是

- (A) $A+B$ 是对称矩阵. (B) AB 是对称矩阵.
(C) A^*+B^* 是对称矩阵. (D) $A-2B$ 是对称矩阵.

259 设 A, B 均为 n 阶反对称矩阵, 且 $AB=BA$, 则下列结论不正确的是

- (A) $A+B$ 是反对称矩阵. (B) AB 是对称矩阵.
(C) A^*+B^* 是反对称矩阵. (D) $2A+3B$ 是反对称矩阵.

260 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 正确的法则是

- (A) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$. (B) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.
(C) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. (D) $(AB)^*=B^*A^*$.

261 设 A 是 n 阶矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, E 是 n 阶单位矩阵,

Λ_1, Λ_2 都是 n 阶对角矩阵, 在下列运算中:

$$AA^*=A^*A, \quad \Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1, \quad A^mA^*=A^*A^m,$$

$$AA^T=A^TA, \quad A\Lambda_1=\Lambda_1A, \quad (A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)$$

交换律肯定成立的共有

- (A) 2 个. (B) 3 个. (C) 4 个. (D) 5 个.

262 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别是 A 和 B 对应的伴随矩阵, 令 $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 则

C 的伴随矩阵 $C^* =$

- (A) $\begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}$.
(C) $\begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$.

263 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} =$

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

273

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$

, A^* 是 A 的伴随矩阵, 如果 A 和 A^* 等价, 则必有

(A) $a - b \neq 0$ 且 $a + 3b \neq 0$.

(B) $a + 3b \neq 0$ 或 $a - b \neq 0$.

(C) $a = b = 0$.

(D) $a \neq b$ 且 $a + 3b \neq 0$ 或 $a = b = 0$.

274

已知 A 和 B 是 n 阶等价矩阵, 则必有

(A) $A + kE$ 和 $B + kE$ 等价.

(B) A^2 和 B^2 等价.

(C) AB 和 BA 等价.

(D) $5A$ 和 $-4B$ 等价.

275

设 $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & a & -3 \end{bmatrix}$

, B 是 4×2 的非零矩阵, 且 $AB = O$, 则

(A) $a = 1$ 时, B 的秩必为 2.

(B) $a = 1$ 时, B 的秩必为 1.

(C) $a \neq 1$ 时, B 的秩必为 1.

(D) $a \neq 1$ 时, B 的秩必为 2.

276

若 A, A^* 和 B 均是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则必有 $r(B) =$

(A) 1.

(B) 2.

(C) $n - 1$.

(D) 条件不够不能确定.

277

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $r(A^*) = 1$, 则 $a =$

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 1 或 3.

278

设 A 为四阶方阵, 且满足 $A^2 = A$, 则秩 $r(A) +$ 秩 $r(A - E) =$

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

279

现有四个向量组

① $(1, 2, 3)^T, (3, -1, 5)^T, (0, 4, -2)^T, (1, 3, 0)^T$

② $(a, 1, b, 0, 0)^T, (c, 0, d, 2, 0)^T, (e, 0, f, 0, 3)^T$

③ $(a, 1, 2, 3)^T, (b, 1, 2, 3)^T, (c, 3, 4, 5)^T, (d, 0, 0, 0)^T$

④ $(1, 0, 3, 1)^T, (-1, 3, 0, -2)^T, (2, 1, 7, 2)^T, (4, 2, 14, 5)^T$

则下列结论正确的是

(A) 线性相关的向量组为 ①④; 线性无关的向量组为 ②③.

(B) 线性相关的向量组为 ③④; 线性无关的向量组为 ①②.

(C) 线性相关的向量组为 ①②; 线性无关的向量为 ③④.

(D) 线性相关的向量组为 ①③④; 线性无关的向量组为 ②.

280 设 $\alpha_1 = (1, 4, 3, -1)^T$, $\alpha_2 = (2, t, -1, -1)^T$, $\alpha_3 = (-2, 3, 1, t+1)^T$, 则

- (A) 对任意的 t , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关.
 (B) 仅当 $t = -3$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.
 (C) 若 $t = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.
 (D) $t \neq 0$ 且 $t \neq -3 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

281 设 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 1)^T$, $\alpha_2 = (3, 4, 7, -1)^T$, $\alpha_3 = (2, 6, a, 6)^T$, $\alpha_4 = (0, 1, 3, a)^T$,

那么 $a = 8$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要条件.
 (C) 必要而非充分条件. (D) 既不充分也非必要条件.

282 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是

- (A) 存在全为零的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$.
 (B) 存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$.
 (C) 对于任何一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$.
 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量线性无关.

283 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不是零向量.
 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $s-1$ 个向量都线性无关.
 (C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关.
 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中每一个向量都不能由其余 $s-1$ 个向量线性表出.

284 设向量组 (I): $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\alpha_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$; 向量组

(II): $\beta_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$, $\beta_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$, $\beta_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34})$, 则正确的命题是

- (A) (I) 相关 $\Rightarrow$ (II) 相关. (B) (I) 无关 $\Rightarrow$ (II) 无关.
 (C) (II) 无关 $\Rightarrow$ (I) 无关. (D) (II) 相关 $\Rightarrow$ (I) 无关.

285 设向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$; 向量组 (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_{s+t}$, 则正确命题是

- (A) (I) 无关 $\Rightarrow$ (II) 无关. (B) (I) 无关 $\Rightarrow$ (II) 相关.
 (C) (II) 相关 $\Rightarrow$ (I) 相关. (D) (II) 无关 $\Rightarrow$ (I) 无关.

286 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, $AB = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$ 都是 n 阶矩阵,

记向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$; (III) $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. 若向量组 (III) 线性相关, 则

- (A) (I), (II) 均线性相关. (B) (I) 或 (II) 中至少有一个线性相关.
 (C) (I) 一定线性相关. (D) (II) 一定线性相关.

287 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 且满足 $AB = E$, 则

- (A) A 的列向量组线性无关, B 的行向量组线性无关.
- (B) A 的列向量组线性无关, B 的列向量组线性无关.
- (C) A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性无关.
- (D) A 的行向量组线性无关, B 的行向量组线性无关.

288 已知 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 那么可能线性相关的 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是

- (A) 把 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 中第 1 个分量与第 n 个分量互换为 β_i .
- (B) 把 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 中第 1 个分量改为相反数是 β_i .
- (C) 把 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 中第 1 个分量改为 0 得到 β_i .
- (D) 把 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 的第 1 个与第 2 个分量之间添加分量 0 为 β_i .

289 已知 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 那么向量组 $a\alpha_1 + b\alpha_2, a\alpha_2 + b\alpha_3, a\alpha_3 + b\alpha_1$ 线性无关的充分必要条件是

- (A) $a \neq 0, b = 0$.
- (B) $a \neq b$.
- (C) $a \neq -b$.
- (D) $a = b \neq 0$.

290 已知 4 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$.
- (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.
- (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$.
- (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.

291 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 则

- (A) α_1 必可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.
- (B) α_2 必可由 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.
- (C) α_3 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示.
- (D) α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

292 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则必有

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 线性无关.
- (B) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ 线性无关.
- (C) $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 线性相关.
- (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 线性相关.

293 设矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 经初等行变换变为矩阵 $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. 则

- (A) β_4 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示.
- (B) β_4 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 但表法不唯一.
- (C) β_4 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 且表法唯一.
- (D) β_4 能否由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示不能确定.

294 设 A, B 为 n 阶方阵, P, Q 为 n 阶可逆矩阵, 下列命题不正确的是

- (A) 若 $B = AQ$, 则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.
 (B) 若 $B = PA$, 则 A 的行向量组与 B 的行向量组等价.
 (C) 若 $B = PAQ$, 则 A 的行(列)向量组与 B 的行(列)向量组等价.
 (D) 若 A 的行(列)向量组与矩阵 B 的行(列)向量组等价, 则矩阵 A 与 B 等价.

295 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的秩为 r , 则下列命题中正确的是

- (A) 向量组中任意 $r-1$ 个向量都线性无关.
 (B) 向量组中任意 r 个向量都线性无关.
 (C) 向量组中任意 $r-1$ 个向量都线性相关.
 (D) 向量组中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

296 向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 5, -1)^T, \alpha_2 = (2, -1, -3, 4)^T, \alpha_3 = (6, 4, 4, 6)^T,$

$\alpha_4 = (7, 7, 9, 1)^T, \alpha_5 = (3, 2, 2, 3)^T$ 的极大线性无关组是

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$. (B) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$.
 (C) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.

297 已知四维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 且向量 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_4,$

$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. 则 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) =$

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

298 已知向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 (II) $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 都是四维非零列向量. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

线性无关且和每个 $\beta_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 都正交, 则秩 $r(I) + r(II) =$

- (A) 3. (B) 4.
 (C) 5. (D) 条件不够不能确定.

299 设向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则与向量组 (I) 等价的向量组是

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$.
 (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4$.
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.
 (D) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.

300 已知 α_1, α_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 那么

$$\alpha_1 - \alpha_2, \quad 3\alpha_1 - 2\alpha_2, \quad \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \quad \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

中, 仍是线性方程组 $Ax = b$ 特解的共有

- (A) 4 个. (B) 3 个. (C) 2 个. (D) 1 个.

301 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个不同的解, 那么下列向量

$$\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \quad \frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1), \quad \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$$

中是导出组 $Ax = 0$ 解的向量共有

- (A) 4 个. (B) 3 个. (C) 2 个. (D) 1 个.

302 已知 $\alpha_1 = (1, 1, -1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 0)^T$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 那么下列向量中 $Ax = 0$ 的解向量是

- (A) $(1, -1, 3)^T$. (B) $(2, 1, -3)^T$.
(C) $(2, 2, -5)^T$. (D) $(2, -2, 6)^T$.

303 设齐次线性方程组

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

的通解是 $k(1, 0, 3, -2)^T, k$ 是任意常数.

把矩阵 A 中丢掉第 j 列 ($j = 1, 2, 3, 4$) 的矩阵记成 A_j , 则下列齐次线性方程组中有非零解的是

- (A) $A_1 y = 0$. (B) $A_2 y = 0$.
(C) $A_3 y = 0$. (D) $A_4 y = 0$.

304 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A^T 是 A 的转置, 若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次方程组 $A^T x = 0$ 的基础解系, 则秩 $r(A) =$

- (A) t . (B) $n - t$.
(C) $m - t$. (D) $n - m$.

305 要使 $\alpha_1 = (2, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ 都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 只要系数矩阵 A 为

- (A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.
(C) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.

306 $a = 1$ 是齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要条件.
(C) 必要而非充分条件. (D) 既非充分又非必要条件.

307 已知 η_1, η_2 是 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的 2 个不同的解, 若秩 $r(A) = n - 1$, 则 $Ax = 0$ 的通解是

- (A) $k\eta_1$. (B) $k\eta_2$. (C) $k(\eta_1 + \eta_2)$. (D) $k(\eta_1 - \eta_2)$.

308 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & a+2 & 4 \\ 5 & a & a+5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 若齐次方程组 $Ax = 0$ 的任一非零解均可以用 α 线性表出, 那么必有 $a =$

- (A) 3. (B) 5. (C) 3 或 -5. (D) 5 或 -3.

309 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是五维非零列向量, 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 若 $\eta_1 = (3, 2, 2, 2)^T, \eta_2 = (1, 2, 2, 6)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则下列结论

- ① $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;
② α_3, α_4 线性无关;
③ α_1 可由 α_3, α_4 线性表出;
④ α_4 可由 α_2, α_3 线性表出.

中正确的共有

- (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

310 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则齐次方程组 $ABx = 0$

- (A) 当 $n > m$ 时仅有零解. (B) 当 $n > m$ 时必有非零解.
(C) 当 $m > n$ 时仅有零解. (D) 当 $m > n$ 时必有非零解.

311 齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解的充分必要条件是

- (A) A 是 n 阶可逆矩阵. (B) 非齐次方程组 $Ax = b$ 无解.
(C) A 的列向量组线性无关. (D) A 的行向量组线性无关.

312 设 $Ax = b$ 有通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta = k_1(1, 0, 1)^T + k_2(-1, 3, 2)^T + (0, 1, -1)^T$, 则下列向量中不是 $Ax = b$ 的解向量的是

- (A) $\alpha_1 = (3, -5, -4)^T$. (B) $\alpha_2 = (0, 4, 2)^T$.
(C) $\alpha_3 = (3, -2, -1)^T$. (D) $\alpha_4 = (3, 1, -4)^T$.

313 设 A 为秩是 r 的 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分条件是

- (A) $r = m$. (B) $m = n$. (C) $r = n$. (D) $m < n$.

314 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分条件是

- (A) 秩 $r(A) = \min(m, n)$. (B) A 的行向量组线性无关.
(C) $m < n$. (D) A 的列向量组线性无关.

315 设线性方程组 $Ax = b$ 有 m 个方程, n 个未知数且 $m \neq n$, 则正确命题是

- (A) 若 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ 必有唯一解.
 (B) 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $Ax = b$ 必有无穷多解.
 (C) 若 $Ax = b$ 无解, 则 $Ax = 0$ 只有零解.
 (D) 若 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $Ax = 0$ 必有非零解.

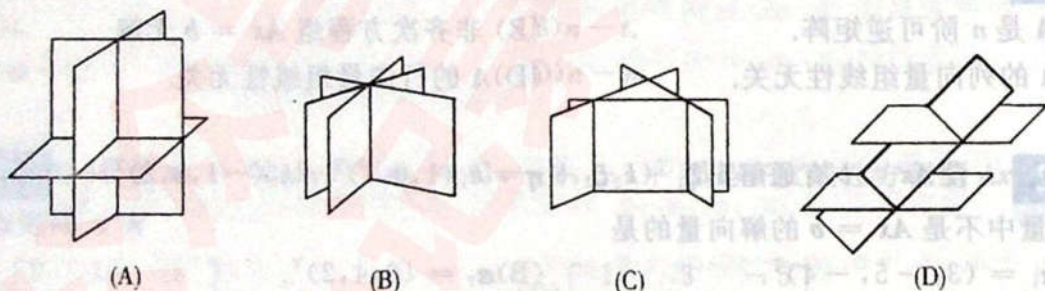
316 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 下列命题中正确的是

- (A) 若 A 中有 n 阶子式不为零, 则 $Ax = 0$ 仅有零解.
 (B) 若 A 中有 n 阶子式不为零, 则 $Ax = b$ 必有唯一解.
 (C) 若 A 中有 m 阶子式不为零, 则 $Ax = 0$ 仅有零解.
 (D) 若 A 中有 m 阶子式不为零, 则 $Ax = b$ 必有唯一解.

317 已知四阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为四维列向量, 其中 α_1, α_2 线性无关, 若 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \beta, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = \beta, k_1, k_2$ 为任意常数, 那么 $Ax = \beta$ 的通解为

- (A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
 (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.
 (C) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
 (D) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

318 三元一次方程组 $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ 所代表的三个平面的位置关系为



319 设 $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)^T (i = 1, 2, 3), \alpha = (d_1, d_2, d_3)^T$ 则三个平面

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

两两相交成三条平行直线的充分必要条件是

- (A) $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha) = 2$.
 (B) $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha) = 3$.
 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个均线性无关, 且 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.
 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

320 设 A 为 n 阶矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 对于线性方程组 (I) $Ax = 0$ 和 (II) $A^T Ax = 0$, 必有

- (A) (I) 的解是 (II) 的解, (II) 的解也是 (I) 的解.
 (B) (I) 的解是 (II) 的解, (II) 的解不是 (I) 的解.
 (C) (II) 的解是 (I) 的解, (I) 的解不是 (II) 的解.
 (D) (II) 的解不是 (I) 的解, (I) 的解也不是 (II) 的解.

321 设 A 是 n 阶矩阵, 对于齐次线性方程组 (I) $A^n x = 0$ 和 (II) $A^{n+1} x = 0$, 现有四个命题

- ① (I) 的解必是 (II) 的解; ② (II) 的解必是 (I) 的解;
 ③ (I) 的解不是 (II) 的解; ④ (II) 的解不是 (I) 的解.

以上命题中正确的是

- (A) ①②. (B) ①④.
 (C) ③④. (D) ②③.

322 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 那么矩阵 A 的三个特征值是

- (A) 1, 0, -2. (B) 1, 1, -3.
 (C) 3, 0, -2. (D) 2, 0, -3.

323 已知 A 是四阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 A^* 的特征值是 1, -1, 2, 4, 那么不可逆矩阵是

- (A) $A - E$. (B) $2A - E$.
 (C) $A + 2E$. (D) $A - 4E$.

324 已知 A 是 n 阶可逆矩阵, 那么与 A 有相同特征值的矩阵是

- (A) A^T . (B) A^2 . (C) A^{-1} . (D) $A - E$.

325 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征向量不能是

- (A) $(-1, 1, 0)^T$. (B) $(1, -2, 3)^T$.
 (C) $(1, 2, -1)^T$. (D) $(3, -3, 0)^T$.

326 已知 $\alpha = (1, -2, 3)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix}$ 的特征向量, 则

- (A) $a = -2, b = 6$. (B) $a = 2, b = -6$.
 (C) $a = 2, b = 6$. (D) $a = -2, b = -6$.

327 已知 A 是三阶不可逆矩阵, α_1, α_2 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, α_3 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量. 则不是矩阵 A 特征向量的是

- (A) $-5\alpha_3$. (B) $\alpha_1 + 2\alpha_2$.
(C) $3\alpha_1 - 4\alpha_2$. (D) $2\alpha_1 + \alpha_3$.

328 设 A 是 n 阶矩阵, P 是 n 阶可逆矩阵, n 维列向量 α 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 那么在下列矩阵中

- ① A^2 ; ② $P^{-1}AP$; ③ A^T ; ④ $E - \frac{1}{2}A$;

α 肯定是其特征向量的矩阵共有

- (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

329 设 A 是 n 阶矩阵, 下列命题中正确的是

- (A) 若 α 是 A^T 的特征向量, 那么 α 是 A 的特征向量.
(B) 若 α 是 A^* 的特征向量, 那么 α 是 A 的特征向量.
(C) 若 α 是 A^2 的特征向量, 那么 α 是 A 的特征向量.
(D) 若 α 是 $2A$ 的特征向量, 那么 α 是 A 的特征向量.

330 设 A 是三阶矩阵, 其特征值是 $1, 3, -2$, 相应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 若 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$, 则 $P^{-1}AP =$

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$.
(C) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.

331 已知 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量, α_2 与 α_3

是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 5$ 的特征向量. 那么矩阵 P 不能是

- (A) $[\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3]$. (B) $[\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_3]$.
(C) $[\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2]$. (D) $[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3]$.

332 下列矩阵中, 不能相似对角化的矩阵是

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.
(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

333

下列矩阵中, A 和 B 相似的是

$$(A) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(B) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(C) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(D) A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

334

设 A 是三阶矩阵, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ 是三阶可逆阵, 且

$$AB = \begin{bmatrix} b_{12} & 2b_{11} & -b_{13} \\ b_{22} & 2b_{21} & -b_{23} \\ b_{32} & 2b_{31} & -b_{33} \end{bmatrix}, \text{ 则 } A \sim$$

$$(A) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(B) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(C) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(D) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

335

设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 且 $A \sim C, B \sim D$, 则必有

$$(A) (A+B) \sim (C+D).$$

$$(B) \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}.$$

$$(C) AB \sim CD.$$

$$(D) \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} O & C \\ D & O \end{bmatrix}.$$

336

已知 A 是三阶矩阵, $r(A) = 1$, 则 $\lambda = 0$

(A) 必是 A 的二重特征值.

(B) 至少是 A 的二重特征值.

(C) 至多是 A 的二重特征值.

(D) 一重、二重、三重特征值都有可能.

337 三阶矩阵 A 的特征值全为零, 则必有

- (A) 秩 $r(A) = 0$. (B) 秩 $r(A) = 1$.
(C) 秩 $r(A) = 2$. (D) 条件不足, 不能确定.

338 n 阶矩阵 A 和 B 具有相同的特征值是 A 与 B 相似的

- (A) 充分必要条件. (B) 必要而非充分条件.
(C) 充分而非必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

339 n 阶矩阵 A 与 B 有相同的特征向量是 A 与 B 相似的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要条件.
(C) 必要而非充分条件. (D) 既不充分又不必要条件.

340 n 阶矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量是 A 与对角矩阵相似的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要条件.
(C) 必要而非充分条件. (D) 既不充分也不必要条件.

341 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的标准形可以是

- (A) $y_1^2 + 4y_2^2$. (B) $y_1^2 - 6y_2^2 + 2y_3^2$.
(C) $y_1^2 - y_2^2$. (D) $y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$.

342 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (2x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - 5(x_2 + x_3)^2$ 的规范形是

- (A) $y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2$. (B) $y_2^2 - y_3^2$.
(C) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. (D) $y_1^2 + y_2^2$.

343 三元二次型 $x^T Ax = (x_1 + 2x_2 + ax_3)(x_1 - x_2 + bx_3)$ 的正惯性指数 p 与负惯性指数 q

- (A) $p = 1, q = 1$. (B) $p = 2, q = 0$.
(C) $p = 2, q = 1$. (D) 与 a, b 有关, 不能确定.

344 对于 n 元二次型 $x^T Ax$, 下述命题中正确的是

- (A) 化 $x^T Ax$ 为标准形的坐标变换是唯一的.
(B) 化 $x^T Ax$ 为规范形的坐标变换是唯一的.
(C) $x^T Ax$ 的标准形是唯一的.
(D) $x^T Ax$ 的规范形是唯一的.

345

下列矩阵中, 正定矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

346

已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $A + kE$ 正定, 则 k 的取值范围是

(A) $k = 1$.

(B) $k > 1$.

(C) $k \geq 1$.

(D) $k \leq 1$.

347

 n 元二次型 $x^T A x$ 正定的充分必要条件是

(A) 负惯性指数 $q = 0$.

(B) 存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = E$.

(C) 正惯性指数 $p = n$.

(D) 存在 n 阶矩阵 C 使 $A = C^T C$.

348

下列矩阵中 A 与 B 合同的是

(A) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(B) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(C) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

(D) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.

349

与二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2$ 的矩阵 A 既合同又相似的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -8 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

350 设 A, B 均 n 阶实对称矩阵, 若 A 与 B 合同, 则

- (A) A 与 B 有相同的特征值. (B) A 与 B 有相同的秩.
(C) A 与 B 有相同的特征向量. (D) A 与 B 有相同的行列式.

351

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B

- (A) 合同且相似. (B) 合同但不相似.
(C) 相似但不合同. (D) 既不相似也不合同.

352 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 下列命题中错误的是

- (A) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 与 A^T 合同.
(B) 若 A 与单位矩阵合同, 则 $|A| > 0$.
(C) 若 A 可逆, 则 A^2 与单位矩阵合同.
(D) 若 $|A| > 0$, 则 A 与单位矩阵合同.

353 已知 A 和 B 都是 n 阶实对称矩阵, 下列命题中错误的是

- (A) 若 A 和 B 相似, 则 A 和 B 合同.
(B) 若 A 和 B 合同, 则 A 和 $9B$ 合同.
(C) 若 A 和 B 合同, 则 $A + kE$ 和 $B + kE$ 合同.
(D) 若 A 和 B 合同, 则 A 和 B 等价.

354

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 合同的充分必要条件为

- (A) $a = 0$. (B) $a = 1$. (C) $a < 1$. (D) $a > 1$.

355

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 将 A 的 i 列和 j 列对换得到 B , 再将 B 的 i 行和 j 行对换得到 C , 则 A 与 C

- (A) 等价但不相似. (B) 合同但不相似.
(C) 相似但不合同. (D) 等价, 合同且相似.

概率论与数理统计

356 现有一批电子元件,系统初始先由一个元件工作,当其损坏时,立即更换一个新元件接替工作.如果用 X_i 表示第 i 个元件的工作寿命,那么事件 $A =$ “到时刻 T 为止,系统仅更换一个元件”可以表示为

- (A) $A = \{X_1 < T\}$. (B) $A = \{X_1 + X_2 < T\}$.
(C) $A = \{X_1 + X_2 > T\}$. (D) $A = \{X_1 < T, X_1 + X_2 > T\}$.

357 设随机变量 X 在 $[0, 1]$ 上服从均匀分布,记事件 $A = \left\{0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right\}$, 则

- (A) A 与 B 互斥,但不对立. (B) B 包含 A .
(C) A 与 B 对立. (D) A 与 B 相互独立.

358 将一枚硬币独立投掷二次,记事件 $A =$ “第一次掷出正面”, $B =$ “第二次掷出反面”, $C =$ “正面最多掷出一次”,则事件

- (A) A, B, C 两两独立. (B) A 与 BC 独立.
(C) B 与 AC 独立. (D) C 与 AB 独立.

359 已知 A, B, C 三事件中 A 与 B 相互独立, $P(C) = 0$, 则 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 三事件

- (A) 相互独立. (B) 两两独立,但不一定相互独立.
(C) 不一定两两独立. (D) 一定不两两独立.

360 已知 A, B 为随机事件, $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(\bar{A} | B) = P(B | \bar{A})$ 充要条件是

- (A) $P(B | A) = P(B | \bar{A})$. (B) $P(A | B) = P(A | \bar{B})$.
(C) $P(\bar{B} | A) = P(A | \bar{B})$. (D) $P(A | B) = P(\bar{A} | B)$.

361 设 A, B, C 为三个随机事件,且 A 与 C 相互独立,则 $A - B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是

- (A) A 与 B 相互独立. (B) A 与 B 互不相容.
(C) AB 与 C 相互独立. (D) AB 与 C 互不相容.

362 设随机事件 A 与 B 互不相容, 则

- (A) $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$. (B) $P(\bar{A}\bar{B}) \neq 0$.
(C) $P(A \cup \bar{B}) = P(A)$. (D) $P(A \cup \bar{B}) = P(\bar{B})$.

363 对任意两个互不相容的事件 A 与 B , 必有

- (A) 如果 $P(A) = 0$, 则 $P(B) = 0$. (B) 如果 $P(A) = 0$, 则 $P(B) = 1$.
(C) 如果 $P(A) = 1$, 则 $P(B) = 0$. (D) 如果 $P(A) = 1$, 则 $P(B) = 1$.

364 设 A, B 为随机事件, $P(B) > 0$, 则

- (A) $P(A \cup B) \geq P(A) + P(B)$. (B) $P(A - B) \geq P(A) - P(B)$.
(C) $P(AB) \geq P(A)P(B)$. (D) $P(A|B) \geq \frac{P(A)}{P(B)}$.

365 设两两独立且概率相等的三事件 A, B, C 满足条件 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 且 $ABC = \emptyset$, 则 $P(A)$ 的值为

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{1}{3}$.

366 设 A, B 为随机事件, $P(A) > 0$, 已知 $P(B|A) = 1$ 则

- (A) $B = A$. (B) $B \supset A$.
(C) $P(A \cup B) = P(A)$. (D) $P(A \cup B) = P(B)$.

367 设 A, B, C 为事件, $P(ABC) > 0$, 则 $P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$ 充要条件是

- (A) $P(A|C) = P(A)$. (B) $P(B|C) = P(B)$.
(C) $P(AB|C) = P(AB)$. (D) $P(B|AC) = P(B|C)$.

368 袋中装有 $2n-1$ 个白球, $2n$ 个黑球, 一次取出 n 个球, 发现都是同一种颜色, 则这种颜色是黑色的概率

- (A) $\frac{n}{4n-1}$. (B) $\frac{n}{3n-1}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{2}{3}$.

369 连续抛掷一枚硬币, 第 k 次 ($k \leq n$) 正面向上在第 n 次抛掷时出现的概率为

- (A) $C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. (B) $C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
(C) $C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. (D) $C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

370 设离散型随机变量 X 服从分布律 $P\{X=k\} = \frac{C}{k!}e^{-2}, k=0,1,2,\dots$ 则常数 C

必为

- (A) 1. (B) e . (C) e^{-1} . (D) e^{-2} .

371 假设分布函数 $F(x)$ 是连续的函数且 $F(0) = 0$, 则可以作出新分布函数

(A) $G_1(x) = \begin{cases} 1 - F\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$

(B) $G_2(x) = \begin{cases} 1 + F\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$

(C) $G_3(x) = \begin{cases} F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$

(D) $G_4(x) = \begin{cases} F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$

372 假设随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 是偶函数, 其分布函数为 $F(x)$, 则

- (A) $F(x)$ 是偶函数. (B) $F(x)$ 是奇函数.
(C) $F(x) + F(-x) = 1$. (D) $2F(x) - F(-x) = 1$.

373 假设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 概率密度函数 $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$,

其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的密度函数, $f_2(x)$ 是参数为 λ 的指数分布的密度函数, 已知

$F(0) = \frac{1}{8}$, 则

- (A) $a = 1, b = 0$. (B) $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}$.
(C) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. (D) $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$.

374 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$

- (A) 当 $x < a$ 时 $F(x) = 0$, 则 $F(a) = 0$.
(B) 当 $x > a$ 时 $F(x) = 1$, 则 $F(a) = 1$.

(C) 当 $P\{X < a\} = \frac{1}{2}$ 时, 则 $F(a) = \frac{1}{2}$.

(D) 当 $P\{X \geq a\} = \frac{1}{2}$ 时, 则 $F(a) = \frac{1}{2}$.

375 设随机变量 X_i 的分布函数为 $F_i(x)$, 概率密度函数为 $f_i(x)$, ($i = 1, 2$). 对任意常数 a , ($0 < a < 1$)

- (A) $F_2(x) + a[F_2(x) - F_1(x)]$ 也是分布函数.
 (B) $aF_1(x)F_2(x)$ 也是分布函数.
 (C) $f_2(x) + a[f_1(x) - f_2(x)]$ 也是概率密度函数.
 (D) $f_1(x)f_2(x)$ 也是概率密度函数.

376 已知随机变量 X_1 与 X_2 具有相同的分布函数 $F(x)$, 设 $X = X_1 + X_2$ 的分布函数为 $G(x)$, 则有

- (A) $G(2x) = 2F(x)$.
 (B) $G(2x) = F(x) \cdot F(x)$.
 (C) $G(2x) \leq 2F(x)$.
 (D) $G(2x) \geq 2F(x)$.

377 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 其分布函数为 $F(x)$, 则对任意实数 x , 有

- (A) $F(x) + F(-x) = 1$.
 (B) $F(1+x) + F(1-x) = 1$.
 (C) $F(x+1) + F(x-1) = 1$.
 (D) $F(1-x) + F(x-1) = 1$.

378 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 则可以作出分布函数

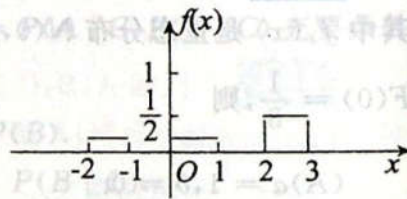
- (A) $F(ax)$.
 (B) $F(x^2 + 1)$.
 (C) $F(x^3 - 1)$.
 (D) $F(|x|)$.

379 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 则可以作出密度函数

- (A) $f(2x)$.
 (B) $f(2-x)$.
 (C) $f^2(x)$.
 (D) $f(x^2)$.

380 假设随机变量 X 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$



如果常数 k 使 $P\{X > k\} = P\{X < k\}$, 则 k 的取值范围是

- (A) $(-\infty, -2]$.
 (B) $[-1, 0]$.
 (C) $[1, 2]$.
 (D) $[3, +\infty)$.

381 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x}, & x > \lambda, \\ 0, & x \leq \lambda, \end{cases} \quad (\lambda > 0), \text{ 则概率 } P\{\lambda < X < \lambda + a\} (a > 0) \text{ 的值}$$

- (A) 与 a 无关随 λ 的增大而增大.
 (B) 与 a 无关随 λ 的增大而减小.
 (C) 与 λ 无关随 a 的增大而增大.
 (D) 与 λ 无关随 a 的增大而减小.

382 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 其分布函数为 $\Phi(x)$, 则随机变量 $Y = \min\{X, 0\}$ 的分布函数 $F(y)$ 为

- (A) $F(y) = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ \Phi(y), & y \leq 0. \end{cases}$ (B) $F(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0; \\ \Phi(y), & y < 0. \end{cases}$
 (C) $F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \Phi(y), & y > 0. \end{cases}$ (D) $F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \Phi(y), & y \geq 0. \end{cases}$

383 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} Ax(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \text{其中 } A \text{ 为常数, 则 } F\left(\frac{1}{2}\right) \text{ 的值为}$$

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{5}$.

384 连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} a + be^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ 则其中的常数 a 和 b 为

- (A) $\begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$ (C) $\begin{cases} a = -1, \\ b = 1. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1. \end{cases}$

385 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $P\{X \leq 2 | X \geq 1\}$ 的值为

- (A) e^{-2} . (B) $1 - e^{-2}$. (C) e^{-1} . (D) $1 - e^{-1}$.

386 已知 $X \sim N(15, 4)$, 若 X 的值落入区间 $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, +\infty)$ 内的概率之比为 $7:24:38:24:7$, 则 x_1, x_2, x_3, x_4 分别为

- (A) 12, 13.5, 16.5, 18. (B) 11.5, 13.5, 16.5, 18.5.
 (C) 12, 14, 16, 18. (D) 11, 14, 16, 19.

附: 标准正态分布函数值 $\Phi(1.5) = 0.93, \Phi(0.5) = 0.69$.

387 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma > 0$, 其分布函数 $F(x)$ 的曲线的拐点为 (a, b) , 则 (a, b) 为

- (A) (μ, σ) . (B) $(\mu, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})$.
 (C) $(\mu, \frac{1}{2})$. (D) $(0, \sigma)$.

388 假设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 λ 的指数分布, Y 的分布律为 $P\{Y = 1\} = P\{Y = -1\} = \frac{1}{2}$, 则 $X + Y$ 的分布函数

- (A) 是连续函数. (B) 恰有一个间断点的阶梯函数.
 (C) 恰有一个间断点的非阶梯函数. (D) 至少有两个间断点.

389 设随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 边缘分布为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则概率 $P\{X > x, Y > y\}$ 等于

- (A) $1 - F(x, y)$. (B) $1 - F_X(x) - F_Y(y)$.
(C) $F(x, y) - F_X(x) - F_Y(y) + 1$. (D) $F_X(x) + F_Y(y) + F(x, y) - 1$.

390 设随机变量 X_i 的分布函数分别为 $F_i(x)$, $i = 1, 2$. 假设: 如果 X_i 为离散型, 则 $X_i \sim B(1, p_i)$ 其中 $0 < p_i < 1, i = 1, 2$. 如果 X_i 为连续型, 则其概率密度函数为 $f_i(x)$, $i = 1, 2$. 已知成立 $F_1(x) \leq F_2(x)$, 则

- (A) $p_1 \leq p_2$. (B) $p_1 \geq p_2$.
(C) $f_1(x) \leq f_2(x)$. (D) $f_1(x) \geq f_2(x)$.

391 假设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布, 则可以作出服从参数为 2λ 的指数分布的随机变量如

- (A) $X + Y$. (B) $X - Y$. (C) $\max(X, Y)$. (D) $\min(X, Y)$.

392 设随机变量 X 和 Y 相互独立同分布. 已知 $P\{X = k\} = pq^{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) 其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$, 则 $P\{X = Y\}$ 等于

- (A) $\frac{p}{2-p}$. (B) $\frac{1-p}{2-p}$.
(C) $\frac{p}{1-p}$. (D) $\frac{2p}{1-p}$.

393 已知随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu, \frac{1}{2})$, 如果 $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$, 则 μ 等于

- (A) -1 . (B) 0 . (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1 .

394 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则

- (A) $P\{X + Y \geq 0\} = \frac{1}{4}$. (B) $P\{X - Y \geq 0\} = \frac{1}{4}$.
(C) $P\{\max(X, Y) \geq 0\} = \frac{1}{4}$. (D) $P\{\min(X, Y) \geq 0\} = \frac{1}{4}$.

395 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 均服从分布 $B(1, \frac{1}{2})$, 则成立

- (A) $P\{X = Y\} = 1$. (B) $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$.
(C) $P\{X = Y\} = \frac{1}{4}$. (D) $P\{X = Y\} = 0$.

396

设随机变量 $X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} (i=1,2)$ 且满足条件 $P\{X_1 + X_2 = 0\} = 1$, 则

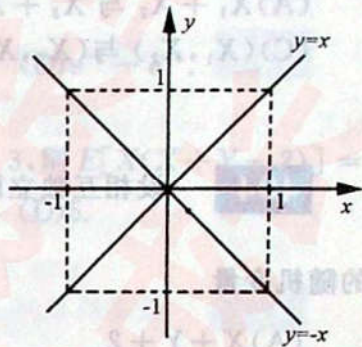
$P\{X_1 = X_2\}$ 等于

- (A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

397

已知随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ 上服从均匀分布, 则

- (A) $P\{X + Y \geq 0\} = \frac{1}{4}$.
 (B) $P\{X - Y \geq 0\} = \frac{1}{4}$.
 (C) $P\{\max(X, Y) \geq 0\} = \frac{1}{4}$.
 (D) $P\{\min(X, Y) \geq 0\} = \frac{1}{4}$.



398

设 (X, Y) 具有密度函数 $f(x, y) = \frac{1 + \sin x \sin y}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, 则

- (A) (X, Y) 服从二维正态, 且 X 与 Y 服从一维正态分布.
 (B) (X, Y) 服从二维正态, 但 X 与 Y 不服从一维正态分布.
 (C) (X, Y) 不服从二维正态, 且 X 与 Y 不服从一维正态分布.
 (D) (X, Y) 不服从二维正态, 但 X 与 Y 服从一维正态分布.

399

设二维随机变量 (X, Y) 与 (U, V) 有相同的边缘分布, 则

- (A) (X, Y) 与 (U, V) 有相同的联合分布.
 (B) (X, Y) 与 (U, V) 不一定有相同的联合分布.
 (C) $(X + Y)$ 与 $(U + V)$ 有相同的分布.
 (D) $(X - Y)$ 与 $(U - V)$ 有相同的分布.

400

设随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 则概率 $P\{X > a, Y > b\}$ 等于

- (A) $1 - F(a, b)$.
 (B) $1 - F(a, +\infty) - F(+\infty, b)$.
 (C) $F(a, b) - F(a, +\infty) - F(+\infty, b) + 1$.
 (D) $F(a, b) + F(a, +\infty) + F(+\infty, b) - 1$.

401

设相互独立的两随机变量 X 和 Y , 其中 $X \sim B(1, \frac{1}{2})$, 而 Y 具有概率密度

$f(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 则 $P\{X + Y \leq \frac{1}{3}\}$ 的值为

- (A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.

402 设相互独立的两随机变量 X 和 Y 均服从分布 $B(1, \frac{1}{3})$, 则 $P\{X \leq 2Y\} =$

- (A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{4}{9}$. (C) $\frac{5}{9}$. (D) $\frac{7}{9}$.

403 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 均服从分布 $B(1, \frac{1}{2})$, 则

- (A) $X_1 + X_2$ 与 $X_3 + X_4$ 同分布. (B) $X_1 - X_2$ 与 $X_3 - X_4$ 同分布.
(C) (X_1, X_2) 与 (X_3, X_4) 同分布. (D) $X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2$ 同分布.

404 设相互独立两随机变量 X 和 Y 均服从 $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$, 则可以作出服从二项分布

的随机变量

- (A) $X + Y + 2$. (B) $\frac{X+Y}{2} + 1$.
(C) $X - Y + 2$. (D) $\frac{X-Y}{2} - 1$.

405 设相互独立的随机变量 X 和 Y 均服从 $P(1)$ 分布, 则 $P\{X = 1 | X + Y = 2\}$ 的值为

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{1}{8}$.

406 设随机变量 X 和 Y 相互独立同分布, 已知

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1,$$

则 $P\{X > Y\}$ 的值为

- (A) $\frac{p}{2-p}$. (B) $\frac{1-p}{2-p}$. (C) $\frac{p}{1-p}$. (D) $\frac{2p}{1-p}$.

407 设二维随机变量 (X_1, X_2) 的密度函数 $f_1(x_1, x_2)$, 则随机变量 (Y_1, Y_2) 其中 $Y_1 = 2X_1, Y_2 = \frac{1}{3}X_2$ 的概率密度 $f_2(y_1, y_2)$ 等于

- (A) $f_1(\frac{y_1}{2}, 3y_2)$. (B) $\frac{3}{2}f_1(\frac{y_1}{2}, 3y_2)$.
(C) $f_1(2y_1, \frac{y_2}{3})$. (D) $\frac{2}{3}f_1(2y_1, \frac{y_2}{3})$.

408 设相互独立的两随机变量 X, Y 均服从 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{1 < \max(X, Y) \leq 2\}$ 的值为

- (A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

409 设相互独立的两随机变量 X 和 Y 分别服从 $E(\lambda)$ 和 $E(\lambda+2)$ 分布, $\lambda > 0$, 则 $P\{\min(X,Y) > 1\}$ 的值为

- (A) $e^{-(\lambda+1)}$. (B) $1 - e^{-(\lambda+1)}$.
(C) $e^{-2(\lambda+1)}$. (D) $1 - e^{-2(\lambda+1)}$.

410 设相互独立的两随机变量 X, Y 均服从 $E(1)$ 分布, 则 $P\{1 < \min(X,Y) \leq 2\}$ 的值为

- (A) $e^{-1} - e^{-2}$. (B) $1 - e^{-1}$. (C) $1 - e^{-2}$. (D) $e^{-2} - e^{-4}$.

411 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $EX = 2, EY = 1, DX = 3$, 则 $E[X(X+Y-2)] =$

- (A) -3 . (B) 3 . (C) -5 . (D) 5 .

412 设随机变量 X 的二阶矩存在, 则

- (A) $EX^2 < EX$. (B) $EX^2 \geq EX$.
(C) $EX^2 < (EX)^2$. (D) $EX^2 \geq (EX)^2$.

413 设随机变量 X 的期望、方差都存在, 则对任意常数 c , 有

- (A) $E(X-c)^2 < DX + E^2(X-c)$. (B) $E(X-c)^2 > DX + E^2(X-c)$.
(C) $E(X-c)^2 = DX + E^2(X-c)$. (D) $E(X-c)^2 = DX - E^2(X-c)$.

414 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 则其数学期望 $E(X) = a$, 如果成立

- (A) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x-a)dx = 0$. (B) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a)dx = 0$.
(C) $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \frac{1}{2}$. (D) $\int_{-\infty}^a xf(x)dx = \frac{1}{2}$.

415 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 数学期望 $E(X) = 2$, 则

- (A) $\int_{-\infty}^2 xf(x)dx = \frac{1}{2}$. (B) $\int_{-\infty}^2 xf(x)dx = \int_2^{+\infty} xf(x)dx$.
(C) $\int_{-\infty}^2 f(x)dx = \frac{1}{2}$. (D) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(2x)dx = \frac{1}{2}$.

416 现有 10 张奖券, 其中 8 张 2 元, 2 张 5 元, 今从中一次取三张, 则得奖金 X 的数学期望 EX 为

- (A) 6. (B) 7.8. (C) 8.4. (D) 9.

417 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$. 则 $D(X^2)$ 的值为

- (A) 20. (B) 22. (C) 24. (D) 28.

418 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, 则 $E[(X-2)^2 e^{2X}] =$

- (A) 1. (B) 2. (C) e^2 . (D) $2e^2$.

419 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从正态 $N(1,2)$, 则 $D(XY) =$

- (A) 4. (B) 6. (C) 8. (D) 10.

420 设随机变量 $X \sim B(1, \frac{1}{2}), Y \sim B(1, \frac{1}{2})$. 已知 X 与 Y 的相关系数 $\rho = 1$, 则 $P\{X=0, Y=1\}$ 的值必为

- (A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

421 设随机事件 A 与 B 互不相容, $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,

记 $X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 发生,} \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生,} \end{cases} Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } B \text{ 发生,} \\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生,} \end{cases}$ X 与 Y 的相关系数为 ρ , 则

- (A) $\rho = 0$. (B) $\rho = 1$.
(C) $\rho < 0$. (D) $\rho > 0$.

422 已知随机变量 X 与 Y 的相关系数为 ρ_{XY} 且 $\rho_{XY} \neq 0$, 设 $Z = aX + b$, 其中 a, b 为常数, 则 Y 与 Z 的相关系数 $\rho_{YZ} = \rho_{XY}$ 的充要条件是

- (A) $a = 1$. (B) $a > 0$. (C) $a < 0$. (D) $a \neq 0$.

423 设随机变量 X 与 Y 的方差均为正, 则 X 与 Y 的相关系数 $\rho = 1$ 的充要条件为

- (A) $Y = X + b$, (其中 b 为任意常数). (B) $DX = DY = \text{Cov}(X, Y)$.
(C) $DX = DY = \sqrt{\text{Cov}(X, Y)}$. (D) $D(X+Y) = (\sqrt{DX} + \sqrt{DY})^2$.

424 设二维随机变量 (X_1, X_2) 中 X_1 与 X_2 的相关系数为 ρ , 记 $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j), (i, j = 1, 2)$, 则行列式

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = 0$$

的充分必要条件是

- (A) $\rho = 0$. (B) $|\rho| = \frac{1}{3}$. (C) $|\rho| = \frac{1}{2}$. (D) $|\rho| = 1$.

425 已知随机变量 X 与 Y 有相同的不为零的方差, 则 X 与 Y 相关系数等于 1 的充分必要条件是

- (A) $\text{Cov}(X+Y, X) = 0$. (B) $\text{Cov}(X+Y, Y) = 0$.
(C) $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = 0$. (D) $\text{Cov}(X-Y, X) = 0$.

426 已知随机变量 X 与 Y 的相关系数大于零, 则

- (A) $D(X+Y) \geq DX + DY$. (B) $D(X+Y) < DX + DY$.
(C) $D(X-Y) \geq DX + DY$. (D) $D(X-Y) < DX + DY$.

427 已知 (X, Y) 服从二维正态分布, $EX = EY = \mu$, $DX = DY = \sigma^2$, X 与 Y 的相关系数 $\rho \neq 0$, 则 X 与 Y

- (A) 独立且有相同的分布. (B) 独立且有不同的分布.
(C) 不独立且有相同的分布. (D) 不独立且有不同的分布.

428 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且方差 $DX > 0$, $DY > 0$, 则

- (A) X 与 $X+Y$ 一定相关. (B) X 与 $X+Y$ 一定不相关.
(C) X 与 XY 一定相关. (D) X 与 XY 一定不相关.

429 已知随机变量 X 服从标准正态分布, $Y = 2X^2 + X + 3$, 则 X 与 Y

- (A) 不相关且相互独立. (B) 不相关且相互不独立.
(C) 相关且相互独立. (D) 相关且相互不独立.

430 已知随机变量 X_1, X_2, X_3 方差存在且不为零, 已知 $D(X_1 + X_2 + X_3) = DX_1 + DX_2 + DX_3$, 则 X_1, X_2, X_3 必为

- (A) 相互独立. (B) 不相互独立, 但两两不相关.
(C) 不一定两两不相关. (D) 一定不两两相关.

431 已知随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且 $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2 > 0$, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $X_1 - \bar{X}$ 与 $X_2 - \bar{X}$

- (A) 不相关且相互独立. (B) 不相关且相互不独立.
(C) 相关且相互独立. (D) 相关且相互不独立.

432 假设随机变量 X 与 Y 相互独立具有非零的方差, $DX \neq DY$, 则

- (A) $3X+1$ 与 $4Y-2$ 相关. (B) $X+Y$ 与 $X-Y$ 不相关.
(C) $X+Y$ 与 $2Y+1$ 相互独立. (D) e^X 与 $2Y+1$ 相互独立.

433 已知随机变量 X 与 Y 均服从 $B(1, \frac{3}{4})$ 分布, $EXY = \frac{5}{8}$, 则 $P\{X+Y \leq 1\}$ 等于

- (A) $\frac{1}{8}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{3}{8}$. (D) $\frac{1}{2}$.

434 设随机变量 $X \sim B(1, \frac{1}{4})$, $Y \sim B(1, \frac{1}{3})$, 已知 $P\{XY=1\} = \frac{1}{12}$, 记 ρ 为 X 和 Y 的相关系数, 则

- (A) $\rho = 1$. (B) $\rho = -1$.
(C) $\rho = 0$, 但 X, Y 不独立. (D) X, Y 相互独立.

435 将一枚硬币重复掷 2 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于

- (A) -1 . (B) 0 . (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1 .

436 设随机变量序列 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 则根据辛钦大数定律, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛其数学期望, 只要 $\{X_n, n \geq 1\}$

- (A) 有相同的数学期望. (B) 服从同一离散型分布.
(C) 服从同一泊松分布. (D) 服从同一连续型分布.

437 设随机变量 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 记 $Y_n = X_{2n} - X_{2n-1} (n \geq 1)$, 根据大数定律, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ 依概率收敛到零, 只要 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足

- (A) 数学期望存在. (B) 有相同的数学期望与方差.
(C) 服从同一离散型分布. (D) 服从同一连续型分布.

438 已知随机变量 $X_n (n = 1, 2, \dots)$ 相互独立且都在 $(-1, 1)$ 上服从均匀分布, 根据独立同分布中心极限定理有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq \sqrt{n}\right\}$ 等于(结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

- (A) $\Phi(0)$. (B) $\Phi(1)$. (C) $\Phi(\sqrt{3})$. (D) $\Phi(2)$.

439 假设随机变量序列 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布且 $EX_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i < n\right\} =$

- (A) 0 . (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1 .

440 设 X_n 表示将一硬币随意投掷 n 次“正面”出现的次数, 则

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x)$. (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x)$.
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x)$. (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{2X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x)$.

441 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则不能得出结论

- (A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布. (B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.
(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布. (D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

442 设总体 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, $\bar{X}, S^2$ 分别为容量是 n 的样本的均值和方差, 则可以作出服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量

- (A) $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S}$. (B) $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S^2}$. (C) $\frac{n\bar{X}}{S}$. (D) $\frac{n\bar{X}}{S^2}$.

443 假设 $X, X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $Y^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i^2$, 则

- (A) $X^2 \sim \chi^2(1)$. (B) $Y^2 \sim \chi^2(10)$.
(C) $\frac{X}{Y} \sim t(10)$. (D) $\frac{X^2}{Y^2} \sim F(10, 1)$.

444 设 $X_1, \dots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其均值和方差分别为 $\bar{X}, S^2$, 则可以作出服从自由度为 n 的 χ^2 分布的随机变量

- (A) $\frac{\bar{X}^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$. (B) $\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$.
(C) $\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$. (D) $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$.

445 设总体 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 其均值、方差分别为 $\bar{X}, S^2$. 则

- (A) $\frac{\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$. (B) $\frac{(n-1)\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$.
(C) $\frac{n\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$. (D) $\frac{(n+1)\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$.

446 设总体 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_{10}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 统计量 $Y = \frac{4(X_1^2 + \dots + X_i^2)}{X_{i+1}^2 + \dots + X_{10}^2} (1 < i < 10)$ 服从 F 分布, 则 i 等于

- (A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

447 设总体 X 与 Y 都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 已知 $X_1, \dots, X_m$ 与 $Y_1, \dots, Y_n$ 是分别来自总体 X 与 Y 两个相互独立的简单随机样本, 统计量 $Y = \frac{2(X_1 + \dots + X_m)}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}}$ 服从 $t(n)$ 分布, 则 $\frac{m}{n}$ 等于

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{4}$.

448 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2, S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

则可以作出服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布统计量

$$(A) t = \frac{\bar{X}}{S_1 / \sqrt{n-1}}.$$

$$(B) t = \frac{\bar{X}}{S_2 / \sqrt{n-1}}.$$

$$(C) t = \frac{\bar{X}}{S_3 / \sqrt{n}}.$$

$$(D) t = \frac{\bar{X}}{S_4 / \sqrt{n}}.$$

449 设总体 X 与 Y 都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ 与 $Y_1, \dots, Y_n$ 分别来自总体 X 和 Y 容量都为 n 的两个相互独立简单随机样本, 样本均值和方差分别为 $\bar{X}, S_X^2; \bar{Y}, S_Y^2$. 则

$$(A) \bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, \sigma^2).$$

$$(B) S_X^2 + S_Y^2 \sim \chi^2(2n-2).$$

$$(C) \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_X^2 + S_Y^2}} \sim t(2n-2).$$

$$(D) \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n-1, n-1).$$

450 设随机变量 $X \sim F(n, n)$, $p_1 = P\{X \geq 1\}$, $p_2 = P\{X \leq 1\}$, 则

$$(A) p_1 < p_2.$$

$$(B) p_1 = p_2.$$

$$(C) p_1 > p_2.$$

$$(D) p_1, p_2 \text{ 的值与 } n \text{ 有关, 因而无法比较.}$$

451 假设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本 ($n > 1$), 其均值为 $\bar{X}$, 如果 $P\{|X - \mu| < a\} = P\{|\bar{X} - \mu| < b\}$, 则比值 $\frac{a}{b}$

$$(A) \text{ 与 } \sigma \text{ 及 } n \text{ 都有关.}$$

$$(B) \text{ 与 } \sigma \text{ 及 } n \text{ 都无关.}$$

$$(C) \text{ 与 } \sigma \text{ 无关, 与 } n \text{ 有关.}$$

$$(D) \text{ 与 } \sigma \text{ 有关, 与 } n \text{ 无关.}$$

452 已知总体 X 的期望 $EX = 0$, 方差 $DX = \sigma^2$, 从总体中抽取容量为 n 的简单随机样本, 其均值为 $\bar{X}$, 方差为 S^2 . 记 $S_k^2 = \frac{n}{k} \bar{X}^2 + \frac{1}{k} S^2$ ($k = 1, 2, 3, 4$), 则

$$(A) ES_1^2 = \sigma^2.$$

$$(B) ES_2^2 = \sigma^2.$$

$$(C) ES_3^2 = \sigma^2.$$

$$(D) ES_4^2 = \sigma^2.$$

453 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则数学期望 $E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left[\sum_{j=1}^n (nX_j - \sum_{k=1}^n X_k)^2\right]\right\}$ 等于

$$(A) n^3(n-1)\mu \cdot \sigma^2.$$

$$(B) n(n-1)\mu \cdot \sigma^2.$$

$$(C) n^2(n-1)\mu \cdot \sigma^2.$$

$$(D) n^3(n-1)\mu \cdot \sigma.$$

454 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 分别来自总体均为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的两个相互独立的简单随机样本, 记它们样本方差分别为 S_X^2 和 S_Y^2 , 则统计量 $T = (n-1)(S_X^2 + S_Y^2)$ 的方差 DT 是

$$(A) 2n\sigma^4.$$

$$(B) 2(n-1)\sigma^4.$$

$$(C) 4n\sigma^4.$$

$$(D) 4(n-1)\sigma^4.$$

455 已知总体 X 的期望 $EX = 0$, 方差 $DX = \sigma^2$. $X_1, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 其均值为 $\bar{X}$, 则可以作出 σ^2 的无偏估计量

(A) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

(B) $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

(C) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

(D) $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

456 假设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, $X_1, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 其均值为 $\bar{X}$, 方差为 S^2 . 已知 $\hat{\lambda} = a\bar{X} + (2-3a)S^2$ 为 λ 的无偏估计, 则 a 等于

(A) -1 .

(B) 0 .

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 1 .

457 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, X 的分布律为

X	-1	0	1
P	θ	$1-2\theta$	θ

, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, 则未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 为

(A) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

(C) $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(D) $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

458 设 $\hat{\theta}$ 为未知参数 θ 的无偏、一致估计, 且 $D\hat{\theta} > 0$, 则 $\hat{\theta}^2$ 是 θ^2 的

(A) 无偏, 一致估计.

(B) 无偏, 非一致估计.

(C) 非无偏, 一致估计.

(D) 非无偏, 非一致估计.

459 假设总体 X 的方差 DX 存在, $X_1, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 其均值和方差分别为 $\bar{X}, S^2$, 则 EX^2 的矩估计量是

(A) $S^2 + \bar{X}^2$.

(B) $(n-1)S^2 + \bar{X}^2$.

(C) $nS^2 + \bar{X}^2$.

(D) $\frac{n-1}{n}S^2 + \bar{X}^2$.

460 总体均值 μ 置信度为 95% 的置信区间为 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, 其含意是

(A) 总体均值 μ 的真值以 95% 的概率落入区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$.

(B) 样本均值 $\bar{X}$ 以 95% 的概率落入区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$.

(C) 区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 含总体均值 μ 的真值的概率为 95%.

(D) 区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 含样本均值 $\bar{X}$ 的概率为 95%.

461 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, 记参数 μ 的置信区间长度 L , 则当置信度 $1-\alpha$ 减少时

(A) L 减小.

(B) L 增大.

(C) L 不变.

(D) L 增减不一定.

462 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均未知, 现从中随机抽取 16 个零件, 测得样本均值 $\bar{x} = 20(\text{cm})$, 样本标准差 $S = 1(\text{cm})$, 则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

(A) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$.

(B) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$.

(C) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$.

(D) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$.

463 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 $X \sim P(\lambda)$ 的简单随机样本, 则可以构造参数 λ^2 的无偏估计量

(A) $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(X_i - 1)$.

(B) $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

(C) $T = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2$.

(D) $T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right)^2$.

464 关于总体 X 的统计假设 H_0 属于简单假设的是

(A) X 服从正态分布, $H_0: EX = 0$.

(B) X 服从指数分布, $H_0: EX \geq 1$.

(C) X 服从二项分布, $H_0: DX = 5$.

(D) X 服从泊松分布, $H_0: DX = 3$.

465 在假设检验中, 如果待检验的原假设为 H_0 , 那么犯第二类错误是指

(A) H_0 成立, 接受 H_0 .

(B) H_0 不成立, 接受 H_0 .

(C) H_0 成立, 拒绝 H_0 .

(D) H_0 不成立, 拒绝 H_0 .

参考答案

高等数学

1 【答案】 B

【分析】 举反例说明 ①、②、③ 均错, 例如.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 均不 $\exists$, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) + h(x)) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot h(x)) = -1.$$

故 ②、③ 不正确.

若取 $f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$, 故 ① 也不正确.

按题设, 易知 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ 不 $\exists$. (否则, 若 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [(f(x) + g(x)) - f(x)] \exists$, 矛盾). 故 ④ 正确. 选(B).

【评注】 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不 $\exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 不 $\exists$, 当 $A \neq 0$ 时, 又有 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 不 $\exists$; 当 $A = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 可能 $\exists$, 也可能不 $\exists$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均不 $\exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)), \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 可能 $\exists$, 也可能不 $\exists$.

2 【答案】 B

【分析 1】 易知, 两个正(负)无穷大量之和仍为正(负)无穷大量, 之积均是正无穷大量, 即(A)、(D)正确. 又正(负)无穷大量与有界量之和仍为正(负)无穷大量, 即(C)也正确. 因此, (B)不正确. 选(B).

【分析 2】 我们知道, 当 $A = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)h(x))$ 是未定式(无穷大量与无穷小量之积). 因此(B)不正确.

【评注】 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \neq 0$ 时 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)h(x)) = \infty$.

3 【答案】 D

【分析】 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \pi \cos \pi x = -\pi, \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$.

所以要分别考察 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. 由求极限的四则运算法则及其推广如题 2 的结论得

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \pi x}{x-1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{x-1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$$

所以选 (D).

【评注】 注意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$, 因而 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}}$ 不存在. 于是考察 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 时需要分别考察 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

4 **【答案】** D

【分析】 先作如下变形

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - e^{-\frac{1}{2}(xe^x)^2}}{(xe^x)^4} \cdot e^{4x} \\ &\stackrel{t=xe^x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^{4x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t^4} \end{aligned}$$

【分析 1】 用洛必达法则求这个极限

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t + te^{-\frac{1}{2}t^2}}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cos t + e^{-\frac{1}{2}t^2} - t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}}{12t^2} \\ &\stackrel{\text{分解法}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{12t^2} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1}{12t^2} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{24} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

其中 $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$, $e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}t^2$ ($t \rightarrow 0$)

故应选 (D).

【分析 2】 用泰勒公式求这个极限

$$\begin{aligned} \cos t &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4) \quad (t \rightarrow 0) \\ e^{-\frac{1}{2}t^2} &= 1 + \left(-\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2 + o(t^4) \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

相减得

$$\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2} = \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4}\right)t^4 + o(t^4) = -\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)$$

因此

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)}{t^4} = -\frac{1}{12}$$

【评注】 求 $\frac{0}{0}$ 型极限常可用洛必达法则或泰勒公式, 若需多次用洛必达法则, 导致求导计算不方便, 而又容易由间接法求得分子、分母的泰勒公式时, 应该用泰勒公式求这类 $\frac{0}{0}$ 型极限.

5

【答案】 B

【分析】 将已知条件改写成

$$I = a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx - \ln(1-x)^2}{x^2} = a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx - 2\ln(1-x)}{x^2} = 5,$$

即

$$I_1 = 5 - a$$

其中

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx - 2\ln(1-x)}{x^2}$$

【分析 1】 用洛必达法则

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b + \frac{2}{1-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b+2) - bx}{2x(1-x)}$$

$$\stackrel{b=-2}{=} 1 (b \neq -2 \text{ 时 } I_1 = \infty)$$

 $\Rightarrow$

$$1 = 5 - a, a = 4.$$

选(B).

【分析 2】 用泰勒公式:

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

令 $t = -x$, 得

$$bx - 2\ln(1-x) = bx - 2(-x - \frac{1}{2}x^2) + o(x^2)$$

$$= (b+2)x + x^2 + o(x^2)$$

 $\Rightarrow$

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b+2)x + x^2 + o(x^2)}{x^2} = 5 - a$$

 $\Rightarrow$

$$b = -2 (\text{否则 } I_1 = \infty), 1 = 5 - a,$$

 $\Rightarrow$

$$a = 4.$$

选(B).

6

【答案】 C

【分析 1】 先导出 $\frac{3+f(x)}{x^4}$ 与 $\frac{\sin 3x^2 + x^2 f(x)}{x^6}$ 的关系:

$$\frac{3+f(x)}{x^4} = \frac{3x^2 + x^2 f(x)}{x^6} = \frac{3x^2 - \sin 3x^2 + \sin 3x^2 + x^2 f(x)}{x^6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - \sin 3x^2}{x^6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2 + x^2 f(x)}{x^6}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - \sin 3x^2}{x^6} \stackrel{t=3x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \sin t}{\frac{1}{3^3} t^3}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3^2(1 - \cos t)}{t^2} = \frac{9}{2}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + f(x)}{x^4} = \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2}$. 选(C).

【分析 2】对 $\sin 3x^2$ 用泰勒公式. 由

$$\sin t = t - \frac{1}{3!} t^3 + o(t^3) (t \rightarrow 0)$$

令 $t = 3x^2$ 得

$$\sin 3x^2 = 3x^2 - \frac{1}{6} (3x^2)^3 + o(x^6) (x \rightarrow 0) = 3x^2 - \frac{9}{2} x^6 + o(x^6)$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2 + x^2 f(x)}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - \frac{9}{2} x^6 + x^2 f(x) + o(x^6)}{x^6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + f(x)}{x^4} - \frac{9}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^6)}{x^6} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + f(x)}{x^4} = \frac{9}{2}. \text{ 选(C).}$$

7 【答案】 D

【分析 1】(A) 是错的. 因为 n 是正整数, 对数列没有导数概念, 不能用洛必达法则.

(B) 是错的. 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{6x - 2}$ 已不是未定式, 不能用洛必达法则.

(C) 也是错的. 用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 也不为 ∞ , 则法则失效, 不能推出原极限不存在, 事实上该极限是存在的. 因此选(D).

【分析 2】(D) 是正确的.

用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (有限数), 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, (D) 正是后一种情形.

【评注】(A)、(B)、(C) 的正确解法是:

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{\text{数列极限转化为函数极限}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{3x^2 - 2x - 1} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{6x - 2} = \frac{-\pi}{4}.$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \times 0 = 0.$$

$$(D) \text{ 的另一解法: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \infty \text{ (分子极限为 2, 分母极限为 0).}$$

8 【答案】 B

【分析 1】 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 所以, 对于任意 $M > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| > M$. 由此可得 $f(x)$ 在 x_0 的任意空心邻域内无界, 因此选(B).

【分析 2】 举反例说明(A)、(C)、(D) 均不成立.

设 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, y_n = \frac{1}{n\pi}$, 则 $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi + \frac{\pi}{2}) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 任意空心邻域无界, 但 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 不是无穷大量. 也说明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不 $\exists$. 此例说明(A)、(C) 不正确.

若令 $f(x) = 0$ (常数函数), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 但 $\frac{1}{f(x)}$ 无定义, 故(D) 不正确.

因此选(B).

【评注】 (1) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 但 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $x=0$ 的任一邻域的无理点均无定义.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(3) 无穷大量与无界函数的关系: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的任意空心邻域无界. 但 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的任意空心邻域无界推不出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

(4) $f(x)$ 在 x_0 的任意空心邻域无界 $\Leftrightarrow \exists x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.

【证明】 $\Rightarrow$ 设 $f(x)$ 在 x_0 的 $\forall$ 空心邻域无界.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $U_0(x_0, \frac{1}{n}) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \frac{1}{n}\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ 无界 $\Rightarrow$ 对 $\forall M = n, \exists x_n \in U_0(x_0, \frac{1}{n}), |f(x_n)| > n, \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty.$$

$\Leftarrow$ 设 $\exists x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty, \Rightarrow$ 对 $\forall M > 0, \delta > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时

$$0 < |x_n - x_0| < \delta, |f(x_n)| > M$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的 $\forall$ 空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 无界.

9 【答案】 C

【分析】 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \exists$, 则 x_n 有界. 这是我们应熟悉的基本定理, 即 ① 正确. 关于 ②、③ 的正确性, 从直观上理解即可.

$\Rightarrow x_n: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 的二阶无穷小.

$x_{n+l}: x_{1+l}, x_{2+l}, x_{3+l}, \dots, x_{n+l}, \dots$

x_n 中去掉前 l 项即 x_{n+l} .

$x_{2n-1}: x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}, \dots$

$x_{2n}: x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots$

它们一起涵盖了 x_n 的所有项.

命题 ④ 是错的. 例如 $x_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (不 $\exists$ 极限).

因此选(C).

【评注】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 若 $a \neq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在, 也可能不存在.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{\text{记}}{=} C$ 存在, 则必有 $C \in [-1, 1]$ (因为若 $|C| > 1$, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 见题 479). 例如

$$x_n = \frac{1}{l^n} (|l| > 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{l}.$$

10 【答案】 C

【分析】 由 $x_n \leq z_n \leq y_n \Rightarrow 0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$.

又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - x_n) = 0$. 但不保证 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 存在. 例如,

$$\text{取 } x_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}, y_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

$$z_n = (-1)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right), \text{ 此时有, } x_n \leq z_n \leq y_n$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, z_n 的极限不存在, 因此选(C).

【评注】 (1) 要注意夹逼定理的条件, 当 $x_n \leq z_n \leq y_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ 时, 才有 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ 不一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$) 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 才能有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.



11 【答案】 D

【分析】 (D) 正确. (D) 正是极限的不等式性质中所述的结论. (A) 的错误在于由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不能判断 x_0 附近 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系. 由 (B) 的条件只能得 $A_0 \geq B_0$. 在 (C) 中没假设极限存在. 选(D).

12 【答案】 C**【分析 1】** 由题意及极限运算法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c - \cos x) = c - 1 = 0$$

得 $c = 1$

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + c - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = 0$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \begin{cases} \infty & (b \neq 0) \\ a + \frac{1}{2} & (b = 0) \end{cases}$$

所以 $b = 0, a = -\frac{1}{2}$. 因此选(C).**【分析 2】** 因 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) (x \rightarrow 0)$, 于是

$$ax^2 + bx + c - \cos x = (c - 1) + bx + \left(a + \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2).$$

因此, $a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = 1$. 选(C).**【评注】 【分析 1】** 利用当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 以及极限的四则运算法则.**13 【答案】 C****【分析】** 逐一分析它们的阶.

(A) (考察等价无穷小)

 $(1+x)^{x^2} - 1 \sim \ln[(1+x)^{x^2} - 1 + 1] = x^2 \ln(1+x) \sim x^3 (x \rightarrow 0), \Rightarrow (1+x)^{x^2} - 1$ 是 x 的三阶无穷小.

(B) (考察等价无穷小)

 $e^{x^4-2x} - 1 \sim x^4 - 2x \sim -2x (x \rightarrow 0) \Rightarrow e^{x^4-2x} - 1$ 是 x 的一阶无穷小.

(C) (待定阶数法)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^4}{kx^{k-1}} \stackrel{k=6}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x^4}{3x \cdot x^4} = \frac{1}{3}$$

 $\Rightarrow \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$ 是 x 的六阶无穷小.

(D) (待定阶数法或泰勒公式法)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \times 2 - \frac{1}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}} \times 3}{kx^{k-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \times 2 + \frac{2}{3}(1+3x)^{-\frac{5}{3}} \times 3}{k(k-1)x^{k-2}} \stackrel{k=2}{=} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

 $\Rightarrow \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ 是 x 的二阶无穷小.

或用泰勒公式. 已知

$$(1+t)^a = 1 + at + \frac{1}{2}a(a-1)t^2 + o(t^2) (t \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow (1+2x)^{\frac{1}{2}} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (2x)^2 -$$

$$\left[1 + \frac{1}{3} \times 3x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) (3x)^2 \right] + o(x^2)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$\Rightarrow \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ 是 x 的二阶无穷小. 因此选 (C).



14 【答案】 C

【分析】 此类问题要逐一分析, 按无穷小阶的定义:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 (\exists), \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = B \neq 0 (\exists)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x)}{(x-a)^{n+m}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = A \cdot B \neq 0 (\exists)$$

$\Rightarrow f(x)g(x)$ 是 $(x-a)$ 的 $n+m$ 阶无穷小;

又, 若 $n > m$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot (x-a)^{n-m} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = \frac{A}{B} \neq 0 (\exists)$$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $(x-a)$ 的 $n-m$ 阶无穷小;

因此 ①、② 正确. 再考察

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} (x-a)^{m-n} \\ &= \begin{cases} A + B \cdot 0 = A \neq 0 (\exists) (n < m) \\ A + B \quad (n = m) \end{cases} \end{aligned}$$

由此得, 当 $n < m$ 时 $f(x) + g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

当 $n = m$ 时 $f(x) + g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶 ($A+B \neq 0$) 或高于 n 阶 ($A+B = 0$) 的无穷小.

例如, $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 与 $-x$ 均是 x 的一阶无穷小, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

即 $\sin x + (-x)$ 是 x 的三阶无穷小;

因此 ③ 不正确.

最后考察

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{A}{n+1} \neq 0 \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \text{ 是 } x-a \text{ 的 } n+1 \text{ 阶无穷小.}$$

因此 ④ 正确. 选 (C).

【评注】 本题是讨论无穷小阶的运算规律, 再补充一条:

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导, $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小 ($n \geq 2$), 则 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

【证法一】 $f(x)$ 在 $x=a$ 有泰勒公式且为

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a)$$

其中 $f^{(n)}(a) \neq 0, f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

记 $g(x) = f'(x)$ 在 $x=a$ 处 $n-1$ 阶可导, 有泰勒公式

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1})$$

即

$$f'(x) = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}) \quad (x \rightarrow a)$$

因此, $x \rightarrow a$ 时 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

【证法二】 不用泰勒公式, 连续用 $n-1$ 次洛必达法则.

$f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导 ($n \geq 2$) $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=a$ 邻域 $n-1$ 阶可导且 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $x=a$ 连续.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \quad (\text{分子极限为 } f'(a) = 0, \text{ 否则该极限为 } \infty, \text{ 这不可能})$$

$$= \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \quad (\text{分子极限为 } f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ 否则该极限为 } \infty, \text{ 不可能})$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a) \neq 0$$

因此 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

15 【答案】 D

【分析】 要逐一分析, 我们证明 ①、②、③ 成立.

关于 ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (1+f_1(x))^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)\ln(1+f_1(x))} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)\ln(1+f_2(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (1+f_2(x))^{g(x)} \end{aligned}$$

其中用到了等价无穷小因子替换:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)\ln(1+f_1(x)) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)\ln(1+f_2(x)).$$

这里 $f_1(x) \sim f_2(x) (x \rightarrow a), \ln(1+f_i(x)) \sim f_i(x) (x \rightarrow a, i=1,2)$.

关于 ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} g_1(x)\ln f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow a} g_2(x)\ln\left(f_2(x) \cdot \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g_2(x)\ln f_2(x) + \lim_{x \rightarrow a} g_2(x)\ln \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} g_2(x)\ln f_2(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

若设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 间断, 但 $f'(x) = 1 (\forall x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)^{g_1(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} e^{g_1(x) \ln f_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g_2(x) \ln f_2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)^{g_2(x)}\end{aligned}$$

关于 ③ 可直接证明:

$$f_1(x) - g_1(x) \sim f_2(x) - g_2(x) \quad (x \rightarrow a)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) - g_1(x)}{f_2(x) - g_2(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)} - 1\right)g_1(x)}{\left(\frac{f_2(x)}{g_2(x)} - 1\right)g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f_1(x)}{g_1(x)} - 1}{\frac{f_2(x)}{g_2(x)} - 1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \\ &= \frac{r-1}{r-1} \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) - g_1(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x) - g_2(x)}{h(x)}.$$

选(D).

16 【答案】 C

【分析】

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{x-1}{x} = \mp \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \arctan \frac{x-1}{x} = \mp \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} f(x) = \mp \frac{\pi}{2} \Rightarrow x=0 \text{ 是 } f(x) \text{ 的第一类间断点.}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \arctan \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

$\Rightarrow x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

因此选(C).

17 【答案】 B

【分析】 分别就 $|x|=1, |x|<1, |x|>1$ 时求极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, 得出 $f(x)$ 的分段表达式:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| < 1, \end{cases}$$

在 $|x|=1$ 处, 因 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

所以, $x=\pm 1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 选(B).

18 【答案】 B

【分析】 $|x|<1$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \left(1 + \frac{x^{2n}}{1+x^n} \right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$x=1$ 时

$$f(1) = \arctan\left(1 + \frac{1}{1+1}\right) = \arctan \frac{3}{2}$$

$x > 1$ 时

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(1 + \frac{x^n}{\frac{1}{x^n} + 1}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$x \leq -1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(1 + \frac{x^{2n}}{1+x^n}\right) \text{ 不 } \exists, \text{ 因为}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(1 + \frac{x^{2(2n)}}{1+x^{2n}}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(1 + \frac{x^{2n}}{\frac{1}{x^{2n}} + 1}\right) \\ &= \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (x < -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(1 + \frac{x^{2(2n-1)}}{1+x^{2n-1}}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(1 + \frac{x^{2n-1}}{\frac{1}{x^{2n-1}} + 1}\right) \\ &= \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \quad (x < -1). \end{aligned}$$

$x = -1$ 时

$$\arctan\left(1 + \frac{x^{2n}}{1+x^n}\right) \text{ 无定义.}$$

因此, $f(x)$ 在 $x \leq -1$ 无定义.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x \in (-1, 1) \\ \arctan \frac{3}{2}, & x = 1 \\ \frac{\pi}{2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$f(x)$ 的连续区间是

$$J = (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

19 【答案】 B

【分析 1】 若 $f(x) + \sin x$ 在 $x = x_0$ 连续 $\Rightarrow$

$$f(x) = (f(x) + \sin x) - \sin x$$

在 $x = x_0$ 连续, 与已知矛盾. 因此 $f(x) + \sin x$ 在 x_0 必间断. 选(B).

【评注】 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 间断, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则 $f(x) \pm g(x)$ 在 $x = x_0$ 间断.

【分析 2】 举反例说明(A)、(C)、(D) 不对.

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \text{ 则 } f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 间断,}$$

$$f(x) \cdot \sin x = 0 (\forall x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 连续.}$$

$$\text{若设 } f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 间断, 但 } f^2(x) = 1 (\forall x),$$

$|f(x)| = 1 (\forall x)$ 在 $x = 0$ 均连续, 因此不选(A)、(C)、(D).

20 【答案】 B

【分析】 在复合函数连续性问题的结论中, 只有一个结论是确定的, 即结论①是正确的, 其余情形则结论不确定, 因而②、③是错误的, 而④是正确的. 因此选(B).

【评注】 例如, $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$ 对 $\forall x$ 不连续.

$\varphi(x) = 1$ 对 $\forall x_0$ 连续, $f(u) = D(u)$ 在 $\varphi(x_0) = 1$ 不连续, 但 $f(\varphi(x)) = 1$ 在 x_0 连续.
 $\varphi(x) = D(x)$ 在 $\forall x_0$ 不连续, $f(u) = 1$ 在 $\varphi(x_0)$ 连续, 但 $f(\varphi(x)) = 1$ 在 x_0 连续.
 $\varphi(x) = D(x)$ 对 $\forall x_0$ 不连续, $f(u) = D(u)$ 在 $\varphi(x_0)$ 不连续, 但 $f(\varphi(x)) = 1$ 在 x_0 连续.

21 【答案】 A

【分析】 由“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ ”可得“如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$ ”因此, $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 连续, 但 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续, $f(x)$ 在 x_0 处不一定连续.

如 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 不连续, 但 $|f(x)| = 1$ 在 $x = 0$ 处连续.

于是应选(A).

22 【答案】 A

【分析】 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Rightarrow \exists x_0 > a$ 当 $x \in [x_0, +\infty)$ 时 $f(x)$ 有界, 又 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 有界. 因此 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界.

若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, 可以有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不 $\exists$, 如 $f(x) = \sin x$. 因此选(A).



23 【答案】 C

【分析】 若 $\exists x_n \in [a, +\infty)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界. 因为若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, 即 $|f(x)| \leq M$ ($x \in [a, +\infty)$) $\Rightarrow |f(x_n)| \leq M$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ 矛盾.

若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界 $\Rightarrow$ 对 $\forall$ 自然数 n , $f(x)$ 在 $[n, +\infty)$ 无界
 $\Rightarrow \exists x_n \in [n, +\infty), |f(x_n)| > n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. 因此选(C).

24 【答案】 C

【分析 1】 直接指出某函数在 $[1, +\infty)$ 无界. 取 $x_n = n^2 \pi^2, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 对于(C).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \pi^2 \cos n\pi + n^4 \pi^4 e^{-n^2 \pi^2}) = \infty$$

$\Rightarrow$ (C) 中 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 无界.

【分析 2】 指出三个函数在 $[1, +\infty)$ 有界.

对于(A)、(B)、(D) 中 $f(x)$ 均在 $[1, +\infty)$ 连续, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

$\Rightarrow$ (A) 有界.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$ 在 $[1, +\infty)$ 有界 $\Rightarrow \sin x^2 + \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$ 在 $[1, +\infty)$ 有界, 即(B) 在 $[1, +\infty)$ 有界.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2} = 0$$

$\Rightarrow$ (D) 在 $[1, +\infty)$ 有界. 因此选(C).

25 【答案】 D

【分析】 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 除 $x=0$ 外连续, $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 的有界性问题与 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否连续及间断点类型有关.

【方法 1】 证明(A), (B), (C) 是有界的.

(A) 因 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \neq f(0)$, $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点(可去), 又 $f(x)$ 在 $[-1, 2] \setminus \{0\}$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 有界.

$$(B) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1+0}{1+\infty} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点(跳跃), 又 $f(x)$ 在 $[-1, 2] \setminus \{0\}$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 有界.

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(1+\frac{1}{|x|})} = e^0 = 1 = f(0)$$

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(1 + \frac{1}{|x|} \right) \stackrel{t=\frac{1}{|x|}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+|t|)}{t} = 0.$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 连续, 故有界.

因此选(D).

【方法 2】 证明(D) 无界.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln(1+\frac{1}{x})} = +\infty$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 无界. 因此选(D).

【评注】 (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 或 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 除 $x_0 \in (a, b)$ 均连续, 而 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.

(3) 若 $\exists x_0 \in (a, b)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 无界.

26 【答案】 C

【分析】 先分别考察左、右可导性.

显然, $f(0) = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} = \frac{1}{2} (\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 右连续})$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \frac{\arcsin^2 x}{x} \xrightarrow{\text{有界变量与无穷小之积}} 0 (\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 左连续})$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 但不可导. 选(C).

【评注】 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 左可导且右可导, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, 从而它在 x_0 处的极限存在.

27 【答案】 D

【分析】 对 $\forall x, x_0 \in (a, b)$ 有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq K |x - x_0|.$$

$$\text{令 } x \rightarrow x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad (\forall x_0 \in (a, b))$$

$\Rightarrow f'(x) \equiv 0 (\forall x \in (a, b))$ 选(D).

28 【答案】 C

【分析】 $f'(x)$ 也以 3 为周期 $\Rightarrow f'(1) = f'(4)$, 我们可由 $f'(1)$ 求得极限值 I .

$$\begin{aligned} I &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+h) - f(1)] - [f(1-3\tanh h) - f(1)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3\tanh h) - f(1)}{-3\tanh h} \cdot \frac{3\tanh h}{h} \\ &= (1+3)f'(1) = 4 \end{aligned}$$

应该选(C).

【评注】 设 $f'(a) \exists, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(a + \varphi(x)) - f(a)}{\varphi(x)} \xrightarrow{t = \varphi(x)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} = f'(a).$$

本题就是利用 $f'(1)$ 来求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + \varphi(h)) - f(1)}{\varphi(h)} = f'(1)$$

其中 $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$, 这里是 $\varphi(h) = h$ 或 $\varphi(h) = -3\tanh h$.

29 【答案】 B

【分析】 要逐一分析.

因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy|_{x=x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$ 时 $dy|_{x=x_0}$ 与 Δx 是同阶无穷小, ① 正确

$df(x) = f'(x)\Delta x$, $df(x)$ 与 $x \in (a, b)$ 及 Δx 有关, 故 ② 不正确.

当 $y = f(x)$ 为一次函数: $f(x) = ax + b$,

$\Rightarrow dy = a\Delta x = \Delta y$. 故 ③ 不正确.

由可微概念, $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$)

即 $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$) 故 ④ 正确. 因此, 选(B).

【评注】 (1) $dy = f'(x)\Delta x$ 或 $dy = f'(x)dx$, 容易犯的错误是: $dy = f'(x)$.

(2) $y = f(x)$ ($x \in (a, \beta)$), 则对 $\forall x \in (a, \beta)$ 有

$\Delta y = dy$ 即 $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$ ($\forall x, x + \Delta x \in (a, \beta)$)

$\Leftrightarrow f(x) = ax + b$ 为线性函数.

证明, 前面的分析中已证若 $f(x) = ax + b$, 则 $\Delta y = dy$.

现设对 $\forall x \in (a, \beta)$, $\Delta y = dy$, 取定 $x_0 \in (a, \beta)$, 对 $\forall x \in (a, \beta)$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$\Rightarrow f(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0) = ax + b$ ($\forall x \in (a, \beta)$)

其中 $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$ 均为常数.

30 【答案】 B

【分析】 考虑例 1: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -e^{-x}$, 显然 $f(x) > g(x)$, 但 $f'(x) = -e^{-x}$, $g'(x) = e^{-x}$, 此时 $f'(x) < g'(x)$, 所以 ① 不正确.

考虑例 2: $f(x) = -e^{-x}$, $g(x) = e^{-x}$, $f'(x) = e^{-x}$, $g'(x) = -e^{-x}$, $f'(x) > g'(x)$, 但 $f(x) < g(x)$. 所以 ② 不正确. 因此选(B).

【评注】 函数 $f(x)$ 的导数是描述函数的变化率, 在 (a, b) 上 $f'(x) > 0$ 表示 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增, 不能保证 $f(x) > 0$, 同样在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 如果它是可导单调减函数, 则在 (a, b) 上 $f'(x) < 0$.

31 【答案】 C

【分析】 由 $f(x) = f(-x)$ 可知 $f(x)$ 为偶函数, 因偶函数的导数是奇函数, 奇函数的导数是偶函数, 即 $f'(x)$ 为奇函数, $f''(x)$ 为偶函数, 因此当 $x < 0$ 时有 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 则当 $x > 0$ 时有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 选(C).

【评注】 要明确以下几条 $f'(x)$ 的性质:

(1) 可导奇函数的导函数是偶函数.

(2) 可导偶函数的导函数是奇函数.

(3) 以 T 为周期的可导函数的导函数仍然以 T 为周期.

32 【答案】 D

【分析】 首先将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的左右导数 $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 与 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处的左右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ 区分开来.

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = a$, 只能得出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = a$, 但不能保证 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 以及在 $x = x_0$ 处连续和极限存在.

例如 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$ 显然, $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 1$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$$

但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$,

因而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 不可导.

因此选(D).

【评注】 (1) $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 不一定有 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(2) 本题讨论的一个问题是, $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的关系, 我们有如下结论:

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的空心邻域内可导

1° $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \begin{cases} \text{若 } f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 不连续} \Rightarrow f'(x_0) \text{ 不 } \exists. \\ \text{若 } f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 连续} \Rightarrow f'(x_0) = A. \end{cases}$

(此时可用洛必达法则求得

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A)$$

2° $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty \Rightarrow f'(x_0) \text{ 不 } \exists.$

(此时若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续, 当然也就不可导, 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 仍可用洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty)$$

即 $f'(x_0) \text{ 不 } \exists.$

3° $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \text{ 不 } \exists$, 也不为 ∞ , 此时 $f'(x_0)$ 是否存在要具体问题具体分析.

33 【答案】 A

【分析】 $|x| \neq 1$ 时显然可导. 由于 $f(x)$ 是偶函数, 故只须考查 $x = 1$.

首先要求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续, 即 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

即

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1 - b + c, 0 = 1 - b + c$$

$$\text{又 } f'_+(1) = (x^4 - bx^2 + c)' \Big|_{x=1} = 4 - 2b$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}} - 0}{x - 1} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2} \xrightarrow{t = \frac{1}{x^2-1}} -2 \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t = 0 \end{aligned}$$

现要求 $f'_+(1) = f'_-(1)$, 即 $4 - 2b = 0$.

因此, $b = 2, c = 1$. 选(A).

【评注】 有一类如下类型的分段函数:

设 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x \leq x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$ δ 为大于零的常数, $h(x)$ 在 x_0 无定义, 又 $g'_-(x_0)$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - a}{x - x_0} = b$ 均存在.

现考察 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的可导性.

首先考查 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的连续性.

$$f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 连续} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = g(x_0) (g'_-(x_0) \exists), \text{ 则 } g(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 左连续}.$$

$$\Leftrightarrow a = g(x_0). \text{ 补充定义 } h(x_0) = a, \text{ 则}$$

$$h'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - a}{x - x_0} = b$$

当 $g(x_0) = a$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x \leq x_0 \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

$$f'(x_0) \exists \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Leftrightarrow g'_-(x_0) = h'_+(x_0) = b.$$

因此在题设条件下, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导 $\Leftrightarrow g(x_0) = a, g'_-(x_0) = b$.

34 【答案】 A

【分析】 显然, $f'_-(1) = 0$. 由右导数定义

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^{\alpha+1}} \cos \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\alpha+1 < 0} 0, (\text{当 } \alpha+1 \geq 0 \text{ 时该极限不存在}). \end{aligned}$$

因此, 仅当 $\alpha+1 < 0$, 即 $\alpha < -1$ 时, $f'(1)$ 存在 ($f'(1) = 0$).

因此选(A).

【评注】 (1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \cos \frac{1}{x-1}$ 不存在, 但 $\cos \frac{1}{x-1}$ 是有界量, 又

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{\sigma+1}} = \begin{cases} 0, & (\sigma < -1), \\ 1, & (\sigma = -1), \\ \infty, & (\sigma > -1), \end{cases}$$

要使 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^{\sigma+1}} \cos \frac{1}{x-1}$ 存在, 必须 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^{\sigma+1}} = 0$, 此处利用了无穷小量与有界量的乘积是无穷小量.

(2) $g(t) = t^\beta \cos \frac{1}{t}$, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \begin{cases} 0, & (\beta > 0), \\ \text{不存在, 也不为 } \infty, & (\beta \leq 0). \end{cases}$$

取 $t_n = \frac{1}{2n\pi} (n = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow t_n \rightarrow 0^+ (n \rightarrow \infty)$

$$g(t_n) = (2n\pi)^{-\beta} \cos 2n\pi, \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) = \begin{cases} +\infty, & (\beta < 0), \\ 1, & (\beta = 0). \end{cases}$$

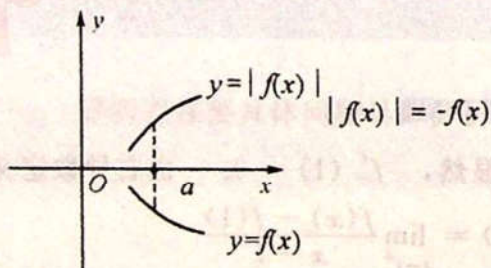
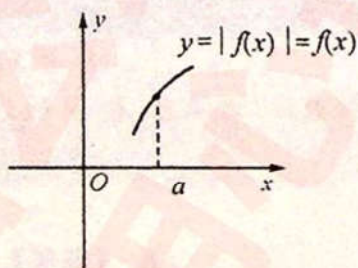
取 $t'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} (n = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow t'_n \rightarrow 0^+ (n \rightarrow \infty)$

$$g(t'_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-\beta} \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} g(t'_n) = 0$$

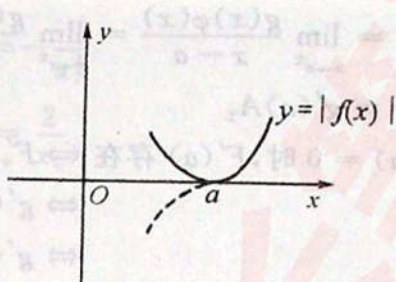
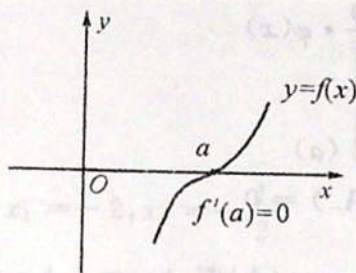
因此 $\beta \leq 0$ 时 $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ 不存在, 也不为 ∞ .

35 【答案】 B

【分析 1】 当 $f(a) \neq 0$ 时 (不论 $f'(a)$ 是正值还是负值), 由连续性, 在 $x = a$ 附近或 $|f(x)| = f(x)$, 或 $|f(x)| = -f(x)$, 于是 $|f(x)|$ 与 $f(x)$ 在 $x = a$ 有相同的可导性. 由 $f'(a) \exists \Rightarrow |f(x)|' \Big|_{x=a} \exists$, (C)、(D) 被排除.



当 $f(a) = 0, f'(a) = 0$ 时曲线 $y = f(x)$ 在 $(a, 0)$ 点与 x 轴相切 $\Rightarrow y = |f(x)|$ 同样在 $(a, 0)$ 点与 x 轴相切 $\Rightarrow |f(x)|' \Big|_{x=a} \exists$ (且为零值). (A) 被排除.



因此选(B).

【分析2】 $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad |x|' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|}$, 所以, 当 $f(x) \neq 0$ 且 $f(x)$ 可导, 由复合函数的导数法则, 有 $(|f(x)|)' = \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x)$.

若 $f(a) \neq 0$, 则有 $[|f(x)|]' \Big|_{x=a} = \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x) \Big|_{x=a} = \frac{f(a)}{|f(a)|} f'(a)$, 因此不选(C)和(D). (当 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导, 且 $f(a) \neq 0$ 时, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点可导).

当 $f(a) = 0$ 时

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = |f'(a)|$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = - \lim_{x \rightarrow a^-} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = -|f'(a)|$$

上两式分别是 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点的右、左导数, 因此, 当 $f(a) = 0$ 时, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点不可导的充要条件是上两式不相等, 即 $f'(a) \neq 0$ 时, 于是选(B).

【评注】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导, 关于 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 是否可导已得如下结论:

若 $f(a) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 可导.

若 $f(a) = 0 \begin{cases} f'(a) = 0, & \text{则 } |f(x)| \text{ 在 } x=a \text{ 可导.} \\ f'(a) \neq 0, & \text{则 } |f(x)| \text{ 在 } x=a \text{ 不可导.} \end{cases}$

36 【答案】 B

【分析】 设 $\varphi(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, $f(x) = |\varphi(x)|$ 根据上题结论, 使 $\varphi(x) = 0$ 的点 $x=1, x=2, x=3$ 可能是 $f(x)$ 的不可导点, 还需考虑 $\varphi'(x)$ 在这些点的值, $\varphi'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$, 显然, $\varphi'(1) \neq 0$, $\varphi'(2) = 0$, $\varphi'(3) = 0$, 所以只有一个不可导点 $x=1$. 选(B).

37 【答案】 A

【分析】 因 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 不可导, 所以不能对 $F(x)$ 用乘积的求导法则, 用定义求 $F'(a)$. 题设 $\varphi(x)$ 以 $x=a$ 为跳跃间断点, 则存在 $\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) \stackrel{\text{记}}{=} A_+, A_+ \neq A_-$.

当 $g(a) = 0$ 时

$$F'_\pm(a) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{g(x)\varphi(x) - g(a)\varphi(a)}{x - a}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \varphi(x) \\ &= g'(a)A_+ \end{aligned}$$

这表明, $g(a) = 0$ 时, $F'(a)$ 存在 $\Leftrightarrow F'_+(a) = F'_-(a)$

$$\Leftrightarrow g'(a)(A_+ - A_-) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(a) = 0.$$

下面证明若 $F'(a)$ 存在则 $g(a) = 0$.

反证法, 若 $g(a) \neq 0$, $\varphi(x) = \frac{F(x)}{g(x)}$, 由商的求导法则, $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 这与题设矛盾, 所以选(A).

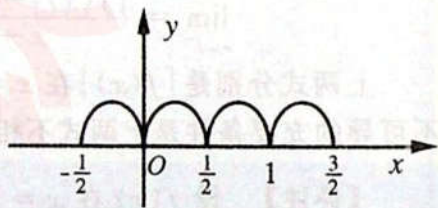
【评注】 类似可证: 若 $g(x)$ 在 $x=a$ 处可导, $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续但不可导, 则当 $g(a) \neq 0$ 时 $g(x)\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处不可导, 当 $g(a) = 0$ 时, $g(x)\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $(g(x)\varphi(x))'|_{x=a} = g'(a)\varphi(a)$.

38 【答案】 B

【分析】 设 $g(x) = x^2 + x - 2$, $\varphi(x) = |\sin 2\pi x|$, 显然 $g(x)$ 处处可导, $\varphi(x)$ 处处连续, 有不可导点.

由题 37 评注的结论, 考察 $\varphi(x)$ 不可导点处 $g(x)$ 是否为零.

$\varphi(x) = |\sin 2\pi x|$ 的图形如图所示, 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 内只有



不可导点 $x = 0, \frac{1}{2}, 1$, 其余均可导.

因为 $g(0) = -2 \neq 0$, $g(\frac{1}{2}) \neq 0$, $g(1) = 0$

所以 $f(x) = g(x)\varphi(x)$ 在 $x = 0, \frac{1}{2}$ 处不可导, 在 $x = 1$ 可导, 其余点均可导.

因此选(B).

39 【答案】 A

【分析】 设 $y = ax + b$ 与 $y = x^2$ 的切点为 (x_1, x_1^2) 与 $y = \frac{1}{x}$ 的切点为 $(x_2, \frac{1}{x_2})$.

曲线 $y = x^2$ 在 (x_1, x_1^2) 处的切线方程是

$$y = x_1^2 + 2x_1(x - x_1), \text{ 即 } y = 2x_1x - x_1^2$$

曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在切点 $(x_2, \frac{1}{x_2})$ 处的切线方程是

$$y = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2^2}(x - x_2), \text{ 即 } y = -\frac{1}{x_2^2}x + \frac{2}{x_2}$$

于是常数 a, b 同时满足

$$\begin{cases} a = 2x_1 = -\frac{1}{x_2^2} \\ b = -x_1^2 = \frac{2}{x_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4x_2, x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

因此 $a = -4, b = -4$. 选(A).

40 【答案】 B

【分析】 任意点 $P(x, \frac{1}{x})$ 处的切线方程是

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}(X - x)$$

$$\text{即 } Y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}X$$

其中 (X, Y) 为切线上点的坐标, 分别令 $Y = 0, X = 0$ 得 A 与 B 的坐标为 $(2x, 0), (0, \frac{2}{x})$, 于是

$$\overline{PA} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}, \overline{PB} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

即 $\overline{PA} = \overline{PB}$. 应选(B).

41 【答案】 C

【分析】 $f(x) = \begin{cases} x \sin^2 x, & (x \geq 0), \\ -x \sin^2 x, & (x < 0), \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \sin^2 x + x \sin 2x, & (x \geq 0), \\ -(\sin^2 x + x \sin 2x), & (x < 0), \end{cases}$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 \sin 2x + 2x \cos 2x, & (x \geq 0), \\ -(2 \sin 2x + 2x \cos 2x), & (x < 0), \end{cases}$$

$$f_+^{(3)}(0) = (2 \sin 2x + 2x \cos 2x)' \Big|_{x=0} = 6$$

$$f_-^{(3)}(0) = -(2 \sin 2x + 2x \cos 2x)' \Big|_{x=0} = -6$$

$\Rightarrow f^{(3)}(0)$ 不存在. 因此 $n = 2$. 选(C).

42 【答案】 C

【分析】 由条件出发, 按导数定义

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

及极限的不等式性质可知, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$\Rightarrow$ 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x) - f(x_0) > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x) - f(x_0) < 0$.

因此, 选(C).



【评注】(1) 前面的分析方法, 给出了证明如下结论:

设 $f'(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x) > f(x_0)$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x) < f(x_0)$.

作为选择题, 有时我们可选用特殊选取法. 即特殊选取某具体的 $f(x)$ 满足题中的条件, 若四个选项中, 有三个选项不正确, 一个选项正确, 就选该项即可.

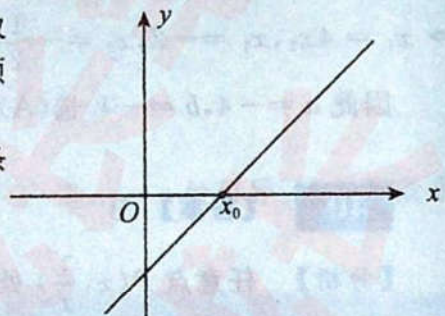
如取 $f(x) = x - x_0$ 如右图, 则 $f'(x) = 1 > 0$, 满足条件. 对此 $f(x)$, 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调上升, 且

$$f(x) > f(x_0) = 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)),$$

$$f(x) < f(x_0) = 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)).$$

于是选项(B)、(D) 不正确, 对此 $f(x)$, (A)、(C) 均正确. 但若(A) 正确, 则(C) 一定正确, 由“四选一”原则, (A) 一定不正确, 故选(C).

(2) 若 $f'(x_0) > 0$ 且 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 连续 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 单调上升.



43 【答案】 A

【分析 1】 关于(A), 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{2}{3}} \cos \frac{1}{x}$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续. 选(A).

【评注】 设 $f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \frac{1}{x}, & (x \neq 0), \\ 0, & (x = 0), \end{cases}$ 则

$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续 $\Leftrightarrow a > 0$; 在 $x = 0$ 可导 $\Leftrightarrow a > 1$; 在 $x = 0$ 处 $f'(x)$ 连续 $\Leftrightarrow a > 2$.

(A) 中 $a = \frac{4}{3}, 1 < a < 2, f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

【分析 2】 (B)、(C)、(D) 中的三个 $f(x)$ 在 $x = 0$ 均连续, 直接求出

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = 0$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0, f'(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 连续.}$$

类似可证(C)、(D) 函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 因此选(A).

【评注】 (B)、(C)、(D) 中的函数均可表为幂级数.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (|x| < +\infty).$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{3!} x^2 + \dots$$

右端级数当 $x = 0$ 时取值为 1, $\Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & (x \neq 0) \\ 1, & (x = 0) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} (|x| < +\infty)$$

由幂级数的性质 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 任意阶可导.
其余类似.

44 【答案】 A

【分析】 因 $f'(a) = 0$ 于是有 $(a-1)f''(a) = 1 - e^{1-a}$

显然
$$f''(a) = \frac{e^{1-a} - 1}{1-a} > 0$$

所以, $x = a$ 是极小值点. 选(A).

【评注】 对 $\forall x, e^x - 1 > x$, (令 $F(x) = e^x - 1 - x, F'(x) = e^x - 1$)
$$\begin{cases} < 0 & (x < 0) \\ = 0 & (x = 0) \\ > 0 & (x > 0) \end{cases},$$

$\Rightarrow F(x) > F(0) = 0 (x \neq 0)$.

45 【答案】 B

【分析 1】 因 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} > 0$, 由极限的保号性质, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时 $\frac{f''(x)}{(x-1)^2} > 0$, 又因 $(x-1)^2 > 0 (x \neq 1)$, 所以当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $f''(x) > 0$, 因此 $f'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 单调递增, 从而当 $1-\delta < x < 1, f'(x) < f'(1) = 0$, 当 $1 < x < 1+\delta, f'(x) > f'(1) = 0$, 由取得极值的充分条件, $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 因此选(B).

【评注】 由当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $f''(x) > 0$ 可以断定 $(1, f(1))$ 肯定不是曲线的拐点, 因 $f''(x)$ 在 $x = 1$ 的两侧没有改变符号.

【分析 2】 由前面分析知, $f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 为凹函数, 直接由凹函数的特征知, $f(x) > f(1) + f'(1)(x-1) = f(1) (x \in (1-\delta, 1+\delta), x \neq 1)$. 选(B).

【分析 3】 特殊选取 $f(x)$ 满足: $f''(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$,

取 $f(x) = \frac{1}{24}(x-1)^4$, 则 $f(x)$ 满足题中条件, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极小值, 而其余均不正确. 因此选(B).

46 【答案】 B

【分析 1】 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, $f''(x_0)$ 不一定存在, 所以不选(A).

拐点是函数的局部性质, $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 只能保证在 x_0 的一个邻域内, $y = f(x)$ 的凹凸性相反, 所以不选(D). 曲线 $y = -f(x)$ 与 $y = f(x)$ 关于 x 轴对称, $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 不能保证 $(-x_0, -f(-x_0))$ 是 $y = -f(x)$ 的拐点. 例如 $y = f(x)$

$= (x-1)^3$, 只有拐点 $(1, 0)$, 但 $(-1, -f(-1))$ 不是 $y = -f(x) = -(x-1)^3$ 的拐点. 所以不选(C). 因此选(B).

【分析 2】 从几何上分析也很简单, $y = f(x)$ 与 $y = -f(-x)$ 的图形关于原点对称.

$x_0 \neq 0, (x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点 $\Rightarrow (-x_0, -f(x_0))$ 是 $y = -f(-x)$ 的拐点. 因此选(B).

47 【答案】 D

【分析 1】 若在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 则一定有 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, 但可导函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加, 只能有 $f'(x) \geq 0$ (即可能在某些点上 $f'(x) = 0$), 例如 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, $f'(0) = 0$. 因此不选(A).

$f(x)$ 若在 x_0 处取得极值, 且 $f'(x_0)$ 存在, 则有 $f'(x_0) = 0$, 但当 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 在 x_0 处不可导, 就得不到 $f'(x_0) = 0$, 例如 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处取得极小值, 它在 $x_0 = 0$ 处不可导, 因此不选(B).

如果 $f(x)$ 在 x_0 处二阶导数存在, 且 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点坐标, 则 $f''(x_0) = 0$, 反之不一定, 例如 $f(x) = x^4$ 在 $x_0 = 0$ 处 $f''(0) = 0$, 但 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 没有拐点, 因此不选(C). 由上分析, 应选(D).

【分析 2】 可以证明(D)是正确的.

不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 由带佩亚诺余项的泰勒公式得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 +$$

$$\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^3 \left[\frac{1}{3!}f'''(x_0) + o(1) \right]$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时 $o(1)$ 为无穷小量.

由极限的保号性质 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, $\frac{1}{3!}f'''(x_0) + o(1) > 0$

$\Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0$ 时 $f(x) - f(x_0) < 0$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时 $f(x) - f(x_0) > 0$. 因此 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

【评注】 可以证明满足(D)的条件的点 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点. 不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 写出 $f''(x)$ 的带佩亚诺余项的泰勒公式

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0)) \\ &= (x-x_0)[f'''(x_0) + o(1)] \quad (x \rightarrow x_0) \end{aligned}$$

由极限的保号性质 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, $f'''(x_0) + o(1) > 0$

$\Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0$ 时 $f''(x) < 0$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时 $f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ 在 $x = x_0$ 两侧 $f(x)$ 的凹凸性相反

$\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点.

48 【答案】 C

【分析】 只须考察 $f''(x) = 0$ 的点与 $f''(x)$ 不存在的点.

$f''(x_1) = f''(x_4) = 0$, 在 $x = x_1, x_4$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 故凹凸性相反, $\Rightarrow (x_1, f(x_1)),$

$(x_4, f(x_4))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点.

$x = 0$ 处 $f''(0)$ 不存在, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 因此 $(0, f(0))$ 也是 $y = f(x)$ 的拐点.

虽然 $f''(x_3) = 0$, 但在 $x = x_3$ 两侧 $f''(x) > 0$, $y = f(x)$ 是凹的. $(x_3, f(x_3))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点. 因此总共有三个拐点. 选(C).

49 【答案】 C

【分析】 只须考察 $f''(x) = 0$ 的点, 这里就是 $f'(x)$ 的驻点, 即 $x = x_1, x_3, x_6$, 与 $f''(x)$ 不 $\exists$ 的点, 这就是 $f'(x)$ 的尖点 x_4 .

在 $x = x_1, x_6$ 两侧 $f'(x)$ 的单调性相反, 故凹凸性相反 $\Rightarrow (x_1, f(x_1)), (x_6, f(x_6))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 在 $x = x_3$ 处, 虽 $f''(x_3) = 0$, 但 $x = x_3$ 两侧 $f'(x)$ 均单调上升即 $x = x_3$ 两侧 $y = f(x)$ 均是凹的, $(x_3, f(x_3))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点. 虽然 $f''(x_4)$ 不 $\exists$, 但 $f(x)$ 在 $x = x_4$ 连续, 在 $x = x_4$ 两侧 $f'(x)$ 的单调性相反, 故凹凸性相反, $(x_4, f(x_4))$ 也是 $y = f(x)$ 的拐点. 因此共有三个拐点. 选(C).

50 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2-2x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 (x > 1) \end{aligned}$$

又 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 为常数.

选(C).

51 【答案】 A

【分析】 只有间断点 $x = -3$, 又 $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = +\infty \Rightarrow x = -3$ 是垂直渐近线. $x > 0$ 时

$$\begin{aligned} y &= 1 - x + x \sqrt{\frac{x}{3+x}} = 1 + x \left(\sqrt{\frac{x}{3+x}} - 1 \right) = 1 + x \frac{\frac{x}{3+x} - 1}{\sqrt{\frac{x}{3+x}} + 1} \\ &= 1 + \frac{x}{3+x} \cdot \frac{-3}{\sqrt{\frac{x}{3+x}} + 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } y = -\frac{1}{2} \text{ 是水平渐近线 } (x \rightarrow +\infty)$$

$x < 0$ 时

$$y = 1 - x - x \sqrt{\frac{x}{3+x}} = 1 - x \left(1 + \sqrt{\frac{x}{3+x}} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} - \left(1 + \sqrt{\frac{x}{3+x}} \right) \right] = -2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (y + 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + x \left(1 - \sqrt{\frac{x}{3+x}} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{x}{3+x} \cdot \frac{3}{1 + \sqrt{\frac{x}{3+x}}} \right] = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow y = -2x + \frac{5}{2}$ 是斜渐近线 ($x \rightarrow -\infty$)

选(A).

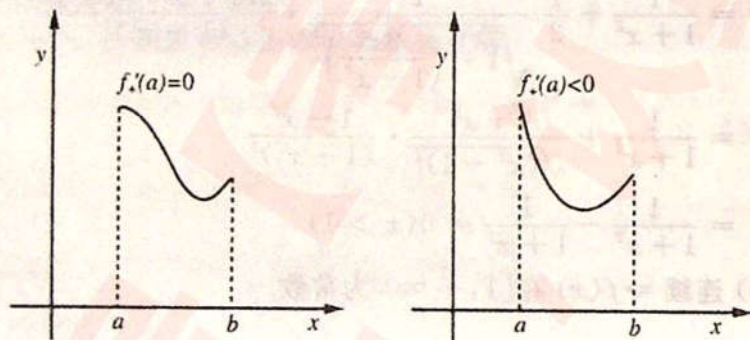
【评注】 同是 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$), 如果曲线有斜渐近线就不可能有水平渐近线, 如果曲线有水平渐近线, 就不可能有斜渐近线.

52 【答案】 D

【分析 1】 考察 $f'_+(a)$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0. \text{ 选(D).}$$

【分析 2】



由 $f'_+(a)$ 的几何意义可知, 应选(D).

【评注】 最值点处的导数性质:

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(c) = \max_{[a, b]} f(x)$ 或 $f(c) = \min_{[a, b]} f(x)$,

1° 若 $c \in (a, b)$, 则 $f'(c) = 0$.

2° 若 $c = a, f(a) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_+(a) \leq 0$,

$f(a) = \min_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_+(a) \geq 0$.

3° 若 $c = b, f(b) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_-(b) \geq 0$,

$f(b) = \min_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_-(b) \leq 0$.

53 【答案】 B

【分析】 设 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x \geq 1$, 考查 $f(x)$ 的单调性并求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 的最大值.

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x} \ln x})' = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0, 1 \leq x < e \\ = 0, x = e \\ < 0, x > e \end{cases}$$

于是 $1 \leq x \leq e$ 时 $f(x) \nearrow$, 当 $x \geq e$ 时 $f(x) \searrow$. 因此在 $x = e$ 两侧的数列项是 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$, $x = e$ 是 $f(x)$ 的最大值点.

比较 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 的值 $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$.

所以数列的最大项为 $\sqrt[3]{3}$. 选(B).

【评注】 不能对 $f(n) = n^{\frac{1}{n}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 求导, 因为数列没有导数概念.

54 【答案】 C

【分析】 令 $f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4) = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 4$ (不合题意舍去)
 $f(0) = b, f(-1) = -7a + b, f(2) = -16a + b$, 由于 $a > 0$; 所以, $f(0)$ 是最大值, $f(2)$ 是最小值.

$$\begin{cases} f(0) = b = 3 \\ f(2) = -16a + b = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

所以选(C).

55 【答案】 C

【分析 1】 点 $O(0,0)$ 与曲线 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 上任意点 $(x, \frac{1}{2\sqrt{x}})$ 的距离平方为

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{4x} \quad (x \in (0, +\infty))$$

$\Rightarrow$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{4x^2} = \frac{8x^3 - 1}{4x^2} = \frac{2(x^3 - \frac{1}{8})}{x^2} \begin{cases} < 0 & (0 < x < \frac{1}{2}) \\ = 0 & (x = \frac{1}{2}) \\ > 0 & (\frac{1}{2} < x < +\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \nearrow (x \in (0, \frac{1}{2}]), f(x) \searrow (x \in [\frac{1}{2}, +\infty)) \Rightarrow \min_{(0, +\infty)} f(x) = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

因此 $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 选(C).

【分析 2】 点 $O(0,0)$ 与 $\forall$ 点 (x,y) 的距离平方

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

求 $f(x,y)$ 在条件 $y - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ 下的最小值, 即 d^2 .

令 $F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - \frac{1}{2\sqrt{x}})$, 求驻点, 即解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \frac{1}{4}\lambda x^{-\frac{3}{2}} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = y - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由②、③得 $\lambda = -x^{-\frac{1}{2}}$, 代入①得

$$2x - \frac{1}{4}x^{-2} = 0, \text{ 即 } x^3 = \frac{1}{8}, x = \frac{1}{2}$$

相应地得 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 于是

$$d^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, d = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

选(C).

【分析 3】 原点 $O(0,0)$ 与曲线 $\Gamma: y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 上 $\forall$ 点间距离的最小值点为 M_0 , 则 $\overline{OM_0}$ 连线是 Γ 在 M_0 点的法线.

Γ 在 $\forall$ 点 $(t, \frac{1}{2\sqrt{t}})$ 的切线斜率是 $-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$, 在该点处的法线方程是

$$y = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t^{\frac{3}{2}}(x - t)$$

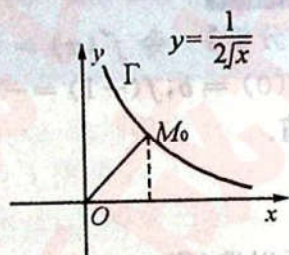
令 $x = 0, y = 0$, 得

$$\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{\frac{3}{2}} = 0, \text{ 即 } t^3 = \frac{1}{8}, t = \frac{1}{2}$$

曲线 Γ 在点 $M_0(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处的法线过原点. 因此

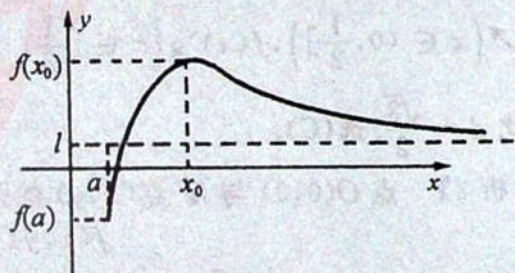
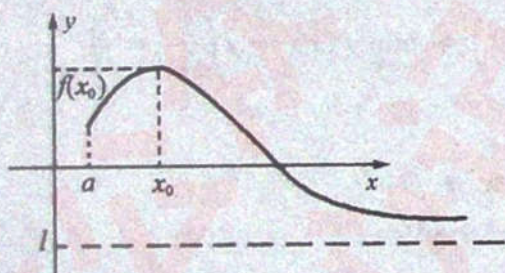
$$d = \overline{OM_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

选(C).



56 【答案】 D

【分析 1】 由题设 $y = f(x)$ 有两种可能的图形, 由图形可看出 $f(x)$ 的值域.



$f(a) > l$ 时 $f(x)$ 的值域是 $(l, f(x_0)]$; $f(a) \leq l$ 时 $f(x)$ 的值域是 $[f(a), f(x_0)]$. 因此选(D).

【分析 2】 因 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 单调上升 $\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(x_0) (a \leq x \leq x_0)$.

因 $f(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 单调下降且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow l < f(x) \leq f(x_0) (x_0 \leq x < +\infty)$.

现设 $f(a) \leq l$, 则

$$f(a) \leq f(x) \leq f(x_0) \quad (x \in [a, +\infty))$$

反之, 对 $\forall \mu \in [f(a), f(x_0)]$, 由连续函数介值定理,

至少存在一点 $x^* \in [a, x_0] \subset [a, +\infty)$, $f(x^*) = \mu$. 因此 $f(x)$ 相应的值域是 $[f(a), f(x_0)]$.

当 $f(a) > l$ 时, 则

$$l < f(x) \leq f(x_0) \quad (x \in [a, +\infty))$$

反之, 对 $\forall \mu \in (l, f(x_0)]$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < \mu < f(x_0)$, $\Rightarrow \exists x_1 > x_0, f(x_1) < \mu < f(x_0)$.

由连续函数介值定理 $\Rightarrow \exists x^* \in (x_0, x_1) \subset [a, +\infty)$, $f(x^*) = \mu$. 因此 $f(x)$ 相应的值域是 $(l, f(x_0)]$.

综上所述, 当 $f(a) \leq l$ 时 $f(x)$ 的值域是 $[f(a), f(x_0)]$, 当 $f(a) > l$ 时, $f(x)$ 的值域是 $(l, f(x_0)]$. 因此选(D).

【评注】 (1) **【分析 1】** 由几何直观选得正确选项, 这是选择题的一种特殊解法. **【分析 2】** 是论证性的方法.

(2) 在题设条件下, 我们还可知: $f(a) \leq l$ 时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 取最大值 $f(x_0)$, 最小值 $f(a)$. $f(a) > l$ 时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 取最大值 $f(x_0)$, 无最小值.

57 【答案】 C

【分析 1】 举例否定错误的命题.

$f(x) = \frac{1}{x-a}, f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$, 它们在 (a, b) 均连续且无界. (A)、(B) 不正确.

$f(x) = \sqrt{x-a}$ 在 (a, b) 有界, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ 在 (a, b) 无界. (D) 不正确. 应选(C).

【分析 2】 联系 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的是拉格朗日中值定理. 取定 $x_0 \in (a, b)$, 则由拉格朗日中值定理知, 对 $\forall x \in (a, b)$, $\exists \xi$ 在 x 与 x_0 之间使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

于是

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f'(\xi)| |x - x_0| \leq |f(x_0)| + M |b - a| \quad (x \in (a, b))$$

其中 $|f'(x)| \leq M (x \in (a, b))$. 因此 $f(x)$ 在 (a, b) 有界. 选(C).

58 【答案】 D

【分析】 设 $f(x) = x$, 则 $f'(x) = 1$ 在 $(a, +\infty)$ 有界, 但 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 无界.

设 $f(x) = \sin x^2$, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有界, 但 $f'(x) = 2x \cos x^2$ 在 $(a, +\infty)$ 无界.

($x_n = \sqrt{n\pi}$ 时 $f'(x_n) = 2\sqrt{n\pi} \cos n\pi = (-1)^n 2\sqrt{n\pi} \rightarrow \infty$). 因此选(D).

【评注】 此题说明, 在无穷区间上可导函数 $f(x)$ 的有界性与 $f'(x)$ 的有界性无确定性的关系. 但在有界区间 (a, b) 上, 前题说明 $f'(x)$ 的有界性保证了 $f(x)$ 的有界性, 反之则不一定.

59 【答案】 D

【分析 1】 举反例说明(A)、(B)、(C) 都不成立, 由排除法, 说明(D) 成立.

例 1 $f(x) = x, f'(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$,

因此(A)、(C) 不成立.

例 2 $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$,

因此(B) 不成立.

由例 1、例 2 可知选择(D).

【分析 2】 利用拉格朗日中值定理证明(D) 是正确的.

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则存在 x_0 , 当 $x > x_0$ 时恒有 $f'(x) > 1$, 因此当 $x > x_0$ 时

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \in (x_0, x))$$

因此

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) > f(x_0) + (x - x_0) \quad (x > x_0)$$

因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x_0) + (x - x_0)] = +\infty$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

【评注】 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 则存在 $x_0 < 0$, 当 $x < x_0$ 时, 有 $f'(x) < -1$, 当 $x < x_0$ 时

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \in (x, x_0)) \\ &= |f'(\xi)| |x - x_0| \geq |x - x_0| \end{aligned}$$

$f(x) \geq |x - x_0| + f(x_0)$, 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [|x - x_0| + f(x_0)] = +\infty$ 有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, 因此, 应有结论:

当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ 时有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ 而不是(B).

(2) 类似可证:

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A > 0 (< 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$.

若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = B < 0 (> 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$.

60 【答案】 B

【分析】 将(A)、(B) 分别改写成

$$(A) \frac{f(x)}{x} > \frac{f(a)}{a}, (B) \frac{f(x)}{x} > \frac{f(b)}{b}$$

于是, 若能证明 $\frac{f(x)}{x}$ 或 $xf(x)$ 的单调性便可选得结论.

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2},$$

令 $g(x) = xf'(x) - f(x) \Rightarrow g(0) = 0$,

$$g'(x) = xf''(x) < 0 \quad (x > 0)$$

$\Rightarrow g(x) < 0 \quad (x > 0)$

$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' < 0 \quad (x > 0)$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调下降.

当 $a < x < b$ 时, $\frac{f(x)}{x} > \frac{f(b)}{b}$

选(B).

61 【答案】 A



【分析 1】 为考察 $f(x)$ 与 x 之间的关系, 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F'(x) = f'(x) - 1$, $F'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 单调减少, $F'(1) = 0$, $F(1) = 0$.

当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时 $F'(x) > F'(1) = 0$, 因此 $F(x)$ 在 $(1-\delta, 1]$ 内单调递增, $F(x) < F(1) = 0$, 即在 $(1-\delta, 1)$, $F(x) < 0$.

当 $x \in (1, 1+\delta)$ 时, $F'(x) < F'(1) = 0$, 因此 $F(x)$ 在 $[1, 1+\delta)$ 内单调递减, $F(x) < F(1) = 0$, 即在 $(1, 1+\delta)$ 内 $F(x) < 0$. 因此, 选(A).

【分析 2】 $f'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 严格单调减少 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 是凸的 $\Rightarrow$ 在此区间上, $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 即 $(1, 1)$ 处的切线 $y - 1 = f'(1)(x - 1)$ 即 $y = x$ 在此曲线的上方(除切点外). 因此

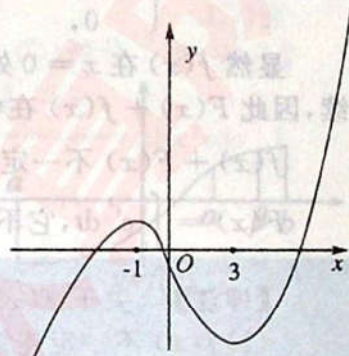
$$f(x) < x \quad (x \in (1-\delta, 1+\delta), x \neq 1).$$

62 【答案】 C

【分析】 (1) 考查 $f(x)$ 的单调性区间.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$= 3(x-3)(x+1) \begin{cases} > 0, & (x < -1), \\ = 0, & (x = -1), \\ < 0, & (-1 < x < 3), \\ = 0, & (x = 3), \\ > 0, & (x > 3), \end{cases}$$



$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$, $[3, +\infty)$ 单调上升, 在 $[-1, 3]$ 单调下降.

(2) 极值点处函数值符号 $f(-1) = 1 > 0$, $f(3) < 0$

(3) 边界处极限值 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

综上分析, $y = f(x)$ 的图形如图所示. 当 $x \in (-\infty, -1]$ 时 $f(x)$ 单调上升, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 与 $f(-1)$ 异号, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 有唯一零点.

当 $x \in [-1, 3]$ 时 $f(x)$ 单调下降, $f(-1)$ 与 $f(3)$ 异号, $f(x)$ 在 $(-1, 3)$ 有唯一零点.

当 $x \in [3, +\infty)$ 时 $f(x)$ 单调上升, $f(3)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 异号.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 存在唯一零点 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在 3 个零点. 选(C).

63 【答案】 C



【分析】 设 $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为偶函数, 因此只须讨论 $x \geq 0$ 时的情形, $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, 且 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) = x(2 - \cos x) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 只有一个唯一实根, 于是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有两个实根. 选(C).

64 【答案】 B

【分析】 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, $(1, 2)$ 内可导且 $F(1) = F(2)$, 由罗尔定理, 至少存在一点 $x_0 \in (1, 2]$ 使 $F'(x_0) = 0$, 又 $F'(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2 f'(x) \Rightarrow F'(x_0) = F'(1) \Rightarrow F'(x)$ 在 $[1, x_0]$ 上满足罗尔定理条件, 所以, 至少存在 $\xi \in (1, x_0) \subset (1, 2)$ 上使 $F''(\xi) = 0$. 因此选(B).

由题设,无法判断 $F'(x)$ 的单调性,也无法判定除 $x_0, x=1$ 以外 $F'(x)$ 是否还有零点,因此不选(C)和(D).

【评注】 关于判断导函数零点的问题,常常利用罗尔定理.

65 【答案】 C

【分析 1】 因 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数,所以 $F'(x) = f(x)$,因此 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续,于是 $F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数,从而 $f(x) + F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数.因此选(C).

【分析 2】 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, $f(x)$ 在 (a, b) 上可不连续,例如

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, 又因 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 因此 $F(x) + f(x)$ 在 (a, b) 不连续, 所以不选(B) 从而也不选(A).

$f(x) + F(x)$ 不一定是初等函数, 例如 $f(x) = e^{x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在一个原函数 $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 它不是初等函数 $\Rightarrow F(x) + f(x)$ 不是初等函数, 因此不选(D).

【评注】 关于 $f(x)$ 在 (a, b) 上有原函数 $F(x)$, 要注意以下几点: 在 (a, b) 上

- (1) $f(x)$ 不一定连续;
- (2) $f(x)$ 不一定是初等函数;
- (3) $F(x)$ 不一定是初等函数;
- (4) 由原函数定义, $F'(x) = f(x)$, 因而 $F(x)$ 连续.

66 【答案】 A

【分析 1】 由积分中值定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (x, x+\Delta x)$ 使得

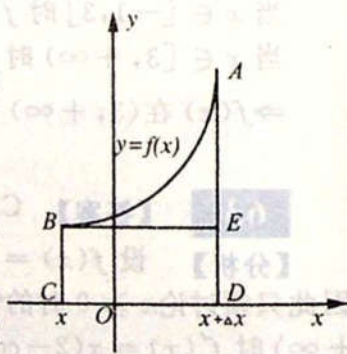
$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x > f(x) \Delta x > 0 \quad (f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ 是单}$$

调增加的).

因此选(A).

【分析 2】 由定积分的几何意义来分析, 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方且单调增加.

$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$ 是曲边梯形 ABCD 的面积, $f(x) \Delta x$ 是矩形 BCDE



的面积, 因此

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt > f(x) \Delta x > 0.$$

选(A).

67 【答案】 C

【分析】 由题目的设置可知, 这四个命题中有两个是正确的, 两个是错误的.

【方法 1】 由“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ ”可得“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, 因此, 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则 $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 连续, 即 ② 正确.

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 只有有限个间断点, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 也有界, 也只有有限个间断点 (因 $f(x)$ 的连续点必是 $|f(x)|$ 的连续点), 因而 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 可积即 ④ 正确. 选 (C).

【方法 2】 ① 是不正确的, 例如, $f(x) = \begin{cases} 1, & (x > 0), \\ -1, & (x \leq 0). \end{cases}$ 在 $x = 0$ 间断, 但 $f^2(x) = 1$ 在

$x = 0$ 连续. ③ 也是错的, 例如 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ 为有理数}) \\ -1 & (x \text{ 为无理数}) \end{cases}$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 不存在 (易构造两个积分和有不同极限), 但 $|f(x)| = 1$ 在 $[a, b]$ 可积. 因此, 只能是 ②、④ 正确, 选 (C).

68

【答案】 C

【分析】 我们要逐一分析.

结论 ① 正确. 由条件 $\Rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 (\forall x \in [a, b])$

$\Rightarrow (\int_a^x f(t) dt)' = f(x) = 0 (x \in [a, b])$

结论 ② 正确. 由条件 $\Rightarrow$

$$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(x) dx = 0 (\forall x \in [a, b])$$

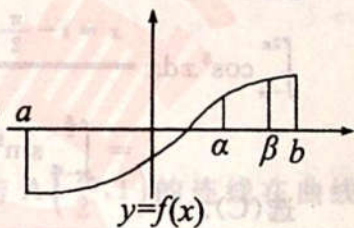
$$\Rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 (x \in [a, b]) \Rightarrow f(x) = 0 (x \in [a, b]).$$

结论 ③ 错误. 如图所示, 由定积分几何意义知,

$$\int_a^\beta f(x) dx < 0, \int_\alpha^b f(x) dx > 0,$$

其中 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

因此选 (C).



【评注】 结论 ①、② 的证明也可用反证法.

若 $f(x) \not\equiv 0 (x \in [a, b])$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f(x_0) > 0$, 由连续性

$\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ 时 $f(x) > 0$

$$\Rightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > 0$$

与 ① 中 $[a, b]$ 的 $\forall$ 子区间 $[\alpha, \beta]$ 上 $\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0$ 矛盾了, 因此只能是

$$f(x) = 0 (\forall x \in [a, b]).$$

在 ② 中此时

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > 0 \end{aligned}$$

与 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 矛盾了. 因此 $f(x) = 0 (\forall x \in [a, b])$.

由题设,无法判断 $F'(x)$ 的单调性,也无法判定除 $x_0, x=1$ 以外 $F'(x)$ 是否还有零点,因此不选(C)和(D).

【评注】 关于判断导函数零点的问题,常常利用罗尔定理.

65 【答案】 C

【分析 1】 因 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数,所以 $F'(x) = f(x)$, 因此 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续,于是 $F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数,从而 $f(x) + F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数. 因此选(C).

【分析 2】 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, $f(x)$ 在 (a, b) 上可不连续,例如

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, 又因 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 因此 $F(x) + f(x)$ 在 (a, b) 不连续, 所以不选(B) 从而也不选(A).

$f(x) + F(x)$ 不一定是初等函数, 例如 $f(x) = e^{x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在一个原函数 $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 它不是初等函数 $\Rightarrow F(x) + f(x)$ 不是初等函数, 因此不选(D).

【评注】 关于 $f(x)$ 在 (a, b) 上有原函数 $F(x)$, 要注意以下几点: 在 (a, b) 上

- (1) $f(x)$ 不一定连续;
- (2) $f(x)$ 不一定是初等函数;
- (3) $F(x)$ 不一定是初等函数;
- (4) 由原函数定义, $F'(x) = f(x)$, 因而 $F(x)$ 连续.

66 【答案】 A

【分析 1】 由积分中值定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (x, x + \Delta x)$ 使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x > f(x) \Delta x > 0 \quad (f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ 是单}$$

调增加的).

因此选(A).

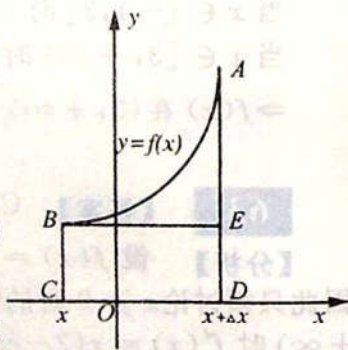
【分析 2】 由定积分的几何意义来分析, 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方且单调增加.

$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$ 是曲边梯形 $ABCD$ 的面积, $f(x) \Delta x$ 是矩形 $BCDE$

的面积, 因此

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt > f(x) \Delta x > 0.$$

选(A).



67 【答案】 C

【分析】 由题目的设置可知, 这四个命题中有两个是正确的, 两个是错误的.

【方法 1】 由“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ ”可得“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, 因此, 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则 $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 连续, 即 ② 正确.

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 只有有限个间断点, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 也有界, 也只有有限个间断点 (因 $f(x)$ 的连续点必是 $|f(x)|$ 的连续点), 因而 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 可积即 ④ 正确. 选 (C).

【方法 2】 ① 是不正确的, 例如, $f(x) = \begin{cases} 1, & (x > 0), \\ -1, & (x \leq 0). \end{cases}$ 在 $x = 0$ 间断, 但 $f^2(x) = 1$ 在

$x = 0$ 连续. ③ 也是错的, 例如 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ 为有理数}) \\ -1 & (x \text{ 为无理数}) \end{cases}$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 不存在 (易构造两个积分和有不同的极限), 但 $|f(x)| = 1$ 在 $[a, b]$ 可积. 因此, 只能是 ②、④ 正确, 选 (C).

68 【答案】 C

【分析】 我们要逐一分析.

结论 ① 正确. 由条件 $\Rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 (\forall x \in [a, b])$

$\Rightarrow (\int_a^x f(t) dt)' = f(x) = 0 (x \in [a, b])$

结论 ② 正确. 由条件 $\Rightarrow$

$$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(x) dx = 0 (\forall x \in [a, b])$$

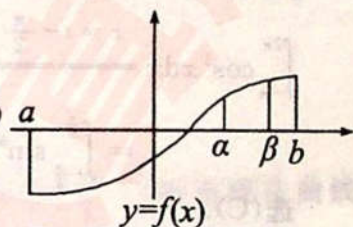
$\Rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 (x \in [a, b]) \Rightarrow f(x) = 0 (x \in [a, b]).$

结论 ③ 错误. 如图所示, 由定积分几何意义知,

$$\int_a^b f(x) dx < 0, \int_a^\beta f(x) dx > 0,$$

其中 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

因此选 (C).



【评注】 结论 ①、② 的证明也可用反证法.

若 $f(x) \not\equiv 0 (x \in [a, b])$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f(x_0) > 0$, 由连续性

$\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ 时 $f(x) > 0$

$$\Rightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > 0$$

与 ① 中 $[a, b]$ 的 $\forall$ 子区间 $[\alpha, \beta]$ 上 $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ 矛盾了, 因此只能是

$$f(x) = 0 (\forall x \in [a, b]).$$

在 ② 中此时

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > 0 \end{aligned}$$

与 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 矛盾了. 因此 $f(x) = 0 (\forall x \in [a, b])$.

69 【答案】 C

【分析 1】 (A) $x^7 \sin^9 x$ 是偶函数

$$\int_{-1}^1 x^7 \sin^9 x dx = 2 \int_0^1 x^7 \sin^9 x dx > 0.$$

(B) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数

$$\left(\ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)$$

$\Rightarrow x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为偶函数

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = 2 \int_0^1 x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx > 0$$

$$(D) \int_{-\pi}^{2\pi} \sin^5 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x dx = \int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x dx < 0.$$

选(C).

【分析 2】 分析(C)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{2\pi} \cos^5 x dx & \xrightarrow{x=t-\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}} \cos^5(t-\frac{\pi}{2}) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt \\ & = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 t dt = 0. \end{aligned}$$

选(C).

【评注】 (1)【分析 1】中除了用到奇偶函数积分性质外,判断定积分的符号用到如下结论:设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且 $f(x) \geq 0, \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$.

(2)【分析 2】中还用到周期函数的积分性质: $f(x)$ 在 $[0, T]$ 可积, $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx$ 与 a 无关.

70 【答案】 B

【分析】 由 $\sin x \leq x \Rightarrow \sin(\sin x) \leq \sin x (x \in [0, \frac{\pi}{2}])$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \text{ 即 } I < 1.$$

又

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) dx & \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos(\cos(\frac{\pi}{2}-t)) dt \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t) dt > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1, \text{ 即 } J > 1. \end{aligned}$$

因此 $I < 1 < J$.

选(B).

71 【答案】 B

【分析 1】 已知 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x < x$,

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx = I_2$$

现再考察 $\frac{\sin x}{x}$ 的单调性

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$\text{令 } g(x) = x \cos x - \sin x \Rightarrow g'(x) = -x \sin x < 0 \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}])$$

$$\text{又 } g(0) = 0 \Rightarrow g(x) < 0 \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}]) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \text{ 在 } (0, \frac{\pi}{2}] \text{ 单调下降}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} = \frac{\sin x}{x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} < \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}])$$

$$\Rightarrow 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = I_1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$$

因此 $I_2 > I_1 > 1$. 选(B).

【分析 2】 同前已证 $I_1 < I_2$.

由于 $y = \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 是凸函数. 由凸函数的性质知, O 与 $A(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的连线在曲线 $y = \sin x$ 的下方 ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$) $\Rightarrow$

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}))$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}))$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1. \text{ 因此选(B).}$$

72 【答案】 B

【分析】 直接求出定积分办不到. 我们用适当放大缩小法.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \leq 3^{\frac{1}{2n}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{2n}} = 1$, 由夹逼定理 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

选(B).

73 【答案】 C

【分析】 $\frac{d}{dx} \int_{\cos^2 x}^{2x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{1+4x^6}} (2x^3)' - \frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}} (\cos^2 x)'$

$$= \frac{6x^2}{\sqrt{1+4x^6}} + \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$$

选(C).



74 【答案】 D

【分析】 这是讨论原函数的存在性问题. 我们知道, 若 $F(x)$ 在 (a, b) 连续, 则 $F(x)$ 在 (a, b) 一定存在原函数, 这里 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 连续, 所以 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 存在原函数.

余下的是 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 是否存在原函数($x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点).

方法1 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 的原函数为 $\frac{1}{3}x^3 + C_1$, 在 $(-1, 0)$ 的原函数为 $\sin x + C_2$, 在 $x=0$ 处该原函数必连续:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{3}x^3 + C_1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + C_2)$$

$\Rightarrow C_1 = C_2$. 若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 存在原函数则应是

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & 0 \leq x < 1, \\ \sin x + C_1, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

但此 $F(x)$ 在 $x=0$ 不可导, 因为

$$F'_+(0) = \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right)' \Big|_{x=0} = 0, F'_-(0) = (\sin x + C_1)' \Big|_{x=0} = 1,$$

$$F'_+(0) \neq F'_-(0).$$

因此 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 不存在原函数. 选(D).

方法2 因 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 有第一类间断点 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 不存在原函数. 选(D).

【评注】 (1) 设 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ (或 $(x_0 - \delta, x_0)$) 可导, 在 x_0 右(左)连续, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A$) $\Rightarrow f'_+(x_0) = A$ ($f'_-(x_0) = A$)

$$\text{证明: } f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, $x_0 \in (a, b)$ 是 $f'(x)$ 的间断点, 则 x_0 只能是 $f'(x)$ 的第二类间断点.

证明 若同时存在

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A_+, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A_-$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) = A_+, f'_-(x_0) = A_-$$

由 $f'(x_0) \exists$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

$\Rightarrow f'(x)$ 在 $x = x_0$ 连续. 与已知条件矛盾.

由导函数的这一性质立即得出, 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在第一类间断点, 则它不存在原函数.

75 【答案】 B

【分析 1】 先求出 $F(x)$, 再判断.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时 } F(x) = \int_0^x \sqrt{4+t} dt = \frac{2}{3}[(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8]$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时 } F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时 } F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t} dt = \frac{2}{3}[1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}],$$

所以

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}[(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8], & x \geq 0 \\ \frac{2}{3}[1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}], & x \leq 0 \end{cases}$$

(这里 $F(x)$ 在 $x=0$ 处自然连续拼接).

$$F'_+(0) = \left(\frac{2}{3}[(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8] \right)' \Big|_{x=0} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}(4+x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} = 2$$

$$F'_-(0) = \left(\frac{2}{3}[1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}] \right)' \Big|_{x=0} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} = 1$$

 $F'_+(0) \neq F'_-(0)$, $F(x)$ 在 $x=0$ 不可导. 选(B).

【分析 2】 不必求出 $F(x)$. 利用已知结论来判断: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 可导且 $F'(x) = f(x)$ ($x \in [a, b]$), x_0 是 $[a, b]$ 某定点. (这里端点 a, b 当然是单侧导数, 即 $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$).

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{4+t} dt (x \geq 0), \sqrt{4+t} \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 连续} \Rightarrow$$

$$F'_+(0) = \sqrt{4+x} \Big|_{x=0} = 2$$

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t} dt (x \leq 0), \sqrt{1-t} \text{ 在 } (-\infty, 0] \text{ 连续} \Rightarrow$$

$$F'_-(0) = \sqrt{1-x} \Big|_{x=0} = 1$$

 $\Rightarrow F'_+(0) \neq F'_-(0)$, $F(x)$ 在 $x=0$ 不可导, 选(B).

【评注】 定积分的一个性质:

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积且除去有限个点外, $f(x) = g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

因此 $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sqrt{4+t} dt (x \geq 0)$, 这里 $f(x) = \sqrt{4+x} (x > 0)$, 但 $f(0) \neq \sqrt{4+0}$.

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sqrt{1+t} dt (x \leq 0)$$

这里 $f(x) = \sqrt{1-x} (x < 0)$, 但 $f(0) \neq \sqrt{1-0}$.

76 【答案】 B

【分析 1】 因

$$\int f(x) dx = \int_0^x f(t) dt + C, C \text{ 为 } \forall \text{ 常数},$$

当 $f(x)$ 为偶函数时, $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数, 仅当 $C = 0$ 时 $\int_0^x f(t) dt + C$ 才是奇函数. 因此, $f(x)$ 为偶函数时, $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 只有唯一的一个原函数为奇函数, 即 $\int_0^x f(t) dt$. (B) 是错误的, 选(B).

【分析 2】 因

$$\int f(x) dx = \int_0^x f(t) dt + C, C \text{ 为 } \forall \text{ 常数},$$

当 $f(x)$ 为奇函数时 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数 $\Rightarrow$ 对 $\forall$ 常数 C , $\int_0^x f(t) dt + C$ 也是偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-a, a]$ 的全体原函数均是偶函数 $\Rightarrow$ (A) 正确.

当 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 以 T 为周期时,

$$\int_0^x f(t) dt \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t) dt = 0.$$

当 $f(x)$ 又是奇函数时

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$$

$\Rightarrow \int_0^x f(t) dt$ 以 T 为周期. (C) 是正确的.

现考察(D). $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt \exists \Rightarrow$ 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{nT} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \int_0^T f(t) dt) \exists$
 $\Rightarrow \int_0^T f(t) dt = 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt$ 也以 T 为周期. (D) 正确. 因此选(B).

77 【答案】 D

【分析】 先改写

$$F(x) = -\frac{1}{3} \int_0^x f(x^3 - t^3) d(x^3 - t^3)$$

$$\stackrel{s = x^3 - t^3}{=} -\frac{1}{3} \int_{x^3}^0 f(s) ds = \frac{1}{3} \int_0^{x^3} f(s) ds$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \int_0^{x^3} f(s) ds}{\frac{1}{6} x^6} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) 3x^2}{6x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0) = 2 \end{aligned}$$

其中

$$g(x) \sim \frac{1}{6} x^6 \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0).$$

因此, 选(D).

78 【答案】 A

【分析】 考察 $F(x) \stackrel{\text{记}}{=} \int_0^x f(t) dt - \int_0^1 xf(t) dt$

$\Rightarrow F'(x) = f(x) - \int_0^1 f(t) dt$ 在 $[0, 1]$ 连续且 $F''(x) = f'(x) < 0 (x \in (0, 1))$

$\Rightarrow F'(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调下降.

又 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (0, 1), F'(\xi) = 0 \Rightarrow$

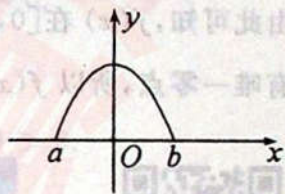
$$F'(x) \begin{cases} > 0 & (0 < x < \xi) \\ = 0 & (x = \xi) \\ < 0 & (\xi < x < 1) \end{cases}$$

$\Rightarrow F(x) > F(0) = 0 (x \in (0, \xi))$

$\Rightarrow F(x) > F(1) = 0 (x \in [\xi, 1))$

$\Rightarrow F(x) > 0 (x \in (0, 1))$. 选(A).

【评注】 该题的分析中, 实质上已证明了如下结论: 设 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 为凸函数, 且 $F(a) = F(b) = 0$, 则 $F(x) > 0 (x \in (a, b))$.

**79 【答案】 C**

【分析】 为了用 $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ 时 $f(x)$ 的条件, 将积分 $\int_0^a f(x) dx$ 分段积分:

$$I = \int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx$$

对第二个定积分作变量替换 $t = a - x (x = a - t)$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx &= - \int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t) dt = \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t) dt \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x) dx \end{aligned}$$

因此 $I = \int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) + f(a-x)] dx = 0$

选(C).

80 【答案】 C

【分析】 已知: $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 单调增加

$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0 (x \in (a, b))$, 在 (a, b) 的 $\forall$ 子区间内 $g'(x) \neq 0$. 因此 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ (它在 $[a, b]$ 可导) 在 $[a, b]$ 单调增加 $\Leftrightarrow F'(x) = f(x) \geq 0 (x \in (a, b))$ 且在 (a, b) 的 $\forall$ 子区间内 $F'(x) = f(x) \neq 0$. 因此选(C).

81 【答案】 D

【分析】 $f(x)$ 为连续的偶函数, $f(0) = 1$, 故只需讨论 $(0, 2\pi)$ 内零点的个数. 用单调性分析方法. 先考察

$$f'(x) = x \cos x \begin{cases} > 0 & (0 < x < \frac{\pi}{2}) \\ = 0 & (x = \frac{\pi}{2}) \\ < 0 & (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi) \\ = 0 & (x = \frac{3}{2}\pi) \\ > 0 & (\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上 ↗, 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ 上 ↘, 在 $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ 上 ↗. 又

$$f(0) = 1, f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, f(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{3}{2}\pi, f(2\pi) = 1,$$

由此可知, $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 无零点, 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ 和 $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ 均单调且端点函数值异号, 因而各有唯一零点, 所以 $f(x)$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 内共有 4 个零点.



82 【答案】 D

【分析】 先求

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} f(0) = 0 = \varphi(0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

$x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{x^3 f(x) - 2x \int_0^x t f(t) dt}{x^4} = \frac{f(x)}{x} - \frac{2 \int_0^x t f(t) dt}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^3} \\ &= f'(0) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{3x^2} = f'(0) - \frac{2}{3} f'(0) = \frac{1}{3} f'(0) \Rightarrow \varphi'(0) = \frac{1}{3} f'(0) \end{aligned}$$

且 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 选(D).

【评注】 用到如下结论: 设 $F(x)$ 在 $x = a$ 连续, 在 $x = a$ 空心邻域可导且

$$\lim_{x \rightarrow a} F'(x) = A$$

则 $F'(a) = A$. (因此 $F'(a)$ 存在且 $F'(x)$ 在 $x = a$ 连续).

83 【答案】 B

【分析 1】 已知若 $g(x)$ 在 $[-a, a]$ 连续为奇函数, 则 $\int_0^x g(t) dt$ 一定是偶函数. 在这四个选项中, 函数 $g(x) = x[f(x) + f(-x)]$ 满足

$$g(-x) = -x[f(-x) + f(x)] = -g(x)$$

为奇函数. 因此选(B).

【分析 2】 取 $f(x) = x$, 则相应的

$$(A) \int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt = \int_0^x 2t^2 dt = \frac{2}{3}x^3$$

$$(C) \int_0^x f(t^2)dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$$

$$(D) \int_0^x [f(t)]^2 dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$$

均为奇函数, 故不能选(A)、(C)、(D). 因此, 应选(B).

84 【答案】 C

【分析】 $F'(x) = (x^2 \int_0^x f(t)dt)' = x^2 f(x) + 2x \int_0^x f(t)dt, F'(0) = 0.$

$$F''(x) = x^2 f'(x) + 4xf(x) + 2 \int_0^x f(t)dt, F''(0) = 0.$$

$$F^{(3)}(x) = x^2 f''(x) + 6xf'(x) + 6f(x), F^{(3)}(0) = 6f(0) > 0.$$

因此 $(0, F(0))$ 是 $y = F(x)$ 的拐点, 且 $F(0)$ 不是极值, 选(C).

【评注】 (1) 特殊选取 $f(x) = 1$, 则 $f(x)$ 满足题中条件, 易得相应的 $F(x) = x^3$. 故应选(C).

(2) 有一般性结论: 设 $f(x)$ 是可导函数, $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $x = x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

85 【答案】 B

【分析 1】 本题的关键是判断 $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 上的符号.

由 $f'(0) = 0$ 又因 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调增加, 因此在 $(-\delta, 0)$ 和 $(0, \delta)$ 上分别有 $f'(x) < 0$ 和 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 上单调减少, 在 $(0, \delta)$ 上单调增加, 由于 $f(0) = 0$, 于是有在 $(-\delta, \delta)$ 上除 $f(0) = 0$ 外, 其他点 x 有 $f(x) > 0$, 从而 $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx > 0$, 因此选(B).

【分析 2】 由条件知, $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 是凹的 $\Rightarrow f(x) > f(0) + f'(0)x = 0, x \in (-\delta, \delta), x \neq 0 \Rightarrow I = \int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx > 0$, 选(B).

86 【答案】 B

【分析】 $a_n = 3 \cdot \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi+1}{n}} (1+x^{2n})^{\frac{1}{2}} d(1+x^{2n})$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{2}{3} (1+x^{2n})^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi+1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \left[\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = (1 + e^2)^{\frac{1}{2}} - 1$. 因此选(B).

87 【答案】 C

【分析】 $|\sin x|$ 以 π 为周期, 它在每个周期上的积分相等, 等于 $\int_0^\pi |\sin x| dx = 2$, 因此

$$\frac{\int_0^{n\pi} |\sin x| dx}{(n+1)\pi} = \frac{n \int_0^\pi |\sin x| dx}{(n+1)\pi} = \frac{2n}{(n+1)\pi},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} |\sin x| dx}{(n+1)\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{2}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

选(C).

【评注】 (1) 利用本题的方法, 再结合适当放大缩小法可求得函数极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}.$$

当 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$

$$2n = \int_0^{n\pi} |\sin x| dx \leq \int_0^x |\sin x| dx \leq \int_0^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = 2(n+1)$$

所以有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin x| dx}{x} \leq \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

注意, $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. 在上式中, 令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin x| dx}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

(2) 在本题的解答中, 要注意以下两点:

1° 如果 $f(x)$ 是以 T 为周期连续函数, 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$,

2° 当 $f(x) \geq 0$ 时, 当 $x > y > a$ 时就有 $\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^y f(t) dt$.

88 【答案】 A

【分析】 $I = \int_0^{100\pi} \sqrt{2\cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{100\pi} |\cos x| dx$, 被积函数以 π 为周期, 由周期函数的积分性质 $\Rightarrow$

$$I = \sqrt{2} \cdot 100 \int_0^\pi |\cos x| dx = \sqrt{2} \cdot 100 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx$$

$$= 200\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 200\sqrt{2}.$$

因此选(A).

89 【答案】 A

【分析】 因被积函数是以 π 为周期的函数, 它在每个周期上的积分值相等, 因此,

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) = \int_0^{\pi} \ln(1 + \cos^2 t) \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(1 + \cos^2 t) d\sin 2t \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 t) \sin 2t \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{2 \cos t (-\sin t)}{1 + \cos^2 t} \sin 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 2t}{1 + \cos^2 t} dt > 0 \quad (\text{因被积函数连续且大于等于零, 不恒为 } 0) \end{aligned}$$

所以选(A).

90 【答案】 A

【分析】 考察 $f(x+2\pi) - f(x) = \int_x^{x+2\pi} [e^{\cos t} - e^{-\cos t}] dt$ 被积函数以 2π 为周期且为偶函数, 由周期函数的积分性质得

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} [e^{\cos t} - e^{-\cos t}] dt = 2 \int_0^{\pi} [e^{\cos t} - e^{-\cos t}] dt \\ &\stackrel{t=\pi-u}{=} -2 \int_0^{\pi} (e^{\cos u} - e^{-\cos u}) du \end{aligned}$$

因此, $f(x+2\pi) - f(x) = 0$, 选(A).

【评注】 相似的方法是:

$g(t) = e^{\cos t} - e^{-\cos t}$ 是以 2π 为周期的连续函数, $f(x) = \int_0^x g(t) dt$, 考查

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= \int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} dt + \int_0^{2\pi} e^{\cos(\pi-t)} d(\pi-t) \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\cos t} dt - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos u} du = 0 \end{aligned}$$

于是 $f(x) = \int_0^x g(t) dt$ 是以 2π 为周期的周期函数, 即 $f(x) = f(x+2\pi)$. 选(A).

周期函数的积分性质:

$g(t)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $f(x) = \int_0^x g(t) dt$ 是 T 为周期的充要条件是

$$\int_0^T g(t) dt = 0.$$

91 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \int x f'(x) dx &= \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x(\sin x \ln |x|)' - \sin x \ln |x| + C \\ &= x(\cos x \ln |x| + \frac{\sin x}{x}) - \sin x \ln |x| + C \\ &= x \cos x \ln |x| + \sin x - \sin x \ln |x| + C \end{aligned}$$

其中 $\ln |x| = \begin{cases} \ln x, & (x > 0), \\ \ln(-x), & (x < 0). \end{cases} \Rightarrow (\ln |x|)' = \frac{1}{x},$

因此选(B).

【评注】若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$F'(x) = f(x), \int f(x) dx = F(x) + C, C \text{ 为 } \forall \text{ 常数.}$$

92 【答案】 B

【分析 1】 用分部积分法.

$$\begin{aligned} I &= -2 \int_0^1 x^4 d(1-x)^{\frac{1}{2}} = 8 \int_0^1 x^3 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{16}{3} \int_0^1 x^3 d(1-x)^{\frac{3}{2}} \\ &= 16 \int_0^1 x^2 (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{32}{5} \int_0^1 x^2 d(1-x)^{\frac{5}{2}} = \frac{64}{5} \int_0^1 x (1-x)^{\frac{5}{2}} dx \\ &= -\frac{64}{5} \cdot \frac{2}{7} \int_0^1 x d(1-x)^{\frac{7}{2}} = \frac{64}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{7}{2}} dx \\ &= \frac{64}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{256}{315}. \end{aligned}$$

【分析 2】 用三角函数替换. 令 $x = \sin^2 t$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^8 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot 2 \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt \\ &= 2 \times \frac{8!!}{9!!} = 2 \times \frac{8 \times 6 \times 4 \times 2}{9 \times 7 \times 5 \times 3} = \frac{256}{315}. \end{aligned}$$

选(B).

93 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } x_n &= \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2} \right] \end{aligned}$$

这是函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 上的一个积分和:

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{1}{n}$$

其中积分区间 $[0, 1]$ n 等分, n 等分后每个小区间是 $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ ($i=1, 2, \dots, n$), ξ_i 是区间的右端点. 因此

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \text{ 选(B).}$$

94 【答案】 B

【分析】 被积函数 $f(x) = x^n \ln^n x$ 虽在 $x=0$ 无定义, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln^n x = 0$, 若补充定义 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 因而 $\int_0^1 x^n \ln^n x dx$ 是定积分.

$$I_{n,m} = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln^m x dx^{n+1} = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^m x \Big|_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} m \ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{m}{n+1} \int_0^1 x^n \ln^{m-1} x dx = -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1}. \text{ 反复用此递推公式得}$$

$$I_{n,m} = \left(-\frac{m}{n+1}\right) \left(-\frac{m-1}{n+1}\right) I_{n,m-2}$$

$$= \left(-\frac{m}{n+1}\right) \left(-\frac{m-1}{n+1}\right) \left(-\frac{m-2}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{n+1}\right) I_{n,0}$$

$$= (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}, \text{ 其中 } I_{n,0} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

因此选(B).

【评注】 对 $\forall$ 常数 $\alpha > 0$ 与 β

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0.$$

【证明】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$

若 $\beta > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{\alpha}{\beta}} \ln x)^{\frac{1}{\beta}} = 0$

若 $\beta \leq 0$ 显然成立.

95

【答案】 C

【分析】 因 $\int_0^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx = \int_0^{+\infty} e^x \sin 2x dx = \frac{e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x)}{5} \Big|_0^{+\infty}$

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x)}{5}$ 不存在, 所以 $\int_0^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx$ 发散,

因此, $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx$ 发散. 选(C).

【评注】 (1) $\int e^x \sin 2x dx = \int \sin 2x de^x = e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx$

$$= e^x \sin 2x - 2 \int \cos 2x de^x = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4 \int e^x \sin 2x dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x)$$

(2) 令 $x = n\pi$ (n 为正整数), 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n\pi} (\sin 2n\pi - 2 \cos 2n\pi)}{5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{2}{5} e^{n\pi} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x)}{5} \text{ 不 } \exists.$$

(3) 只有当 $\int_0^{+\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 都收敛时, 才有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx; \text{ 否则, 积分 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ 发散.}$$

此处要与连续奇函数在有限的对称区间上的积分 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 区分开来.

96 【答案】 C

【分析】 当 $0 \leq x \leq \pi$, 或 $2\pi \leq x \leq 3\pi$ 时 $y \geq 0$, 当 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 时 $y \leq 0$.
所以 $y = e^{-x} \sin x (0 \leq x \leq 3\pi)$ 与 x 轴所围成的面积为

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx.$$

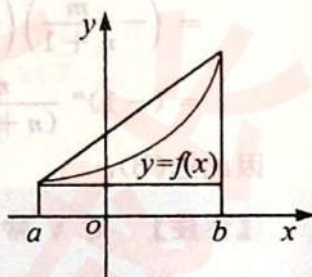
97 【答案】 C

【分析】 题设不等式的几何意义是

矩形面积 $<$ 曲边梯形面积 $<$ 梯形面积,

要使上面不等式成立, 需要过点 $(a, f(a))$ 平行于 x 轴的直线在曲线 $y = f(x)$ 的下方, 连结点 $(a, f(a))$ 和点 $(b, f(b))$ 的直线在曲线 $y = f(x)$ 上方. 当曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 是单调上升且是凹时有此性质.

于是当 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ 成立时, 上述条件成立, 因此选(C).



98 【答案】 D

【分析】 按选项, 要把曲线表成 $x = x(y)$, 于是分成两条:

$$x = 1 \pm \sqrt{1-y} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

看成两个旋转体的体积之差:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1-y})^2 dy, \quad V_2 = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy$$

于是

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{1-y})^2 - (1 - \sqrt{1-y})^2] dy.$$

因此选(D).

【评注 1】 按公式计算得

$$V = \pi \int_0^1 4\sqrt{1-y} dy = 4\pi \left(-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}\pi.$$

【评注 2】 也可利用另一旋转体体积公式

设 $b > a \geq 0$, 曲线 $y = f(x) (a \leq x \leq b)$ 与直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

我们也可求出

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x[1 - (x-1)^2] dx = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

99 【答案】 A

【分析】 利用极坐标方程表示曲线的弧长公式,

$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \int_0^a \sqrt{(ae^{\theta})^2 + (abe^{\theta})^2} d\theta \\ &= \int_0^a ae^{\theta} \sqrt{1+b^2} d\theta. \end{aligned}$$

因此选(A).

【评注】 曲线的极坐标方程表示的弧长公式是由曲线的参数方程的弧长公式导出的. 我们也可用参数方程的弧长公式来计算:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = ae^{t\theta} \cos \theta \\ y = r \sin \theta = ae^{t\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta \\ &= \int_0^a \sqrt{(abe^{t\theta} \cos \theta - ae^{t\theta} \sin \theta)^2 + (abe^{t\theta} \sin \theta + ae^{t\theta} \cos \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^a ae^{t\theta} \sqrt{1+b^2} d\theta. \end{aligned}$$

100 【答案】 A

【分析】 先求弧微分

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \sin \frac{t}{2} \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \end{aligned}$$

$$\text{于是得弧长} \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

四个选项中, 质心的横坐标均相同, 所以只须求质心的纵坐标 $\bar{y}$. 为此,

$$\begin{aligned} \text{再求} \quad \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt \\ &= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 16a^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3} a^2. \end{aligned}$$

因此代入公式得

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt} = \frac{\frac{32}{3} a^2}{8a} = \frac{4}{3} a.$$

因此选(A).

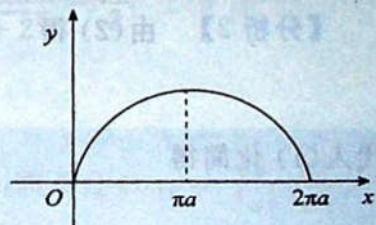
【评注】 这支旋轮线关于直线 $x = \pi a$ 对称.

由对称性知 $\bar{x} = \pi a$.

或直接计算

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt &= \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -4a^2 \int_0^{2\pi} t \cos \frac{t}{2} dt - 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= -4a^2 t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + 4a^2 \int_0^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt - 8a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} d \sin \frac{t}{2} = 8a^2 \pi \end{aligned}$$

$$\text{因此代公式得质心的横坐标: } \bar{x} = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt} = \frac{8a^2 \pi}{8a} = \pi a.$$



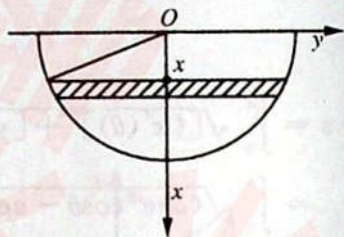
101 【答案】 C

【分析】 如图所示,任取 $[x, x+\Delta x] \subset [0, R]$, 相应的小横条所受压力微元

$$dp = x \cdot 2ydx = 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

于是,闸门所受压力

$$p = \int_0^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx. \text{ 选(C).}$$



102 【答案】 D

【分析】 由两向量垂直的充要条件:两向量的数量积为零,以及由向量的运算法则有对于(A), $a \cdot [(a \cdot c)b - (a \cdot b)c] = 0$

$$\text{对于(B), } a \cdot \left[b - \frac{(a \cdot b)}{|a|^2} a \right] = 0$$

$$\text{对于(C), } a \cdot (a \times b) = 0.$$

$$\text{对于(D), } a \cdot [a + (a \times b) \times a] = |a|^2 \neq 0.$$

因此选(D).

103 【答案】 D

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a + xb|^2 - |a|^2}{x(|a + xb| + |a|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + xb) \cdot (a + xb) - |a|^2}{x(|a + xb| + |a|)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a|^2 + 2xa \cdot b + x^2|b|^2 - |a|^2}{x(|a + xb| + |a|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a \cdot b + x}{|a + xb| + |a|} \\ &= \frac{a \cdot b}{|a|} = \cos \langle a, b \rangle = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} |a + xb| = |a|$. 选(D).

104 【答案】 A

【分析 1】 投影柱面方程是一个三元方程,(C)、(D)表示的是曲线. 而(B)中的方程中含 z , 不可能是 L 在 xOy 面上的投影柱面方程, 因此选(A).

【分析 2】 由(2)得

$$z = \frac{x+3}{2}$$

代入(1)化简得

$$x^2 + 20y^2 - 24x - 116 = 0$$

即为 L 在 xOy 面上的投影柱面方程.

【评注】 ① 在空间解析几何中, $F(x, y) = 0$ 表示是以 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面方程. 而 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 表示是柱面 $F(x, y) = 0$ 与 xOy 面的交线. 因此要注意空间的曲线、曲面的正确表示方法.

② 求两曲面的交线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线 L 的方法是: 消去联立方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

中的 z 得

$$H(x, y) = 0$$

Γ 在 xOy 平面上的投影曲线 L 的方程就是

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

以 Γ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面方程就是

$$H(x, y) = 0.$$

105 【答案】 A

【分析 1】 首先注意到 $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, 显然 (C)、(D) 中的平面都不平行于 Π_1 (或 Π_2), 所以 (C)、(D) 不正确, (B) 中的平面虽平行于 Π_1 (或 Π_2), 但它不在 Π_1 与 Π_2 之间, 因此只能选 (A).

事实上, Π_1 和 Π_2 在 z 轴上的截距分别是 2 和 6, 而 (A) 中两个平面在 z 轴上的截距分别是 5 和 3, 显然, (A) 中两个平面把平面 Π_1 和平面 Π_2 的距离分为 1:3.

【分析 2】 平面 Π_1, Π_2 与 z 轴的交点分别是 $(0, 0, 2), (0, 0, 6)$. 点 $M_0(0, 0, 3)$ 或 $(0, 0, 5)$ 分这两点连线段的长为 1:3, 问题转化为求过 M_0 以 $(1, -2, 1)$ 为法向量的平面方程, 立即可得该平面方程是

$$x - 2y + z - 3 = 0, \text{ 或 } x - 2y + z - 5 = 0.$$

106 【答案】 C

【分析】 由题设直线 L 的方向向量 $s = (2, 1, 1)$, 平面 Π 的法向量 $n = (1, -1, 2)$, 设直线 L 与平面 Π 的夹角为 φ , 则

$$\sin \varphi = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|} = \frac{|2 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$$

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$. 选 (C).

【评注】 直线与平面夹角 φ 的计算公式应是 $\sin \varphi = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|}$, 而不是 $\cos \varphi = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|}$.

107 【答案】 C

【分析】 求出直线 L 的方向向量 s

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -7(4i - 2j + k)$$

平面 Π 的法向量 $n = 4i - 2j + k$



所以 $s \parallel n$, 即直线 L 垂直于平面 Π . 因此选(C).

108 【答案】 C

【分析 1】 L 过点 $M_0(1, 0, -1)$, 以 $l = (1, -2, 1)$ 为方向向量, 则

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times l|}{|l|}.$$

$$\text{而 } |\overrightarrow{M_0M_1} \times l| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i + j + k, |\overrightarrow{M_0M_1} \times l| = \sqrt{3},$$

于是

$$d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【分析 2】 过 $M_1(0, 1, -1)$ 与 L 垂直的平面的方程是

$$x - 2(y - 1) + (z + 1) = 0,$$

即

$$x - 2y + z + 3 = 0.$$

L 的参数方程是

$$x = 1 + t, y = -2t, z = -1 + t.$$

将它代入平面方程得

$$(1 + t) - 2(-2t) + (-1 + t) + 3 = 0.$$

$$\text{解得 } t = -\frac{1}{2}.$$

相应的交点 $M_2\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$. 于是

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【分析 3】 L 的参数方程是

$$x = 1 + t, y = -2t, z = -1 + t.$$

点 M_1 到 L 上 $\forall$ 点 (x, y, z) 的距离平方是

$$\begin{aligned} f(t) &= d^2(t) = (1+t)^2 + (1-(-2t))^2 + (-1-(-1+t))^2 \\ &= (1+t)^2 + (1+2t)^2 + t^2 \end{aligned}$$

点 M_1 到 L 的距离 d 是点 M_1 到 L 上 $\forall$ 点距离的最小值.

$$\text{由 } f'(t) = 2(1+t) + 4(1+2t) + 2t = 12t + 6 = 0$$

$$\text{得 } t = -\frac{1}{2}, \text{ 又}$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = +\infty$$

于是 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的最小值是 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

因此 $d = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 选(C).

109 【答案】 B

【分析 1】 设 L_1 的方向向量为 s_1 , L_2 的方向向量为 s_2 , 平面 Π 的法向量为 n , 则 $n \perp s_1$,

$$n \perp s_2, \text{ 所以 } n = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(i - j + k)$$

又因平面 Π 过原点, 显然选(B).

【分析 2】 过定点 $O(0,0,0)$ 与 L_1 的方向向量 $s_1 = (0,1,1)$ 及 L_2 的方向向量 $s_2 = (1,$

$$2,1) \text{ 平行的平面 } \Pi \text{ 的方程是 } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } -x + y - z = 0$$

因此选(B).

110 【答案】 A

【分析】 设 $M_1(a_1, b_1, c_1), M_3(a_3, b_3, c_3)$, 显然, M_1, M_3 分别在两已知的直线 L_1 与 L_3 上, $\overrightarrow{M_1M_3} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$, L_1 与 L_3 的方向量 $s_1 = (a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$, $s_3 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$, L_1 与 L_3 共面的充要条件是 $(s_1, s_3, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$



$$\begin{aligned} \text{又 } (s_3, s_1, \overrightarrow{M_1M_3}) &= (s_3 \times s_1) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 与两直线共面, 因此, 两已知直线共面.

$$\text{由 } 0 \neq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

可知上式第二个行列式的第一、二两行不成比例, 因此, 两已知直线不平行也不重合, 所以选(A).

111 【答案】 A

【分析】 由于 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2 + 2y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + 2k^2x^2} = \frac{k}{1 + 2k^2}$

与 k 的取值有关, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$ 不存在, 故应选(A).

【评注】 本题所用的方法是说明重极限不存在的一种常用方法.

112 【答案】 A

【分析】 由于 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$

$$\text{而 } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1$$

则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

【评注】 事实上, 当 (x,y) 沿过原点的任何直线趋于 $(0,0)$ 时, 都有 $\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 趋于 0, 但极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 仍然不存在, 因为当 (x,y) 沿 $y = x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时, $\frac{2x^2y}{x^4+y^2} \rightarrow 1$.

113 【答案】 C

【分析】 由于

$$0 \leq |xy \ln(x^2 + y^2)| \leq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \quad (\text{当 } 0 < x^2 + y^2 < 1 \text{ 时})$$

令 $x^2 + y^2 = r$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \ln r = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln r}{\frac{1}{r}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = 0,$$

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \ln(x^2 + y^2) = 0$, 应选(C).

114 【答案】 A

【分析】 由于

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4} \right| &\leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4} |\sin ky| \\ &= \frac{1}{2} |\sin ky| \rightarrow 0 \quad (\text{当 } (x,y) \rightarrow (0,0) \text{ 时}). \end{aligned}$$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4} = 0$, 故应选(A).

115 【答案】 D

【分析】 由多元函数的连续、偏导数存在和可微之间的关系知, 多元函数的连续既非两个偏导数存在的必要条件, 也非充分条件.

例如 $f(x,y) = |x| + |y|$ 在 $(0,0)$ 点连续, 但 $(0,0)$ 点两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在. 而

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点的两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在(可用定义验证),但在 $(0,0)$ 点不连续,事实上极限

是不正确的,应选(C).

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ 不存在.}$$

故应选(D).

116 【答案】 D

【分析】 由于 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数,则 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处连续,从而有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$$

同理由 $f'_y(x_0, y_0) = b$ 可知

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0)$ 及 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y)$ 存在且相等,故应选(D).

【评注】 由 $f'_x(x_0, y_0) = a, f'_y(x_0, y_0) = b$ 可知 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可导,但由此不能推得 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ 存在,也不能推得 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续,也不能推得 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.故(A)、(B)、(C)都不正确.

117 【答案】 C

【分析】 由于偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数,则由 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在可知,一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处连续,从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$,同理 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$.故应选(C).

118 【答案】 C

【分析】 由于 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$

与 k 取值有关,则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在,从而 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续,而

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

同理 $f'_y(0,0) = 0$

故应选(C).

【评注】 本题中的函数给出了一个两个偏导数都存在但不连续的例子.

119 【答案】 B

【分析】 $f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$

由对称性知, $f'_y(0,0) = 0$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \text{ 不存在} \end{aligned}$$

$$\text{事实上 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = k\Delta x}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + k^2(\Delta x)^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微. 应选(B).

【评注】 本题中的函数给出了一个偏导数存在但不可微的例子.

120 【答案】 C

【分析】 由于 $f(x,0) = \sin\sqrt{x^2} = \sin|x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 则 $f'_x(0,0)$ 不存在. 事实上

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x| - 0}{x} = \begin{cases} 1, & x \rightarrow 0^+ \\ -1, & x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

而 $f(0,y) = \sin\sqrt{y^2} = \sin y^2$ 在 $y=0$ 处可导, 则 $f'_y(0,0)$ 存在, 故应选(C).



121 【答案】 D

【分析】 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_x(x,y) = f'_x(0,0)$ 和 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_y(x,y) = f'_y(0,0)$ 可知 $f(x,y)$ 的两个一阶偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微, 故应选(D).

122 【答案】 D

【分析】 由

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

知

$$f(x,y) - f(0,0) + 2x - y = o(\rho) \quad (\text{当 } (x,y) \rightarrow (0,0) \text{ 时})$$

即

$$f(x,y) - f(0,0) = -2x + y + o(\rho)$$

由微分的定义可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 故应选(D).

123 【答案】 C

【分析】 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = -1$, 及 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x|+|y| = 0$

知 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, 又 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 则 $f(0,0) = 0$.

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = -1$ 及极限的保号性知, 在 $(0,0)$ 点的某去心邻域内

$$\frac{f(x,y)}{|x|+|y|} < 0,$$

从而有 $f(x,y) < 0$, 又 $f(0,0) = 0$, 由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极大值. 故 (C) 是不正确的, 应选 (C).

事实上, 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = -1$ 知,

$$\text{【分析】 由于偏导数 } f(0,0) = 0, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{|x|} = -1,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} \\ &= \begin{cases} -1, & (x \rightarrow 0^+) \\ 1, & (x \rightarrow 0^-) \end{cases} \end{aligned}$$

则 $f'_x(0,0)$ 不存在, 同理 $f'_y(0,0)$ 不存在, 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微, 故 (A)、(B)、(D) 是正确的.

124 【答案】 B

【分析 1】 直接法.

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ 知

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x,y) - f(0,0) + 2x - y] = 0$$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 又

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0) + 2x}{\sqrt{x^2}} = 1$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0) + 2x}{|x|} = 1$$

$$\text{从而有 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} + 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{-x} - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = -3$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$ 不存在, 即 $f'_x(0,0)$ 不存在.

同理可得 $f'_y(0,0)$ 不存在, 故应选 (B).

【分析 2】 排除法.

令 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2x + y$

显然 $f(x,y)$ 满足原题设的条件, 且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 而

$$f(x,0) = \sqrt{x^2} - 2x = |x| - 2x$$

在 $x=0$ 处不可导 ($|x|$ 在 $x=0$ 处不可导, $2x$ 在 $x=0$ 处可导)

则 $f'_x(0,0)$ 不存在, 同理 $f'_y(0,0)$ 不存在, 从而 (A)、(C)、(D) 均不正确, 故应选 (B).

125 【答案】 C

【分析】 由于 $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

则 $z(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, (A) 不正确.

$$z'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(\Delta x, 0) - z(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$z'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(0, \Delta y) - z(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

所以, $z(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在, (B) 不正确.

$$\text{又 } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta z - z'_x(0,0)\Delta x - z'_y(0,0)\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$$

由于 $\lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0) \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{2\sqrt{2}|\Delta x|^3}$ 不存在, 则

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}} \text{ 不存在,}$$

则 $z(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微, 故应选 (C).

【评注】 用定义判定 $z(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是否可微分以下两步进行:

(1) 用定义判断 $z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0)$ 是否都存在, 如果都存在则进行下一步, 否则, $z(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不可微.

(2) 考查极限 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta z - [z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\rho}$ 是否为零. 如果此极限为零, 则函数 $z(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 否则不可微.

126 【答案】 B

【分析 1】 由 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续可知, 如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则必有 $f(0, 0) =$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \infty$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 或 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$, 即

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho)$$

由微分的定义知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

【分析 2】 排除法: 取 $f(x, y) = |x| + |y|$, 显然 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 但 $f(x, y) = |x| + |y|$ 在 $(0, 0)$ 处不可微. 这是由于 $f(x, 0) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导, 则 $f'_x(0, 0)$ 不存在, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微, 排除 (A).

取 $f(x, y) \equiv 1$, 显然 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 但 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = \infty$ 不存在, 则排除 (C) 和 (D), 故应选 (B).

127 【答案】 D

【分析】 由于偏导数本质上就是一元函数的导数, 则由 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ 可知, $f(x, y)$ 关于变量 x 是单调增加的, 而关于变量 y 是单调减的. 因此, 当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 时

$$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1), f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$$

从而有

$$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$$

故应选 (D).

128 【答案】 C

【分析】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - \frac{f(x_0 - h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right]$$

$$= f'_x(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)$$

$$= 2f'_x(x_0, y_0)$$

故应选 (C).

129 【答案】 D

【分析】 由于 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho) = dz + o(\rho)$$

故应选 (D).

130 【答案】 D

【分析 1】 直接法.

设 l 方向的方向余弦为 $(\cos \alpha, \cos \beta)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial l} \bigg|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t \cos \alpha, t \cos \beta) - f(0, 0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \cos^2 \beta}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} = 1$$

故应选 (D).

【分析 2】 排除法.

$$\text{显然 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 排除 (A).

又 $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导, 则 $f'_x(0, 0)$ 不存在, 同理 $f'_y(0, 0)$ 不存在,

排除(B)和(C),故应选(D).

【评注】 本例告诉我们,即使 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个一阶偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 都不存在,但 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任意方向的方向导数均可存在.

131 【答案】 D

【分析】 设 $\cos\alpha, \cos\beta$ 为 x 轴负方向的方向余弦,则 $\cos\alpha = -1, \cos\beta = 0$,由方向导数定义知, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处沿 x 轴负方向的方向导数为

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t\cos\alpha, t\cos\beta) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(-t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(-t,0) - f(0,0)}{-t} \\ &= -f'_x(0,0) = -2\end{aligned}$$

故应选(D).

【评注】 原题设条件可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点两个一阶偏导数存在,此时函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不一定连续,不一定可微,沿任一方向 l 的方向导数不一定存在,故排除(A)、(B)、(C).

132 【答案】 D

$$\begin{aligned}\text{【分析 1】 } f(1,-1) &= f(1,-1) - f(0,0) \\ &= [f(1,-1) - f(0,-1)] + [f(0,-1) - f(0,0)] \\ &= f'_x(\xi, -1) + f'_y(0, \eta)(-1) \\ &> 1 + (-1) \cdot (-1) = 2\end{aligned}$$

故应选(D).

【分析 2】 排除法,

$$\text{令 } f(x,y) = 1.1x - 1.1y$$

$$\text{显然 } \frac{\partial f}{\partial x} = 1.1 > 1, \frac{\partial f}{\partial y} = -1.1 < -1, f(0,0) = 0, \text{ 但}$$

$$f(1,1) = 1.1 - 1.1 = 0, \text{ 则(A) 不正确.}$$

$$f(-1,1) = -1.1 - 1.1 = -2.2 < -2.$$

则(B) 不正确,

$$f(-1,-1) = -1.1 + 1.1 = 0$$

则(C) 不正确,故应选(D).



133 【答案】 D

【分析】 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点沿任何

方向的方向导数都存在,但该函数在 $(0,0)$ 点不连续.

事实上 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t \cos \alpha, t \cos \beta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 \alpha \cos \beta}{t^2 \cos^4 \alpha + \cos^2 \beta}$

$$= \begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \beta}, & \text{当 } \cos \beta \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \cos \beta = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

但 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 不存在(参考 112 题), 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续, 从而也不可微.

排除(A)和(C).

令 $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 在 130 题中已验证该函数在点 $(0, 0)$ 处沿任何的方向导数都存在, 但 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都不存在.

134 【答案】 B

【分析】 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = f(x, 0) \end{cases}$, 则该曲线在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处

的切向量为 $\{1, 0, f'_x(0, 0)\} = \{1, 0, 2\}$.

故应选(B).

135 【答案】 D

【分析】 $f(2, 1) = f(2, 1) - f(0, 0)$
 $= [f(2, 1) - f(2, 0)] + [f(2, 0) - f(0, 0)]$
 $= f'_y(2, \xi) + 2f'_x(\eta, 0)$

又 $f(2, 1) > 3$

则 $f'_y(2, \xi) + 2f'_x(\eta, 0) > 3$,

又 $f'_y(2, \xi) < 0$, 则 $2f'_x(\eta, 0) > 3$,

即 $f'_x(\eta, 0) > \frac{3}{2}$,

故应选(D).

136 【答案】 A

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\frac{y}{x^2}f_1 - \frac{z}{x^2}f_2}{\frac{1}{x}f_2} = \frac{\frac{y}{x}f_1 + \frac{z}{x}f_2}{f_2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{1}{x}f_1}{\frac{1}{x}f_2} = -\frac{f_1}{f_2}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yf_1 + zf_2 - yf_1}{f_2} = z.$$

137 【答案】 B

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1 + 2xf_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1 + xyf_{11} + 2y^2f_{12} + 2x^2f_{21} + 4xyf_{22}$$

$$= f_1 + xyf_{11} + 2(x^2 + y^2)f_{12} + 4xyf_{22}$$

故应选(B).



138 【答案】 A

【分析 1】 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int 2dx = 2x + \varphi(y)$$

由 $f'_x(1, y) = y + 1$ 知 $y + 1 = 2 + \varphi(y)$

$$\varphi(y) = y - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + (y - 1)$$

$$z = \int [2x + (y - 1)]dx = x^2 + (y - 1)x + \psi(y)$$

由 $f(1, y) = y + 2$ 知 $y + 2 = 1 + (y - 1) + \psi(y)$

$$\psi(y) = 2$$

$$z = x^2 + (y - 1)x + 2.$$

【分析 2】 显然四个选项中的函数都满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, 而只有(A)选项中的函数满足 $f(1, y) = y + 2$, 故应选(A).

【评注】 对本题显然第二种方法较为方便.

139 【答案】 C

【分析 1】 由题设知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2xy + 3x^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + x^2$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2xy + 3x^2$ 知

$$f(x, y) = \int (2y^2 + 2xy + 3x^2)dx = 2xy^2 + x^2y + x^3 + \varphi(y)$$

由 $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + x^2$ 知 $4xy + x^2 = 4xy + x^2 + \varphi'(y)$, $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$

则 $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

【分析 2】 $df(x, y) = (2y^2 + 2xy + 3x^2)dx + (4xy + x^2)dy$

$$= (2y^2dx + 4xydy) + (2xydx + x^2dy) + 3x^2dx$$

$$= d(2xy^2) + d(x^2y) + dx^3$$

则 $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

【评注】 方法一是利用偏积分,方法二是利用凑微分.这两种方法是已知某个函数的全微分或两个一阶偏导数求原函数的两种常用方法.

140 【答案】 B

【分析】 由题设知

$$du(x, y) = \frac{x+ay}{(x+y)^2} dx + \frac{y}{(x+y)^2} dy$$

则 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2}$

以上两式分别对 y, x 求偏导得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{a(x+y)^2 - 2(x+y)(x+ay)}{(x+y)^4} = \frac{(a-2)x - ay}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2(x+y)y}{(x+y)^4} = \frac{-2y}{(x+y)^3}$$

由于 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在 $x+y \neq 0$ 处连续, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

即 $(a-2)x - ay \equiv -2y$, 从而 $a=2$, 故应选(B).

141 【答案】 C

【分析】 由 $du(x, y) = (axy^3 + \cos(x+2y))dx + (3x^2y^2 + b\cos(x+2y))dy$ 知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = axy^3 + \cos(x+2y), \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + b\cos(x+2y)$$

以上两式分别对 y, x 求偏导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3axy^2 - 2\sin(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 6xy^2 - b\sin(x+2y)$$

由于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 连续, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

即 $3axy^2 - 2\sin(x+2y) \equiv 6xy^2 - b\sin(x+2y)$,

则 $a=2, b=2$, 故应选(C).

【评注】 事实上关于此类问题有一个一般结论. 即若 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在单连通域 D 上有连续一阶偏导数, 则 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在 D 上是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上恒成立. 本题直接利用该结论更方便.

142 【答案】 D

【分析】 $f'_x(1, 2, 0) = 2xy \Big|_{(1, 2, 0)} = 4, f'_y(1, 2, 0) = x^2 \Big|_{(1, 2, 0)} = 1,$

$$f'_z(1, 2, 0) = 2z \Big|_{(1, 2, 0)} = 0$$

向量 n 的方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$$\text{则 } \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{(1,2,0)} = 4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = 2$$

故应选(D).

【评注】 选(B) 是一种典型的错误, 应特别注意.

143 【答案】 B

【分析】 函数 $f(x, y, z) = x^2y^3 + 3y^2z^3$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处方向导数的最大值等于 $f(x, y, z)$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处梯度向量的模.

$$\text{grad} f(0, 1, 1) = (0, 6, 9)$$

$$\|g\| = \sqrt{117}$$

故应选(B).

144 【答案】 D

$$\text{【分析】 } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\text{则 } \left. \text{grad} f \right|_{(1,0)} = j$$

故应选(D).

【评注】 本题可做的更简单, 由于

$$f'_x(1, 0) = \left. \frac{d}{dx} f(x, 0) \right|_{x=0} = 0$$

$$f'_y(1, 0) = \left. \frac{d}{dy} f(1, y) \right|_{y=0} = \left. \frac{1}{1+y^2} \right|_{y=0} = 1$$

$$\text{则 } \left. \text{grad} f \right|_{(1,0)} = j.$$



145 【答案】 B

【分析】 设 l 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cos\beta + \\ &\quad f'_z(x_0, y_0, z_0) \cos\gamma \\ &= \frac{g \cdot l}{\|l\|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

故应选(B).

146 【答案】 C

【分析】 曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线向量为 $(2x_0, 2y_0, 1)$, 由题设知

$$\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{2} = \frac{1}{1}$$

则 $x_0 = y_0 = 1$, 代入 $z = 4 - x^2 - y^2$ 得 $z_0 = 2$.

故应选(C).

147 【答案】 B

【分析】 曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 在点 $t = t_0$ 处的切向量为

$$\tau = (1, -2t_0, 3t_0^2).$$

平面 $x + 2y + z = 4$ 的法线向量为

$$n = (1, 2, 1).$$

由题设知 $n \perp \tau$, 即

$$1 - 4t_0 + 3t_0^2 = 0$$

则 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = \frac{1}{3}$.

故应选(B).

148 【答案】 D

【分析】 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的法线向量为 $n_1 = (2, -2, 0)$

平面 $x + y + z = 0$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的法线向量为 $n_2 = (1, 1, 1)$

则曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的切向量为

$$\tau = n_1 \times n_2 = (-2, -2, 4)$$

则所求切线方程为

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$$

故应选(D).

149 【答案】 C

【分析】 曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处切线向量为

$$\tau = (1, -2, 3)$$

而指向 x 轴负向一侧的切向量为

$$(-1, 2, -3)$$

则所求的方向导数为

$$2 \times \frac{-1}{\sqrt{14}} + (-2) \times \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \times \frac{-3}{\sqrt{14}} = -\frac{12}{\sqrt{14}}$$

故应选(C).

150 【答案】 D

【分析】 设 $F(x, y, z) = xy - z \ln y + e^x - 1$

$$\text{则 } F_x = y + ze^{xy}, F_y = x - \frac{z}{y}, F_z = -\ln y + xe^{xy}$$

$$F_x(0,1,1) = 2 \neq 0, F_y(0,1,1) = -1 \neq 0, F_z(0,1,1) = 0$$

由隐函数存在定理知,方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$ 在 $(0,1,1)$ 点的一个邻域内可确定两个具有连续一阶偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$,故应选(D).



151 【答案】 B

【分析】 设 $F(x,y,z) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - 4$, 则

$$F_x = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, F_y = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, F_z = \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}$$

该曲面在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面方程为

$$x^{-\frac{1}{3}}(X-x) + y^{-\frac{1}{3}}(Y-y) + z^{-\frac{1}{3}}(Z-z) = 0$$

令 $Y = Z = 0$ 得 $X = 4x^{\frac{1}{3}}$, 令 $X = Z = 0$ 得 $Y = 4y^{\frac{1}{3}}$, 令 $X = Y = 0$ 得 $Z = 4z^{\frac{1}{3}}$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 16(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}) = 64$$

故应选(B).

152 【答案】 D

【分析】 由 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值及极值的定义可知, $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 取极小值, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值, 故应选(D).

【评注】 极值点不一定是驻点, 因为在该点处偏导数不一定存在, 例如 $f(x,y) = |x| + |y|$ 显然在 $(0,0)$ 点取极小值, 但 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在, 则排除(A); 驻点不一定是极值点, 排除(B); (C) 选项的结论对一元函数是成立的, 但对二元函数不成立.

153 【答案】 C

【分析】 由于 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取极大值, 则 $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极大值, 则在 $y = y_0$ 的某邻域内

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0),$$

从而有

$$-f(x_0, y) \geq -f(x_0, y_0)$$

即 $-f(x_0, y)$ 在 y_0 处取极小值, 故应选(C).

【评注】 本题没假设 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处两个一阶偏导数存在, 则(A)不正确. 但应注意, 本题即使假设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, (B) 选项也不正确, 因为(B) 是 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处取得极大值的充分条件, 但非必要条件. 如 $f(x,y) = -(x^4 + y^4)$ 在 $(0,0)$ 处取极大值, 但 $f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = 0, f''_{xx}(0,0) = 0$.

154 【答案】 B

【分析】 $y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

又 $F'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $y'(x_0) = 0$

$$y''(x) = -\frac{[F''_{xx} + F''_{xy}y']F'_y - [F''_{yx} + F''_{yy}y']F'_x}{(F'_y)^2}$$

$$y''(x_0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

若 $F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, 则 $y''(x_0) > 0$, x_0 是 $y = y(x)$ 的极小值点, 故应选(B).

155 【答案】 C

【分析 1】 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = -2$, 及 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性知 $f(0,0) = 0$,

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = -2 < 0$, 及极限的保号性知存在 $(0,0)$ 点的某个去心邻域, 在此去心邻域内

$$\frac{f(x,y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} < 0$$

而 $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, 则 $f(x,y) < 0$, 又 $f(0,0) = 0$, 由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 取极大值, 故应选(C).

【分析 2】 由于当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时, $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} \sim \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

取 $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$, 显然满足题设条件, 但 $f'_x(0,0) = 0$, 且由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 取极大值, 则排除(A)、(B)、(D), 故应选(C).

【评注】 分析 1 是利用极限的保号性和极值的定义, 分析 2 是利用排除法, 这是解决此类问题常用的两种方法.

156 【答案】 B

【分析】 由于在 D 内 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则在 D 内

$$AC - B^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$$

则 D 内每一点都不是 $u(x,y)$ 的极值点, 则函数 $u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上, 故应选(B).

157 【答案】 D

【分析】 $f'_x = 2kx$, $f'_y = 3y^2 - 3$, 显然

$$f'_x(0,1) = 0, f'_y(0,1) = 0$$

$$f''_{xx}(0,1) = 2k, f''_{yy}(0,1) = 6, f''_{xy}(0,1) = 0$$

$$AC - B^2 = 12k$$

则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处是否取得极值与 k 的取值有关.

158 【答案】 A

【分析】 显然 $f(x, y) = 1 + x + y$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 内无驻点, 令

$$F(x, y, \lambda) = 1 + x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} F_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{得 } x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$ 为最大值, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$ 为最小值, $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$

故应选(A).



159 【答案】 B

【分析】 由几何意义可知球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上到平面 $x + 2y + z = 10$ 距离最大的点处的切平面与平面 $x + 2y + z = 10$ 平行, 且在第七卦限.

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在点 (x, y, z) 处的法向量为

$$n_1 = (x, y, z)$$

平面 $x + 2y + z = 10$ 的法向量为

$$n_2 = (1, 2, 1)$$

$$\text{则 } \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \lambda$$

即 $x = \lambda, y = 2\lambda, z = \lambda$, 将其代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 得

$$6\lambda^2 = 1, \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

由于所求点在第七卦限, 则所求点为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

故应选(B).

【评注】 本题也可先求出曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 (x, y, z) 到平面 $x + 2y + z = 10$ 的距离, 然后用拉格朗日乘法求解.

160 【答案】 A

【分析】 连接 OB 将原积分域分为两部分,

$\triangle CBO$, 记为 D_2 , $\triangle BOA$, 记为 D_3 .

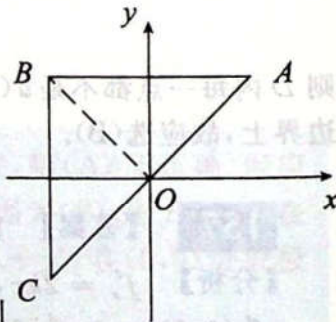
由于 D_2 关于 x 轴对称, 而 $xy + \cos x \sin y$ 是 y 的奇函数, 则

$$\iint_{D_2} (xy + \cos x \sin y) d\sigma = 0$$

而 D_3 关于 y 轴对称, xy 是 x 的奇函数, $\cos x \sin y$ 是 x 的偶函数, 则

$$\iint_{D_3} xy d\sigma = 0, \iint_{D_3} \cos x \sin y d\sigma = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y d\sigma.$$

故应选(A).



161 【答案】 C【分析】 原积分域应由 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 与 $x \geq 0$ 所确定的右半圆, 故应选(C).**162** 【答案】 C【分析】 原积分域为直线 $y = x, x + y = 2$, 与 y 轴围成的三角形区域, 故应选(C).**163** 【答案】 D

【分析】 交换积分次序得

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_e^1 f(x, y) dx.$$

164 【答案】 C【分析】 由 $r = a \cos \theta$ 知 $r^2 = a \cos \theta$, 即

$$x^2 + y^2 = ax \quad (a > 0)$$

故应选(C).

165 【答案】 C

【分析】 由积分中值定理知

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \pi a^2 f(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in D$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{a \rightarrow 0} \pi f(\xi, \eta) = \pi f(0, 0).$$

166 【答案】 C【分析】 $\int_0^1 dx \int_0^{f(x)} g(t) dt = \int_0^1 \left[\int_0^{f(x)} g(t) dt \right] dx$ (利用分部积分法)

$$= x \int_0^{f(x)} g(t) dt \Big|_0^1 - \int_0^1 xg[f(x)]f'(x) dx$$

$$= 0 - \int_0^1 x^2 f'(x) dx = - \int_0^1 x^2 df(x)$$

$$= -x^2 f(x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 xf(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 xf(x) dx = 2018.$$

167 【答案】 C

【分析】 由积分中值定理知

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy = \pi r^2 f(\xi, \eta)$$

其中 (ξ, η) 为圆域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上的一个点, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\xi, \eta) = f(0, 0)$$

$$\text{而 } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2}{g(r^2)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r}{2rg'(r^2)} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy}{g(r^2)} = \frac{\pi}{a} f(0, 0).$$

168 【答案】 C

【分析】 交换累次积分次序得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dx \int_t^x e^{-y^2} dy}{t^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\int_0^t dy \int_0^y e^{-y^2} dx}{t^\alpha} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t y e^{-y^2} dy}{t^\alpha} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t e^{-t^2}}{\alpha t^{\alpha-1}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\alpha t^{\alpha-1}} = \beta \neq 0 \end{aligned}$$

由 $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$, 故应选 (C).

169 【答案】 B

【分析】 同一积分域上二重积分大小的比较, 只要比较被积函数的大小, 而被积函数为同一函数 $\frac{x+y}{4}$ 的不同方幂, 关键是要确定在 D 上 $\frac{x+y}{4}$ 是大于 1 还是小于 1.

由于直线 $\frac{x+y}{4} = 1$ (即 $x+y=4$) 与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 在点 $(2, 2)$ 处相切, 则在区域 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 上, $\frac{x+y}{4} \leq 1$, 从而有

$$\frac{x+y}{4} \leq \sqrt{\frac{x+y}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$$

则 $I_1 < I_2 < I_3$.

故应选 (B).

170 【答案】 C

【分析】 显然在 D 上 $0 < x+y \leq 1$, 则

$$\ln(x+y)^3 \leq 0, 0 < \sin(x+y)^3 < (x+y)^3$$

从而有

$$\iint_D \ln(x+y)^3 dx dy < \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy < \iint_D (x+y)^3 dx dy$$

故应选 (C).

【评注】 本题用到一个常用的不等式, 即

$$\sin x < x < \tan x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

171 【答案】 D

【分析】 由于积分域 D 关于两个坐标轴都对称, 而 x^3 是 x 的奇函数, y^3 是 y 的奇函数, 则

$$I_1 = \iint_D (x^3 + y^3) dx dy = 0$$

$$I_2 = \iint_D y^5 dx dy = 0$$

$$I_3 = 2 \iint_D x^6 dx dy = \iint_D (x^6 + y^6) dx dy \quad (\text{这里利用了变量的对称性})$$

由于在 D 内 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$, 则

$$x^6 + y^6 \leq x^4 + y^4$$

$$\text{则 } 0 < \iint_D (x^6 + y^6) dx dy < \iint_D (x^4 + y^4) dx dy$$

从而有 $I_1 < I_3 < I_2$, 故应选(D).

172 【答案】 C

【分析】 等式 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$ 两端积分得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D xy dx dy + \iint_D f(u, v) du dv \cdot \iint_D dx dy$$

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy dy = \frac{1}{12}$$

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy = \frac{1}{3}$$

$$\text{则 } \iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{8}$$

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{8}.$$

173 【答案】 C

【分析】 由于 Ω_1 关于 xOz 面和 yOz 面都对称, 而 $f(x, y, z) = z$ 既是 y 的偶函数, 也是 x 的偶函数, 则

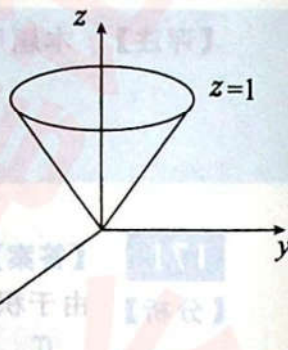
$$\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$$

故应选(C).

174 【答案】 C

【分析】 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 围成的锥体(如图所示),则在直角坐标下化为累次积分为

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$$



175 【答案】 D

【分析】 Ω 在 xOy 面上的投影是由 $x^2 + y^2 = 1, y = 0, y = x$ 在第一象限围成的 $\frac{1}{8}$ 圆域, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

故应选(D).



176 【答案】 D

【分析】

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dv}{t^4} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr \int_0^1 dz}{t^4} \\ &= 2\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t f(r^2) r dr}{t^4} \\ &= 2\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2)t}{4t^3} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2)}{t^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(t^2) \cdot 2t}{2t} = \frac{\pi}{2} f'(0). \end{aligned}$$

故应选(D).

177 【答案】 C

【分析】 由于 S 关于 yOz 面和 xOz 面都对称, 而 $f(x, y, z) = z$ 关于 x 和 y 都是偶函数, 则

$$\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} z dS.$$

故应选(C).

178 【答案】 B

【分析】 (1) 和(3)是正确的, (2) 和(4)是错误的.

(1) 和(3)分别是第一类线(面)积分, 积分是沿曲线(面)积, 被积函数可用曲线(面)方程代入.

但(2)和(4)分别是二重积分和三重积分, 积分分别是在圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 和球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 上积, 被积函数不能用积分域的边界曲线 $x^2 + y^2 = a^2$ 和边界曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 代入.

179 【答案】 C**【分析】** 由格林公式得

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (3-3x^2-3y^2) d\sigma$$

$$= 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-x^2-y^2) d\sigma$$

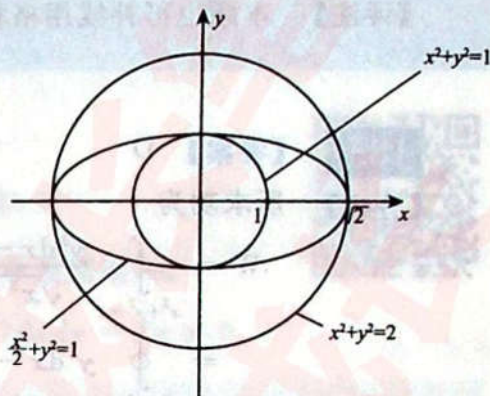
$$I_2 = 3 \iint_{\frac{x^2}{2}+y^2 \leq 1} (1-x^2-y^2) d\sigma$$

$$I_3 = 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (1-x^2-y^2) d\sigma$$

注意到在圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 之外, 以上三个二重积分的被积函数 $(1-x^2-y^2)$ 为负, 由上图可知

$$I_3 < I_2 < I_1$$

故应选(C).

**180 【答案】 C**

$$\text{【分析】} \oint_L (bx + ay)^2 ds = \oint_L (b^2 x^2 + 2abxy + a^2 y^2) ds$$

$$= \oint_L (b^2 x^2 + a^2 y^2) ds = a^2 b^2 \oint_L \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) ds$$

$$= a^2 b^2 \oint_L ds = a^2 b^2 l.$$

故应选(C).

181 【答案】 A

【分析】 曲线 L 的方程为 $|x| + |y| = 1$, 该曲线关于 y 轴和 x 轴都对称, $\frac{x}{|x| + |y|}$,

$\frac{y}{|x| + |y|}$ 分别关于 x 和 y 是奇函数, 则

$$\oint_L \frac{x}{|x| + |y|} ds = \oint_L \frac{y}{|x| + |y|} ds = 0$$

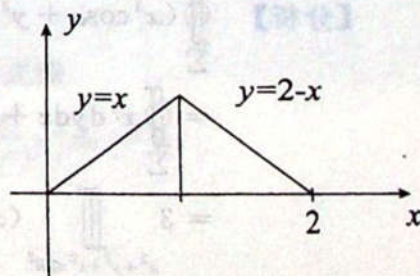
$$\oint_L \frac{x+y+1}{|x| + |y|} ds = \oint_L \frac{ds}{|x| + |y|} = \oint_L ds = 4\sqrt{2}.$$

故应选(A).

182 【答案】 D**【分析】** 积分曲线如图所示

$$\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$$

$$= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 \{ [x^2 + (2-x)^2] - [x^2 - (2-x)^2] \} dx$$



$$= \frac{2}{3} + \int_1^2 2(2-x)^2 dx = \frac{4}{3}.$$

【评注】 本题也可补线用格林公式.

183 【答案】 D

【分析】 所求功为

$$\begin{aligned} W &= \oint_{x^2+y^2=1} \frac{y^3 dx - x^3 dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \oint_{x^2+y^2=1} y^3 dx - x^3 dy \\ &= -3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2) dx dy \quad (\text{格林公式}) \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

184 【答案】 B

【分析】 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y)$

这里的 $\cos(n, x), \cos(n, y)$ 为曲线 L 的外法线向量的方向余弦, 设 τ 为 L 的沿逆时针方向的切线向量, 则

$$\cos(n, x) = \cos(\tau, y), \cos(n, y) = -\cos(\tau, x)$$

$$\text{则 } \oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\tau, y) - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\tau, x) \right) ds$$

$$= \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (\text{格林公式})$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

185 【答案】 D

【分析】 $\oint_{\Sigma} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS$

$$= \oint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$$

$$= 3 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x^2+y^2+z^2) dv \quad (\text{高斯公式})$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^4 \sin\varphi dr$$

$$= \frac{12\pi R^5}{5}$$

186 【答案】 B

【分析】 对于 $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ 在 D 内虽有 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ 成立.

但不能断定该线积分在 D 内与路径无关, 因为 D 不是单连通域, 而

$$\oint_{x^2+y^2=1} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_{x^2+y^2=1} x dy - y dx = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1+1) dx dy = 2\pi \neq 0.$$

则线积分 $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ 在 D 上不与路径无关.

而对于(2)和(3), 由于

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = d \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d \sqrt{x^2 + y^2}$$

即其被积式在 D 上是某个二元函数的全微分, 则线积分 $\int_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}, \int_L \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在 D 上与路径无关.

而对线积分 $\int_L \frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2}$, 由于

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

即 $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, 则线积分 $\int_L \frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2}$ 在 D 上不与路径无关.

故应选(B).

187 【答案】 B

【分析】 在 Γ 上 $f(x, y) = 1$, M 在第 II 象限, N 在第 IV 象限, 因此 M 点的纵坐标 y_M 大于 N 点的纵坐标 y_N , 因此

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dy = \int_{\Gamma} dy = y_N - y_M < 0$$

故应选(B).

188 【答案】 D

【分析】 当 L 围成的区域 D 不包含坐标原点时, 由格林公式得

$$I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) d\sigma = 0$$

故应选(D).

189 【答案】 B

【分析】 对于第二类面积分,若曲面 Σ (包含侧) 关于 $x=0$ (即 yOz 坐标面) 对称,则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dydz = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数} \\ 2 \iint_{\Sigma_{x \geq 0}} f(x, y, z) dydz, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数} \end{cases}$$

这里曲面 Σ 关于 $x=0$ 对称,而选项(A)、(C)、(D)中的被积函数 x^2, y^2, y , 关于 x 都是偶函数,则其积分为零,而(B)选项中的被积函数 x 为 x 的奇函数,则

$$\iint_{\Sigma} x dydz = 2 \iint_{\Sigma_{x \geq 0}} x dydz > 0.$$

【评注】 (1) 第二类线(面)积分的奇偶性、对称性的结论与第一类线(面)积分及重积分的结论正好相反.

(2) 对第二类线(面)积分只能分项利用奇偶性,如对 $dydz$ 的项要求积分曲面关于 $x=0$ 对称,而被积函数关于 x 有奇偶性;而对 $dx dy$ 的项就要求积分曲面关于 $z=0$ 对称,被积函数关于 z 有奇偶性,其余类似.



190 【答案】 C

【分析】 取 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 包含在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内的部分,法线方向按右手法则取,由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} y dx + z dy + x dz \\ &= \iint_{\Sigma} (0-1) dydz + (0-1) dz dx + (0-1) dx dy \\ &= - \iint_{\Sigma} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ds \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为平面 $x+y+z=0$ 法线向量的方向余弦,

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{则 } \oint_{\Sigma} y dx + z dy + x dz = - \frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} ds = -\sqrt{3} \pi a^2.$$

故应选(C).

191 【答案】 A

【分析】 $\left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{n+1} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{n+1} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{2}$$

则原级数绝对收敛.

192 【答案】 C

【分析】 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2 \times 5 - 2 = 8$

故应选(C).

193 【答案】 C

【分析】 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ 是一个交错级数, 而 $\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ 单调减趋于零, 由

莱布尼兹准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$$

而 $\ln^2(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{n}$ (当 $n \rightarrow \infty$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散.

故应选(C).

194 【答案】 A

【分析】 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数且收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, 而

$$|(-1)^n (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}| = (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}}{a_{2n}} = \lambda \neq 0$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}$ 绝对收敛.

【评注】 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 都收敛, 但对一般项级数该结论不成立, 如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

195 【答案】 D

【分析】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1})$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛, 故应选 (D).

196 【答案】 D

【分析】 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots$

且设级数收敛, 由级数性质可知, 该级数加括号所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$$

收敛, 故应选 (D).

事实上, 由本题可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 条件收敛, 则该级数的所有正项和所有负项分别构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$$

都发散, 则 (A)、(B) 都不正确.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个发散的级数, 则其加括号后所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$$

发散, 故 (C) 不正确.



197 【答案】 C

【分析】 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $\{a_n\}$ 有界,

设 $|a_n| \leq M$, 从而

$$0 \leq a_n^2 b_n^2 \leq M^2 b_n^2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛, 故应选 (C).

【评注】 本题用到一个基本结论: “若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛”. 注意该结论对一般项级数不成立.

198 【答案】 A

【分析】 $0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n \leq 2(u_n^2 + v_n^2)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛, 选 (A).

199 【答案】 B

【分析】 级数加括号 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_n)$ 收敛, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$, 则①不正确; $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉了前 100 项, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛便可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$ 收敛, 则②正确;

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

则当 n 充分大时 $|u_{n+1}| > |u_n| > 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, ③ 正确.

④ 显然不正确, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$.

故应选(B).

200 【答案】 B

【分析】 由于 $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$

则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛, 故应选(B).

201 【答案】 B

【分析】 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 由

$$|a_n| \leq b_n$$

知, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛与题设矛盾, 故应选(B).

202 【答案】 D

【分析】 当 $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 为交错级数且 $u_n = \frac{1}{n^\lambda} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 单调减趋

于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 收敛, 而

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^\lambda} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{n^\lambda} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}} \sim \frac{\pi}{n^{\lambda+\frac{1}{2}}}$$

当 $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^{\lambda+\frac{1}{2}}}$ 发散,

故当 $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 条件收敛.

203 【答案】 B

【分析】 由于 $\sin(n\pi + \frac{\lambda}{\ln n}) = (-1)^n \frac{\lambda}{\ln n}$

由交错级数的莱布尼兹准则知,级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda}{\ln n}$ 收敛而

$$\left| (-1)^n \frac{\lambda}{\ln n} \right| = \frac{\lambda}{\ln n} > \frac{\lambda}{n}$$

则原级数条件收敛,故应选(B).

204 【答案】 C

【分析】 由于 $3^{-a \ln n} = n^{-a \ln 3}$ (可两端取对数验证)

$$\text{而 } n^{-a \ln 3} = \frac{1}{n^{a \ln 3}}$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a \ln 3}}$ 收敛,则 $a \ln 3 > 1$,

$$\text{即 } a > \frac{1}{\ln 3}.$$

故应选(C).

205 【答案】 D

【分析】 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散可知, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 必发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |b_n|)$ 必发散. 故应选(D).



206 【答案】 D

【分析】 当 $a_n > 0$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 为正项级数,由于该级数收敛,

则其部分和数列

$$\bar{S}_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \text{ 上有界}$$

从而可知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ 上有界}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛,故应选(D).

207 【答案】 B

【分析】 由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 当 n 充分大时 $0 \leq a_n^2 \leq a_n$,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛,如 $a_n = \frac{1}{n}$,则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛的充分条件,故应选(B).

208 【答案】 D

【分析】 由于 $a_n = (a_n + b_n) - b_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛; 而当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散, 故应选(D).

209 【答案】 D

【分析】 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 而

$$|a_n| \leq |a_n| + |b_n|$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 必发散, 故应选(D).

210 【答案】 D

【分析】 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+k}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ 为原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 去掉了前 k 项, 则其敛散性相同, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+k})$ 必收敛, 故应选(D).

211 【答案】 C

【分析】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 中至少有一个不成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一个发散, 故应选(C).

212 【答案】 C

【分析】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(\sqrt[n]{n})^\alpha} = \frac{1}{\beta}$

1) 当 $0 < \beta < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \beta^n}$ 发散.

2) 当 $\beta > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \beta^n}$ 收敛.

3) 当 $\beta = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leq 1$ 时发散, 故应选(C).

213 【答案】 B

【分析】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 发散.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 收敛.

对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$, 由于 $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 单调减趋于零, 由交错级数的莱布尼兹准则知该级数收敛.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [3 + (-1)^n 2]^n}{6^n}$, 由于

$$\left| \frac{(-1)^n [3 + (-1)^n 2]^n}{6^n} \right| = \frac{[3 + (-1)^n 2]^n}{6^n} \leq \frac{5^n}{6^n}$$

则该级数收敛, 故应选(B).



214 【答案】 A

【分析】 只有 ④ 是正确的, 事实上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的部分和数列

$$S_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

由于数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛.

① 不正确. 如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 不收敛.

② 不正确. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ 不一定存在,

如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{4^n}$ 是收敛的, 事实上

$$0 < \frac{[2 + (-1)^n]^n}{4^n} \leq \frac{3^n}{4^n}$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{4}$ 不存在.

③ 不正确. 如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 容易验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散.

215 【答案】 B

【分析】 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在 $x=1$ 处收敛, 由阿贝尔定理可知当

$$|x+1| < |1+1| = 2$$

时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 绝对收敛, 而 $|-2+1| = 1 < 2$, 则原幂级数在 $x=-2$ 处绝对收敛.

216 【答案】 B

【分析】 显然, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径为 1, 由题设条件可知 $x=0$ 为其收敛区间的右端点, 则 $a=-1$, 故应选(B).

217 【答案】 D

【分析】 由幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处发散只能断定当

$$|x-1| > |-1-1| = 2$$

时原级数发散, 而当 $x=2$ 时,

$$|x-1| = |2-1| = 1 < 2$$

因此, 其敛散性不能确定, 故应选(D).

218 【答案】 D

【分析】 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛, 则 $x=2$ 为其收敛区间的端点, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 中心为 $x=1$, 则该幂级数的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(0, 2)$, 故应选(D).

【评注】 这里用到一个常用的结论: “若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $x=x_1$ 处条件收敛, 则 $x=x_1$ 必为该幂级数收敛区间的一个端点”.

219 【答案】 B

【分析】 显然幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n2^n}$ 的收敛半径为 2, 由该幂级数在 $x=2$ 处条件收敛可知, $x=2$ 为其收敛区间的一个端点, 则 $a=0$ 或 $a=4$,

若 $a=0$, 则原幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$, 该幂级数在 $x=2$ 发散, 与题设矛盾; 若 $a=4$, 则原幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n2^n}$, 该幂级数在 $x=2$ 处条件收敛, 则 $a=4$.

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n}$ 的收敛半径为 1, 中心为 -4 , 收敛区间为 $(-5, -3)$,

$x = -\pi$ 在其收敛区间内, 故绝对收敛, 选(B).

220 【答案】 A

【分析】 只有 ④ 是正确的.

① 不正确, 如 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^n)$ 的收敛半径都为 1, 但 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-1)x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

② 和 ③ 都不正确, 因为极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 都不一定存在. 请读者举例说明.



221 【答案】 B

【分析】 由题设可知, 本题是将 $f(x)$ 作奇延拓, 并按周期 2 展开的, 则

$$\begin{aligned} S\left(-\frac{5}{2}\right) &= S\left(-\frac{1}{2}\right) = -S\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right) + f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2} \\ &= -\frac{\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

故应选(B).

222 【答案】 D

【分析】 由 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$ 知

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\ln y = \arctan x + C$$

$$\text{由 } y(0) = \pi \text{ 知, } C = \ln \pi, \ln y = \arctan x + \ln \pi$$

$$\text{令 } x = 1 \text{ 得 } \ln y = \frac{\pi}{4} + \ln \pi, y = \pi e^{\frac{\pi}{4}}.$$

223 【答案】 A

由于 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的解, 则

$$f''(x) - 2f'(x) + 4f(x) = 0$$

$$\text{令 } x = x_0, \text{ 则 } f''(x_0) - 2f'(x_0) + 4f(x_0) = 0, f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$$

则 $f(x)$ 在 x_0 取极大值, 故选(A).

224 【答案】 C

【分析】 方程 $y'' - 2y' = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 2r = 0, r_1 = 0, r_2 = 2$, 则非齐次方程 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ 的特解形式为 $y = x(ax + b)e^{2x}$.

225 【答案】 D

【分析】 方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$

特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$

则方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x + 1 + e^x \cos 2x$ 的待定特解为

$y = axe^x + b + e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

故应选(D).

226 【答案】 D

【分析】 方程 $y''' + 2y'' = 0$ 的特征方程为 $r^3 + 2r^2 = 0$

$r_1 = r_2 = 0, r_3 = -2$,

则方程 $y''' + 2y'' = x^2 + xe^{-2x}$ 的特解形式为 $y = x^2(ax^2 + bx + c) + x(dx + e)e^{-2x}$

故应选(D).

227 【答案】 D

【分析】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同的特解, 则 $y_1(x) - y_2(x)$ 为该方程的一个非零解, 则 $y = C(y_1(x) - y_2(x))$ 为该方程的通解.

【评注】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都可能是原方程的零解, 则(A)和(B)都不正确.

228 【答案】 C

【分析】 方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 是一个二阶线性非齐次方程, 则 $(x - x^2)$ 和 $(x - e^x)$ 为其对应的齐次方程两个线性无关的特解, 则原方程通解为

$$y = C_1(x - x^2) + C_2(x - e^x) + x$$

故应选(C).

229 【答案】 B

【分析】 等式 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt + \ln 2$ 两端对 x 求导得 $f'(x) = 2f(x)$ 则 $\frac{df}{f} = 2dx$, $\ln f = 2x + C_1, f(x) = Ce^{2x}$ 由题设知 $f(0) = \ln 2$, 则 $C = \ln 2, f(x) = e^{2x} \ln 2$.

230 【答案】 B

【分析】 由于线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 则

$$[f(x) - e^x] \cos y = -f'(x) \cos y$$

即 $f'(x) + f(x) = e^x$

$$f(x) = e^{-x} \left(\int e^x e^{dx} dx + C \right) = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C \right)$$

由 $f(0) = 0$ 知, $C = -\frac{1}{2}$



$$f(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

231 【答案】 D

【分析】 由原方程 $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ 得

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1-x^2} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1-x^2} dx$$

$$\ln |y| = -\ln |1-x^2| + \ln C_1$$

$$y(1-x^2) = C$$

由 $y(0) = 1$ 知, $C = 1$

$$y = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3$$

故应选(D).

232 【答案】 A

【分析】 将 $y = \frac{x}{\ln x}$ 代入方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 得

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} + \varphi(\ln x)$$

$$\varphi(\ln x) = -\frac{1}{\ln^2 x}$$

则

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}$$

故应选(A).

233 【答案】 D

【分析】 由通解 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ 的形式可知所求方程的特征方程为

$$(r-1)(r^2+4) = 0$$

即 $r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$

则对应的方程为

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$$

故应选(D).

234 【答案】 B

【分析】 由 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 是所求方程的三个特解知, $r = -1, -1, 1$ 为所求三阶常系数线性齐次微分方程的特征方程的三个根, 则其特征方程为

$$(r-1)(r+1)^2 = 0$$

即 $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$

对应的微分方程为

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

故应选(B).

235 【答案】 B

【分析】 由于 $y = xe^x + x$ 是方程 $y'' - 2y' + ay = bx + c$ 的解, 则 xe^x 是对应的齐次方程的解, 其特征方程有二重根 $r_1 = r_2 = 1$, 则 $a = 1$; x 为非齐次的解, 将 $y = x$ 代入方程

$$y'' - 2y' + y = bx + c$$

知 $b = 1, c = -2$

故应选(B).

236 【答案】 C

【分析】 令 $xt = u$, 则 $\int_0^1 f(xt) dt = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}$.

$$\frac{\int_0^x f(u) du}{x} = \frac{1}{2} f(x) + 1$$

$$\int_0^x f(u) du = \frac{1}{2} xf(x) + x$$

两端对 x 求导得

$$f(x) = \frac{1}{2} xf'(x) + \frac{1}{2} f(x) + 1$$

解方程得 $y = 2 + Cx$, 故选(C).

237 【答案】 C

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} \quad (\ln(1+x^2) \sim x^2)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{y''(0)}$$

在方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 中令 $x = 0$ 得 $y''(0) + py'(0) + qy(0) = 1$

即 $y''(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = 2$.

238 【答案】 C

【分析】 原方程的特征方程为 $r^2 + q = 0$.

1) 当 $q < 0$ 时, $r_{1,2} = \pm \sqrt{-q}$, 通解为 $y = C_1 e^{\sqrt{-q}x} + C_2 e^{-\sqrt{-q}x}$,

当 $C_1 = 0, C_2 \neq 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = C_2 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{-q}x} = 0$.

2) 当 $q = 0, r_1 = r_2 = 0$, 原方程通解为 $y = C_1 x + C_2$.

3) 当 $q > 0$ 时, $r_{1,2} = \pm \sqrt{q}i$, 原方程通解为 $y = C_1 \cos \sqrt{q}x + C_2 \sin \sqrt{q}x$.

显然, 只有 $q < 0$ 时, 原方程存在当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于零的非零解, 故应选(C).

239 【答案】 A

【分析】 方程 $y'' + by' + y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 + br + 1 = 0$$

特征根为 $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$.

1) $b^2 < 4$ 时, 原方程通解为 $y = e^{-\frac{b}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4-b^2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4-b^2}}{2}x \right)$.

2) 当 $b^2 = 4$ 时, 原方程通解为 $y = e^{-\frac{b}{2}x} (C_1 + C_2 x)$.

3) 当 $b^2 > 4$ 时, 原方程通解为 $y = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}x}$.

由以上解的形式可知当 $b \geq 0$ 时, 每个解都在 $(0, +\infty)$ 上有界, 故应选(A).

240 【答案】 C

【分析】 方程 $y'' - y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 1 = 0, r_{1,2} = \pm 1$.

齐次方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

非齐次特解 $y = 1$

非齐次通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 1$

由于 $y(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, 则 $y(0) = 2, y'(0) = 0$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 = \cosh x + 1$$

故应选(C).

241 【答案】 C

【分析】 等式 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 两端对 y 求导得

$$f'(x+y) = f(x)f'(y)$$

令 $y = 0$ 得, $f'(x) = f(x)$

由此可得 $f(x) = Ce^x$

由 $f'(0) = 1$ 知, $C = 1$, 即 $f(x) = e^x$.



242 【答案】 B

【分析】 由 $du(x, y) = f(x)ydx + [\sin x - f(x)]dy$ 知

$$f(x) = \cos x - f'(x)$$

$$\text{即 } f'(x) + f(x) = \cos x$$

$$f(x) = e^{-\int dx} \left(\int \cos x e^{\int dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \left(\int e^x \cos x dx + C \right) = \frac{e^{-x}}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x + C)$$

由 $f(0) = 0$ 知, $C = -1$, $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x - e^{-x})$

故应选(B).

243 【答案】 D

【分析】 由于线积分 $\int_L yf(x)dx + [f(x) - x^2]dy$ 与路径无关, 则

$$f(x) = f'(x) - 2x$$

即 $f'(x) - f(x) = 2x$

$$f(x) = e^{\int dx} \left[\int 2xe^{-x} dx + C \right] = e^x \left[\int 2xe^{-x} dx + C \right]$$

$$= e^x [-2e^{-x} - 2xe^{-x} + C]$$

由 $f(0) = 1$ 知, $C = 3$

$$f(x) = 3e^x - 2x - 2$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)dx + [f(x) - x^2]dy = \int_0^1 [f(1) - 1]dy = f(1) - 1 = 3e - 5.$$

244 【答案】 D

【分析】 这是一个欧拉方程, 令 $x = e^t$, $D = \frac{d}{dt}$ 原方程化为

$$D(D-1)y + 2Dy - 2y = 0$$

$$\text{即 } \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, $r_1 = -2$, $r_2 = 1$

通解 $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

$$\text{即 } y = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x.$$

245 【答案】 C

【分析】 原方程可化为 $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -1$, 其通解为

$$y = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[\int -e^{-\frac{2}{x}} dx + C \right] = x + Cx^2$$

曲线 $y = x + Cx^2$ 与直线 $x = 1$ 及 x 轴所围区域绕 x 轴旋转一周的旋转体体积为

$$V(C) = \pi \int_0^1 (x + Cx^2)^2 dx = \pi \left(\frac{1}{3} + \frac{C}{2} + \frac{C^2}{5} \right)$$

令 $V'(C) = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2C}{5} \right) = 0$, 得 $C = -\frac{5}{4}$, $V''(C) = \frac{2}{5}\pi > 0$

$C = -\frac{5}{4}$ 是唯一的极值点, 且为极小值点, 则为最小值点, $y = x - \frac{5}{4}x^2$.

线性代数

246 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } |B| &= \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{11}-a_{12} & a_{21}-a_{22} & a_{31}-a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}-a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}-a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}-a_{32} \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{11}-a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{21}-a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{31}-a_{32} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & -a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & -a_{32} \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2|A| = 2m. \end{aligned}$$

247 【答案】 B

【分析】 把第 1 行“ k 倍”分别加到其它各行

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 6 \begin{vmatrix} 2+2+1+\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \left(2+2+1+\frac{2}{3} \right) = -34. \end{aligned}$$

248 【答案】 C

【分析】 本题考查行列式的性质, 分别对每个行列式作适当的列变换, 向 $|a_1, a_2, a_3|$ 靠拢.

$$(A) |a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_1| = |0, a_2 - a_3, a_3 - a_1| = 0.$$

$$\begin{aligned} (B) |a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1| &= |2(a_1 + a_2 + a_3), a_2 + a_3, a_3 + a_1| \\ &= 2|a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3 + a_1| \\ &= 2|a_1, a_2 + a_3, a_3 + a_1| \\ &= 2|a_1, a_2 + a_3, a_3| = 2|A|. \end{aligned}$$

$$(C) |a_1 + 2a_2, a_3, a_1 + a_2| = |a_2, a_3, a_1 + a_2| = |a_2, a_3, a_1| = |A|.$$

$$(D) |a_1, a_2 + a_3, a_1 + a_2| = |a_1, a_2 + a_3, a_2| = |a_1, a_3, a_2| = -|A|.$$

请说出每个等号成立的理由, 作的什么变换, 用的什么性质?

$$\text{或对 (C) 有 } |a_1 + 2a_2, a_3, a_1 + a_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

可知(A)、(B)均不正确.

$$= |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = |A|$$

故应选(C).

249 【答案】 C

【分析】
$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \alpha + 0 \\ \beta^T & c + b - c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta^T & b - c \end{vmatrix}$$

【分析】 由于
$$= 0 + (b - c) |A| = a(b - c).$$

【评注】 本题考查行列式拆开的性质: 如果行列式某一行(列)的元素都是两个数之和, 则行列式可拆成两个行列式相加.

250 【答案】 A

【分析】 将 $|A - B|$ 的其余各列加到第一列, 则

$$\begin{aligned} |A - B| &= |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_{n-1}| \\ &= |0, \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_{n-1}| = 0. \end{aligned}$$

故应选(A).

【评注】 本题说明向量组 $\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_{n-1}$ 总是线性相关的, $(\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_{n-1})x = 0$ 总有非零解, 你知道非零解是“谁”吗?

251 【答案】 D

【分析】 本题检查拉普拉斯展开式:

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} O & O & A \\ O & B & O \\ C & O & O \end{vmatrix} = (-1)^{m(n+t)} |A| \begin{vmatrix} O & B \\ C & O \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{m(n+t)} (-1)^{nt} |A| |B| |C| = (-1)^{mn+mt+nt} abc. \end{aligned}$$

252 【答案】 D

【分析】 由于 $A + 2B = (3\alpha_1, -\alpha_2, 5\alpha_3, \beta_1 + 2\beta_2)$

$$\begin{aligned} \text{则 } |A + 2B| &= -15 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + 2\beta_2| \\ &= -15 (|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| + |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 2\beta_2|) \\ &= -15 (|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, -\alpha_2, 2\alpha_3, \beta_2|) \\ &= -15 (|A| - |B|) \\ &= -75. \end{aligned}$$

253 【答案】 C

【分析】 由 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$, $A^* = |A| A^{-1}$, 以及 $|kA| = k^n |A|$ 和 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{4} A \right)^{-1} - \frac{1}{2} A^* \right| &= |4A^{-1} - 2A^{-1}| = |2A^{-1}| \\ &= 2^5 |A^{-1}| = 8. \end{aligned}$$

254 【答案】 A

【分析】 对于矩阵方程首先要恒等变形,左乘 A 并利用 $AA^* = A^*A = |A|E$, 得

$$|A|B + 2E = AB$$

$$\text{即 } (A - |A|E)B = 2E$$

因为 $|A| = -2$, 于是 $(A + 2E)B = 2E$

两边取行列式, 得

$$|A + 2E| \cdot |B| = 8$$

$$\text{又 } |A + 2E| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 60$$

所以 $|B| = \frac{2}{15}$. 故应选(A).

【评注】 若已知条件是矩阵方程, 要先用矩阵运算法则将其化简.

255 【答案】 A

【分析】 由 $|A + iE| = 0$ 即 $|-iE - A| = 0$, 所以矩阵 A 的特征值是 $-1, -2, -3$. 那么 $|A| = (-1)(-2)(-3) = -6$. 又 $|A^*| = |A|^{-1}$

$$\text{故 } \left| \left(\frac{1}{2}A \right)^* \right| = \left| \frac{1}{2}A \right|^2 = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 |A| \right]^2 = \frac{9}{16}$$

或者, 由关系式 $(kA)^* = k^{-1}A^*$ 有 $\left(\frac{1}{2}A \right)^* = \frac{1}{4}A^*$ 可知

$$\left| \left(\frac{1}{2}A \right)^* \right| = \left| \frac{1}{4}A^* \right| = \left(\frac{1}{4} \right)^3 |A^*| = \left(\frac{1}{4} \right)^3 |A|^{-2}$$

256 【答案】 A

【分析】 简单的矩阵 J 在右边, 故可对 A 按列分块. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则

$$\begin{aligned} AJ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

故应选(A).

【评注】 希望你再计算 JA , 看看是什么情况?

257 【答案】 C

【分析】 由行列式乘法公式 $|AB| = |A||B|$

当 $AB = O$ 时, 有 $|A||B| = 0$ 所以 $|A|$ 和 $|B|$ 至少有一个为 0, 即(C) 正确.

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } AB = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} = O$$

可知(A)、(B)均不正确.

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } AB = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix} = B$$

但 $A \neq E$, 知(D)不正确.

258 【答案】 B

【分析】 由于

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B,$$

又

$$(kA)^T = kA^T = kA,$$

有

$$(A-2B)^T = A^T - (2B)^T = A-2B$$

从而(A)、(D)选项的结论是正确的.

我们首先来证明 $(A^*)^T = (A^T)^*$. 只需证明等式两边 (i, j) 位置元素相等. $(A^*)^T$ 在 (i, j) 位置的元素等于 A^* 在 (j, i) 位置的元素, 为元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ji} . 而矩阵 $(A^T)^*$ 在 (i, j) 位置的元素等于 A^T 的 (j, i) 位置元素的代数余子式, 为 A 在 (i, j) 位置元素的代数余子式 A_{ji} . 从而 $(A^*)^T = (A^T)^* = A^*$, 故 A^* 为对称矩阵, (C) 选项的结论是正确的.

由于 $(AB)^T = B^T A^T = BA$, 从而(B)选项的结论不正确.

注意, 当 A, B 均为对称矩阵时, AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$.

259 【答案】 C

【分析】 由于

$$(A+B)^T = A^T + B^T = -(A+B)$$

又

$$(kA)^T = kA^T = k(-A) = -kA$$

有

$$(2A+3B)^T = (2A)^T + (3B)^T = -(2A+3B)$$

$$(AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA = AB,$$

从而(A)、(B)、(D)的结论都正确.

由于 $(A^*)^T = (A^T)^* = (-A)^* = (-1)^{n-1} A^*$, 从而 n 为奇数时, A^* 为对称矩阵, n 为偶数时, A^* 为反对称矩阵. 故(C)选项的结论不正确.

260 【答案】 D

【分析】 矩阵的乘法没有交换律, A, B 可逆不能保证 $AB = BA$, 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 有 } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 而 } BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

可知(A)、(C)均不正确.

A, B 可逆时, $A+B$ 不一定可逆, 即使 $A+B$ 可逆, 其逆一般也不等于 $A^{-1} + B^{-1}$. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 有 } (A+B)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

而 $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, 所以(B) 不正确.

因为 A 可逆时, $A^* = |A| A^{-1}$, 故

$$(AB)^* = |AB| (AB)^{-1} = |A| |B| B^{-1} A^{-1} = (|B| B^{-1}) (|A| A^{-1}) = B^* A^*$$

即(D) 正确.

【评注】 因为矩阵乘法没有交换律, 所以中学代数的乘法公式不能用, 但 $(A+E)^n$ 可用乘法公式展开.

261 【答案】 C

【分析】 利用行列式代数余子式的定理有 $AA^* = A^*A = |A| E$
按矩阵乘法定义, 有

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

因为矩阵乘法有结合律: $A^m A^t = A^{m+t} = A^t \cdot A^m$

又 $(A+E)(A-E) = A^2 - E = (A-E)(A+E)$

请你举例说明 AA^T 与 $A^T A$, AA_1 与 $A_1 A$ 可以不相等.

262 【答案】 D

【分析】 对任何 n 阶矩阵 A, B 上述关系式都要成立, 那么 A, B 可逆时仍应成立. 故可用 A, B 可逆来分析 C^* .

$$\begin{aligned} \text{由于 } C^* &= |C| C^{-1} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} \\ &= |A| |B| \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| |B| A^{-1} & O \\ O & |A| |B| B^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |B| A^* & O \\ O & |A| B^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

263 【答案】 B

【分析】 本题考查分块求逆及二阶求逆, 注意

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

再根据 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, 用二阶矩阵的伴随矩阵是主对角线对调副对角线变号, 很容易看出

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以应选(B).

【评注】 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

264 【答案】 C**【分析】** 本题检查 J^* (1) 求出 A , 然后对 (A, E) 作初等行变换, 请同学完成(2) 注意 $J^n = O$, 用定义法:

$$(E - J)(E + J + J^2 + \cdots + J^{n-1}) = E - J^n = E$$

所以 $A^{-1} = E - J$.**265 【答案】 C****【分析】** 方法一: $(E + BA^{-1})^{-1} = (AA^{-1} + BA^{-1})^{-1} = [(A + B)A^{-1}]^{-1}$.

$$= (A^{-1})^{-1}(A + B)^{-1} = A(A + B)^{-1}$$

注意, 因为 $(A + B)^2 = E$, 即 $(A + B)(A + B) = E$, 按可逆定义知 $(A + B)^{-1} = (A + B)$.方法二: 逐个验算, 对于 (B) 因 $(E + BA^{-1})A(A + B) = (A + B)(A + B) \stackrel{*}{=} E$, ($*$ 是已知条件), 故 $(E + BA^{-1})^{-1} = A(A + B)$, 应选 (C).**【评注】** 转置有性质 $(A + B)^T = A^T + B^T$, 而可逆 $(A + B)^{-1}$ 没有这种运算法则, 一般情况下 $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$, 因此对于 $(A + B)^{-1}$ 通常要用单位矩阵恒等变形的技巧.

计算型的选择題. 一般有两个思路, (1) 如方法一, 计算出结果, 作出选择; (2) 逐个验算如方法二.

266 【答案】 D**【分析】** 由 $(AB)^2 = E$ 有 $ABAB = E$, 又 A 和 BAB 都是 n 阶矩阵.故 $A^{-1} = BAB$, 即 (D) 正确.若 $AB = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$, 易见 $(AB)^2 = E$. 但 $AB \neq E, AB \neq -E$ 知 (B)、(C) 均不正确.若 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ 易见 $(AB)^2 = E$, 但 $A^{-1} \neq B$.

知 (A) 不正确.

【评注】 若 $A^2 = E$, 不要认为两边“开方”得 $A = \pm E$, 因为对二阶矩阵而言, $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$, 都有 $A^2 = E$.**267 【答案】 D****【分析】** 如果 A, B 均 n 阶矩阵, 命题当然正确, 而现在的问题是题中没有 n 阶矩阵这一条件, 故 ① 不正确. 例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

显然 A 不可逆. 类似地, 对于 $AB = E$, 虽然 $|AB| = 1$, 但能否用行列式乘法公式呢? 应检查 A 和 B 是否为 n 阶矩阵? 有的考生不注意公式成立时的条件, 随意用公式是不妥的.

A, B 是 n 阶矩阵, $(AB)^2 = E$, 即 $(AB)(AB) = E$, 可知 A, B 均可逆.

于是 $ABA = B^{-1}$, 从而 $BABA = E$. 即 $(BA)^2 = E$. 即 ② 正确.

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

虽然 A, B 都不可逆, 但 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 可逆, 可知 ③ 不正确.

由于 A, B 均 n 阶不可逆, 知 $|A| = |B| = 0$, 那么由行列式乘法公式知

$$|AB| = |A||B| = 0,$$

故 AB 必不可逆. ④ 正确.

【评注】 若 A, B, C 是 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$.

则 $|A| \cdot |B| \cdot |C| = 1 \Rightarrow A, B, C$ 均可逆.

$$\text{那么 } ABC = E \xrightarrow{\text{左乘 } A^{-1}} BC = A^{-1} \xrightarrow{\text{右乘 } A} BCA = E$$

$$ABC = E \xrightarrow{\text{右乘 } C^{-1}} AB = C^{-1} \xrightarrow{\text{左乘 } C} CAB = E$$

要会这种“旋转”变形法.

268 【答案】 D

【分析】 由 $AB = A + B$ 有 $(A - E)B = A$. 若 A 可逆, 则

$$|A - E| \cdot |B| = |A| \neq 0$$

知 $|B| \neq 0$. 即矩阵 B 可逆, 从而命题 ① 正确.

因为 $AB = A + B$, A, B 地位等同, 由 ① 知, 命题 ③ 也正确.

类似于 ① 由 B 可逆 $\Rightarrow A$ 可逆, 从而 AB 可逆,

那么 $A + B = AB$ 可逆, 知命题 ② 正确.

关于 ④, 用分组因式分解有:

$$AB - A - B + E = E \quad \text{即 } (A - E)(B - E) = E$$

所以 $A - E$ 恒可逆, 命题 ④ 正确, 故应选(D).

269 【答案】 B

【分析】 观察 A, B 之间的关系, 矩阵 A 的第 1 列加到第 3 列, 并再把 A 的 1, 3 两行互换就可得到 B . (先将 A 的 1, 3 两行互换, 再将第 1 列加到第 3 列也是一样的)

$$\text{故 } B = P_2 A P_1.$$

270 【答案】 B

【分析】 矩阵 A 作两次行变换可得到矩阵 B , 而 $AP_3 P_2, AP_1 P_3$ 描述的是矩阵 A 作列变换, 故应排除.

或者把矩阵 A 第 1 行的 2 倍加至第三行后, 再 1, 2 两行互换可得到 B .

或者把矩阵 A 的 1, 2 两行互换后, 再把第 2 行的 2 倍加至第 3 行亦可得到 B , 而 $P_2 P_3 A$ 正是后者. 所以应选(B).

【评注】 本题考查行变换是左乘初等矩阵,列变换是右乘初等矩阵. 希望能看清楚

$$P_1 P_3 A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + 2a_{21} & a_{32} + 2a_{22} & a_{33} + 2a_{23} \end{bmatrix},$$

$$AP_3 P_2 = AP_1 P_3 = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} + 2a_{13} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} + 2a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} + 2a_{33} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$AP_3 P_1 = AP_2 P_3 = \begin{bmatrix} a_{12} + 2a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} + 2a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} + 2a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

271 【答案】 A

【分析】 A 经行初等变换得到 A_1 , 故 $A_1 = PA$, P 是初等矩阵, 类似地 $B_1 = BQ$, 可构造出 $A_1 B_1 = PABQ$.

据已知条件, 令

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则 $A_1 = PA, B_1 = BQ$. 那么

$$A_1 B_1 = PABQ,$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } AB &= P^{-1} A_1 B_1 Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【评注】 本题考查初等矩阵的两个定理, 一个是左乘、右乘; 一个是初等矩阵逆矩阵的公式. 要熟悉三个公式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

272 【答案】 B

【分析】 据已知条件 $P_1 A = B$, 其中 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

$$BP_2 = E, \text{ 其中 } P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是 $P_1AP_2 = E$ 故

$$A = P_1^{-1}P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{那么 } A^* = |A| A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

273 【答案】 D

【分析】 矩阵 A 和 A^* 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(A^*)$

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

当 $a+3b \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时, 必有 $r(A) = r(A^*) = 4$, 矩阵 A 和 A^* 等价.

当 $a = b = 0$ 时, 必有 $A = A^* = 0$, 矩阵等价.

当 $a = b \neq 0$ 时, $r(A) = 1, r(A^*) = 0$, 矩阵不等价.

当 $a+3b = 0$ 且 $a \neq 0$ 时, $r(A) = 3, r(A^*) = 1$, 矩阵不等价.

274 【答案】 D

【分析】 n 阶矩阵 A 和 B 等价的充分必要条件是秩 $r(A) = r(B)$.

由于 $r(5A) = r(A), r(-4B) = r(B)$, 所以(D) 正确.

考查① $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 4 \end{bmatrix}$, 显然 $A - E$ 与 $B - E$ 不等价.

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 知 A^2 和 B^2 不等价.

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ 知 AB 和 BA 不等价.

275 【答案】 C

【分析】 当 $a = 1$ 时, 易见秩 $r(A) = 1$. 当 $a \neq 1$ 时, 由于

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 4(a-1)^2 \neq 0$$

知 $r(A) = 3$.

由于 $AB = O, A$ 是 3×4 矩阵, 有 $r(A) + r(B) \leq 4$.

那么当 $a = 1$ 时, $r(A) = 1, 1 \leq r(B) \leq 3$.

B 是 4×2 矩阵, 所以 B 的秩可能为 1 也可能为 2, 因此(A)、(B) 均不正确.

当 $a \neq 1$ 时, $r(A) = 3$, 所以必有 $r(B) = 1$, (D) 不正确.

【评注】 当 $a = 1$ 时, 你能否写出三个 4×3 的矩阵 B , 让其秩分别为 1, 为 2, 为 3?

本题考查矩阵秩的概念以及 $AB = O$ 中关于秩的信息.

若 $AB = O$, 将 B 按列分块, $B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, 有

$$AB = A[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n] = [0, 0, \dots, 0].$$

从而 $A\beta_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 即 β_i 是方程组 $Ax = 0$ 的解. 这样向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 $Ax = 0$ 的基础解系线性表出, 从而 $r([\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]) \leq n - r(A)$. 故有 $r(A) + r(B) \leq n$. 以上得到的命题“若 $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$ ”在考试中可直接使用. 由这一命题及 $r(A) > 0, r(B) > 0$, 立刻可得出 A 与 B 的秩均小于 n .

276 【答案】 A

【分析】 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = O$, 则有

(1) B 的列向量是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解

(2) 秩 $r(A) + r(B) \leq n$

由(1), 对于 $AB = O, B \neq O$ 知 $Ax = 0$ 有非零解, 从而秩 $r(A) < n$. 又因 $A^* \neq O$ 知有代数余子式 $A_{ij} \neq 0$, 即 A 中有 $n-1$ 阶子式非零, 那么 $r(A) \geq n-1$. 于是 $r(A) = n-1$. 再根据(2)知 $r(B) \leq 1$, 又因 $B \neq O$. 故必有 $r(B) = 1$.

关于 $r(A)$ 也可由

$$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{如 } r(A) = n \\ 1 & \text{如 } r(A) = n-1 \\ 0 & \text{如 } r(A) < n-1 \end{cases} \quad (*)$$

可知 $r(A^*) = 1$.

因为 $A^* \neq O$, 有 $r(A^*) \geq 1$, 于是 $r(A) \geq n-1$, 那么再由 $AB = O, B \neq O$ 知 $r(A) < n$, 因此只能是 $r(A) = n-1$. 故 $r(B) = 1$. 应选(A).

277 【答案】 D

【分析】 A 是四阶矩阵, 那么由伴随矩阵秩的公式

$$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0 & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

可见 $r(A^*) = 1 \Leftrightarrow r(A) = 3$

对矩阵 A 作初等变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{bmatrix}$$

若 $a = 3$ 则 $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 秩 $r(A) = 3$

$$\text{若 } a=2 \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 2 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A)=4$$

$$\text{若 } a=1 \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A)=3.$$

所以, $a=1$ 或 $a=3$ 时均有 $r(A^*)=1$. 应选(D).

278 【答案】 A

【分析】 A 是四阶矩阵, 由于 $A(A-E) = A^2 - A = O$, 故 $r(A) + r(A-E) \leq 4$.
又 $E = (E-A) + A$, 故
 $4 = r(E) = r(E-A+A) \leq r(E-A) + r(A) = r(A-E) + r(A)$, 从而 $r(A) + r(A-E) = 4$. 故应选(A).

【评注】 本题除了用 $AB=O$ 有 $r(A) + r(B) \leq n$ 之外, 还用到 $r(A) = r(-A)$, $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ 等关系式.

279 【答案】 D

【分析】 向量组 ① 是四个三维向量, 从而线性相关, 可排除(B).

由于 $(1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)$ 线性无关, 添上两个分量就可得向量组 ②, 故向量组 ② 线性无关. 所以应排除(C). 向量组 ③ 中前两个向量之差与最后一个向量对应分量成比例, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 那么添加 α_3 后, 故向量组 ③ 必线性相关. 应排除(A), 由排除法, 应选(D).

【评注】 关于向量组 ④ 亦可直接计算行列式, 由

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

而知其线性相关.

280 【答案】 A

【分析】 m 个 n 维向量($m < n$) 的线性相关性的判定可以用齐次方程组是否有非零解, 也可用秩.

若 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$, 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & t+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & t-8 & 11 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & t-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t+3 \end{bmatrix}$$

因为 t 与 $t+3$ 不可能同时为 0, 因此对任意的 t , 系数矩阵的秩必为 3, 亦即 $\forall t$ 齐次方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]x = 0$ 只有零解, 故必有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 所以应选(A).

281 【答案】 B

【分析】 n 个 n 维向量线性相关的判定一般用行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$ 较方便.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & a & 3 \\ 1 & -1 & 6 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & a-6 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & a-8 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}$$

当 $a=8$ 时, 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 但 $a=2$ 时仍有行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = 0$, 所以 $a=8$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关的充分而非必要条件.

【评注】 通过 279—281 这三个题, 思考一下当已知向量的分量时, 如何判断向量组的线性相关? 都有哪些方法?

282 【答案】 C

【分析】 (C) 选项是线性无关的等价定义.

(A) 选项中当 $k_1, \dots, k_s$ 全为零时, 对任何一组向量其线性组合必都是零, 从而这并不能判断 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性无关性.

(B) 线性相关的定义是存在一组不全为零的数, 使线性组合为零. 那么它的相反的描述应该是对任意一组不全为零的数, 其线性组合必不为零, 即 (C) 选项. 而不能只有一组不全为零的 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 例:

$$\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 0)^T$$

由于 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 但是 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$, 从而 (B) 只是必要条件不是充分条件.

(D) 选项也只是必要条件, 例如前述向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个向量均线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

283 【答案】 D

【分析】 必要性(反证法) 如果 $\alpha_i = k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s$, 则 $k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} - \alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0$.

因为 $k_1, \dots, k_{i-1}, -1, k_{i+1}, \dots, k_s$ 不全为 0. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. 矛盾.

充分性(反证法) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性相关, 则有不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$, 不妨设 $k_s \neq 0$, 则有 $\alpha_s = -\frac{1}{k_s}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{s-1}\alpha_{s-1})$. 矛盾.

注意 (A)、(B) 都是必要条件, 不是充分条件.

例如 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$.

而 (C) 是充分条件.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,

但由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\nRightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关.

284 【答案】 B

【分析】 由于 (A)、(C) 两个命题互为逆否命题, 一个命题与它的逆否命题要正确就全正确, 要错误就全错误. 按本题的要求仅有一个命题是正确的, 所以 (A)、(C) 均谬误. 其实亦可考查下面的例子:

$\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 0)$ 与 $\beta_1 = (1, 0, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0, 0), \beta_3 = (0, 0, 0, 1)$.

显然 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$. 即当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 其延伸组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以线性无关. 所以(A)、(C) 错误.

如果 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 即有不全为 0 的 x_1, x_2, x_3 使 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 那么齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

必有非零解, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 所以(D) 错误.

【评注】 要会用定理若(I) 无关, 则(II) 无关, 即若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则其延伸组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 必线性无关.

285 【答案】 D

【分析】 若 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, 则 α_1, α_2 线性无关.

当 $\alpha_3 = (1, 1, 0)^T$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关; 当 $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

可知当(I) 线性无关时, (II) 既可能线性无关亦可能线性相关, 所以(A)、(B) 均错误. (C) 是(A) 的逆否命题, 当然是错误的.

【评注】 要区分本题的(D) 与上一题的(B), 一个是向量个数的增减, 一个是向量分量的增减两者不要混淆.

286 【答案】 B

【分析】 (III) 线性相关 $\Leftrightarrow |AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$

可见应选(B).

【评注】 本题选项中, 若(A) 或(C) 或(D) 成立, 则(B) 成立. 因是四选一的选择题, 只能有一个选项正确. 故(A)、(C)、(D) 均可排除, 应选(B).

287 【答案】 C

【分析】 因为 $AB = E$ 是 m 阶矩阵, 所以 $r(AB) = m$.

那么 $r(A) \geq r(AB) = m$, 又因 $r(A) \leq m$, 故 $r(A) = m$.

于是 A 的行秩 $= r(A) = m$, 所以 A 的行向量组线性无关.

同理, B 的列秩 $= r(B) = m$, 所以 B 的列向量组线性无关.

【评注】 要会用秩来判断抽象向量组的线性相关性.

288 【答案】 C

【分析】 利用经过初等变换矩阵的秩不变, 以及 $r(A) = A$ 列秩 $= A$ 行秩的三秩相等定理. 易见 (A)、(B) 就是对矩阵

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \rightarrow (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$

分别作了一次行变换. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 知秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$, 从而秩 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = s$. 所以 (A)、(B) 必无关.

因为低维向量无关, 那么延伸之高维向量必无关, 所以 (D) 必无关.

只有 (C) 有可能线性相关. 例如 $\alpha_1 = (1, 2, 1), \alpha_2 = (3, 4, 2)$ 无关, 但 $\beta_1 = (0, 2, 1), \beta_2 = (0, 4, 2)$ 线性相关.

289 【答案】 C

【分析】 (A)、(D) 都是 $a\alpha_1 + b\alpha_2, a\alpha_2 + b\alpha_3, a\alpha_3 + b\alpha_1$ 线性无关的充分条件, 记 $\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2, \beta_2 = a\alpha_2 + b\alpha_3, \beta_3 = a\alpha_3 + b\alpha_1$

$$\text{则 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (a\alpha_1 + b\alpha_2, a\alpha_2 + b\alpha_3, a\alpha_3 + b\alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

由于 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a \neq -b.$$

或者, (用定义法)

$$\text{设 } k_1(a\alpha_1 + b\alpha_2) + k_2(a\alpha_2 + b\alpha_3) + k_3(a\alpha_3 + b\alpha_1) = 0$$

$$\text{即 } (k_1a + k_3b)\alpha_1 + (k_1b + k_2a)\alpha_2 + (k_2b + k_3a)\alpha_3 = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 有

$$\begin{cases} k_1a + k_3b = 0 \\ k_1b + k_2a = 0 \\ k_2b + k_3a = 0 \end{cases}$$

$$\text{故 } a\alpha_1 + b\alpha_2, a\alpha_2 + b\alpha_3, a\alpha_3 + b\alpha_1 \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \neq 0$$

下略.

290 【答案】 D

【分析】 用观察法

$$(A) (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

$$(B) (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0$$

$$(C) (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

知 (A)(B)(C) 均线性相关, 故应选 D.

或者

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

故 $r(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$.

故 D 必线性无关.

291 【答案】 D

【分析】 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 知 α_1, α_2 必线性无关, 又因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 故 α_4 必可由 α_1, α_2 线性表示. 因此 α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 故应选 D.

如 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T, \alpha_4 = (0, 0, 0)^T$, 可知(A)(B)(C)均不正确.

292 【答案】 B

【分析】 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关, 从而部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ 线性无关, 故应选(B).

取 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^T, \beta_1 = \alpha_1$, 知(A)与(C)选项错误.

关于选项(D), 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 线性相关, 则 $\beta_1 + \beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 从而 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与假设矛盾, 从而(D)错误.

【评注】 若仅 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出是不能推导出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关的, 请考查 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 0)^T, \alpha_3 = (3, 0, 0)^T, \beta = (0, 1, 0)^T$.

293 【答案】 C

【分析】 A 经过初等行变换变为 B, $Ax = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]x = 0$ 和 $Bx = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]x = 0$ 是同解方程组, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, $Ax = 0$ 有非零解 $\Rightarrow Bx = 0$ 有非零解, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关.

且 $A_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \rightarrow [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = B_1, A_1x = 0, B_1x = 0$ 也同解, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 $\rightarrow A_1x = 0$ 唯一零解 $\rightarrow B_1x = 0$ 唯一零解 $\rightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性无关. 从而知 β_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表出法唯一.

【评注】 由于方程组同解, A 的列向量组与 B 的列向量组对应的向量有相同的线性关系, 这一结果可以推广到一般的矩阵. 若 $m \times n$ 阶矩阵 A 通过行的初等变换变为 B , 则 A 的列向量组与 B 的列向量组对应的向量有相同的线性关系, 我们可以用这一结论求向量组的极大线性无关组, 及相关的线性表示.

例: 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 经行的初等变换变为 $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$, 且

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 是向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的极大线性无关组, 且由 $[\alpha_1, \alpha_2 : \alpha_3] \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\beta_3 = 2\beta_1 + 3\beta_2$, 从而, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组, 且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2.$$

易证矩阵 A 经过行的初等变换变为 B , 则 A 的行向量组与 B 的行向量组等价.

类似地, 矩阵 A 经列的初等变换变为 B , 则 A 的列向量与 B 的列向量等价. A 的行向量组与 B 的行向量组中对应的向量有相同的线性关系.

294 【答案】 C

【分析】 将等式 $B = AQ$ 中的 A, B 按列分块, $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, 则有

$$[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

表明向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 表示的系数依次为 Q 的第一列至第 n 列, 由于 Q 可逆, 从而有 $A = BQ^{-1}$, 即 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]Q^{-1}$, 表明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示, 从而这两个向量组等价, 故 (A) 选项的命题正确.

类似地, 对于 $PA = B$, 将 A 与 B 按行分块可得出 A 与 B 的行向量组等价, 从而选项 (B) 的命题正确.

若 A 的行(列)向量组与 B 的行(列)向量组等价, 则这两个向量组的秩相同, 从而矩阵 A 与 B 的秩相同, 故矩阵 A 与 B 等价(两个同型矩阵等价的充分必要条件是秩相等). 故选项 (D) 正确, 由排除法, 应选 (C).

下例可表明选项 (C) 的命题不正确.

$$\text{例: 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } P, Q \text{ 均为可逆矩阵, 且 } B = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

易见 B 的 1, 3 行(列)不能用 A 的行(列)向量组线性表出, B 的行(列)向量组与 A 的行(列)向

量组不等价.

【评注】 通过这几个题总结一下对于抽象的向量组如何用推理的方法来判断线性表出.

295 【答案】 D

【分析】 按向量组秩的定义

$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的极大线性无关组有 r 个向量

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中存在 r 个向量线性无关而任意 $r+1$ 个必线性相关,

故应选(D).

例如向量组 $(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ 的秩为 3, 包含零向量的二个或三个向量组成的向量组线性相关, (A)、(B) 都不正确.

又如向量组 $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,0)$ 的秩为 3, 任何两个向量都线性无关, (C) 不正确.

296 【答案】 C

【分析】 列向量作行变换, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -1 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & -14 & -7 \\ 0 & -13 & -26 & -26 & -13 \\ 0 & 6 & 12 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$.

因为三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是极大线性无关组, 故选(C).

【评注】 多数情况下向量组的极大线性无关组是不唯一的. 例如, 本题中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 与 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 及 $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ 和 $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ 等. 通常对列向量作初等行变换在将矩阵化成阶梯形矩阵之后, 选每行第一个非 0 的数所在的列(本题是 1、2、4 列)为极大线性无关组较简便. 可略去行列式为不为 0 的思考.

297 【答案】 C

【分析】 将表出关系合并成矩阵形式有

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记}} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] C = AC.$$

因四个四维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 故 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| \neq 0$. $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 是可逆矩阵, 故有 $r(C) = r(AC) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故知 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = r(C) = 3$, 故应选(C).

298 【答案】 B

【分析】 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 知秩 $r(I) = 3$, 由 β_j 非零知 $r(II) \geq 1$.

记 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$ 则 A 是秩为 3 的 3×4 矩阵.

因为 α_i 与 β_j 正交, 即 $\alpha_i^T \beta_j = 0$, 即 $A\beta_j = 0$, 所以 β_j 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解. 那么 $r(II) \leq n - r(A) = 4 - 3 = 1$. 从而必有 $r(II) = 1$.

299 【答案】 D

【分析】 两向量组等价 $\Leftrightarrow$ 可以相互表出.

两向量组等价 $\Rightarrow$ 等秩.

(I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $r(I) = 4$.

选项(B) 只有三个向量, $r(B) \leq 3$, 可排除

选项(A) 因 $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$, 线性相关, $r(A) \leq 3$, 可排除.

选项(C), 因 $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0$, 线性相关, $r(C) \leq 3$, 可排除.

由排除法, 应选(D).

【评注】 向量组(D) 设为 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_4 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_5 = \alpha_4 - \alpha_1$, 即向量组(D) 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 反之, $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1, \alpha_3 = \beta_3 - \beta_2 + \beta_1, \alpha_4 = \beta_4 - \beta_3 + \beta_2 - \beta_1$, 故(I) $\cong$ (D), 应选(D).

注意: 等价与向量个数无关, 只要能相互表出即可, 且等价 $\Rightarrow$ 等秩, 反之不成立.

300 【答案】 B

【分析】 由于 $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b$, 那么

$$A(3\alpha_1 - 2\alpha_2) = 3A\alpha_1 - 2A\alpha_2 = 3b - 2b = b,$$

$$A\left[\frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)\right] = \frac{1}{3}A\alpha_1 + \frac{2}{3}A\alpha_2 = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}b = b,$$

$$A\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] = \frac{1}{2}A\alpha_1 + \frac{1}{2}A\alpha_2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b,$$

可知 $3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 均是 $Ax = b$ 的解.

而 $A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = b - b = 0$, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的解, 不是 $Ax = b$ 的解, 故应选(B).

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = b$ 的解, $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = b$ 的解. 知道这一点, $3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 是 $Ax = b$ 的解也就一目了然了.

301 【答案】 A

【分析】 由 $A\alpha_i = b (i = 1, 2, 3)$ 有

$$A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = b - b = 0$$

$$A(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 - 2A\alpha_3 = b + b - 2b = 0$$

$$A\left[\frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right] = \frac{2}{3}A\alpha_2 - \frac{2}{3}A\alpha_1 = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}b = 0$$

$$A(\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3) = A\alpha_1 - 3A\alpha_2 + 2A\alpha_3 = b - 3b + 2b = 0$$

所以, $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1), \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$ 均是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 若 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是导出组 $Ax = 0$ 的解. 知道这一关系式立即可看出本题应当选(A).

302 【答案】 B

【分析】 如果(A)是 $Ax = 0$ 的解, 则(D)必是 $Ax = 0$ 的解. 因此(A)、(D)均不是 $Ax = 0$ 的解.

由于 α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 那么 α_1, α_2 可表示 $Ax = 0$ 的任何一个解 η , 亦即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \eta$ 必有解. 因为

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

可见第 2 个方程组无解, 即 $(2, 2, -5)^T$ 不能由 α_1, α_2 线性表出, 故(C)不成立, 应选(B).

【评注】 本题知道正确的选项必在(B)和(C)中, 其实只要解其中的一个方程组就可以了, 是没有必要像现在这样解两个方程组的, 但如果有的题目确实需要解两个系数矩阵一样的方程组时, 用本题的方法是简捷可取的.

303 【答案】 B

【分析】 A 是 3×4 矩阵, 由 $Ax = 0$ 的通解知 $n - r(A) = 1$, 即 $r(A) = 3$. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 则

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

即 $\alpha_1 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0$.

即 $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$. 即 $A_2 y = 0$ 有非零解 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ 故应选 B.

关于(A): 若 $A_1 y = 0$ 有非零解, 设为 $(c_1, c_2, c_3)^T$ 即有

$$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ 即 } c_1\alpha_2 + c_2\alpha_3 + c_3\alpha_4 = 0$$

那么 $0\alpha_1 + c_1\alpha_2 + c_2\alpha_3 + c_3\alpha_4 = 0$. 于是 $(0, c_1, c_2, c_3)^T$ 也是 $Ax = 0$ 的非零解与题设矛盾. 对于(C)、(D) 理由相同.

304 【答案】 C

【分析】 由于 A 是 $m \times n$ 矩阵, 知 A^T 是 $n \times m$ 矩阵, 那么 $A^T x = 0$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组, 从而 $m - r(A^T) = t$. 又因 $r(A) = r(A^T)$, 所以 $r(A) = m - t$, 即应当选(C).

【评注】 要搞清楚齐次方程组基础解系中解向量的个数与系数矩阵秩之间的关系. 对于用矩阵形式给出的方程组要分清方程的个数以及未知数的个数(即若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 是 m 个方程 n 个未知数的方程组), 本题还涉及 $r(A) = r(A^T)$ 这一关系式.

305 【答案】 B

【分析】 因为 α_1, α_2 线性无关, 所以 $Ax = 0$ 至少有两个线性无关的解, 故

$$n - r(A) \geq 2 \quad \text{即} \quad r(A) \leq 3 - 2 = 1$$

因此排除(A)、(C)

对于(B) 和(D), 因为 α_2 不是方程组(D) 的解, 因此排除(D).

【评注】 先利用秩来排除, 再利用解的概念来选择比较方便. 如果每个都直接代入验算是不是解会比较麻烦.

306 【答案】 B

【分析】 $Ax = 0$ 是三个未知数三个方程的齐次线性方程组, $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是行列式 $|A| = 0$, 由于

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)$$

可见 $a = 1$ 能保证 $|A| = 0$, 但 $|A| = 0$ 并不必须 $a = 1$. 即 $a = 1$ 是充分条件并不必要, 故应选(B).

【评注】 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow A$ 的列向量线性相关. 故本题也可用初等行变换求 $r(A)$ 来解. 特别地, 若 A 是 n 阶矩阵, 则 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$. 本题还涉及到范德蒙行列式这一知识点.

307 【答案】 D

【分析】 由 $n - r(A) = n - (n - 1) = 1$, 故 $Ax = 0$ 的通解形式为 $k\eta$, $\eta \neq 0$. 因为 η_1 或 η_2 有可能是零解, 所以不能保证(A)或(B)一定是通解.

由于 $\eta_1 + \eta_2$ 有可能为 0, 所以不能保证(C)一定是通解.

因为 $\eta_1 \neq \eta_2$ 肯定有 $\eta_1 - \eta_2 \neq 0$, 因此 $\eta_1 - \eta_2$ 必是 $Ax = 0$ 的非零解, 所以(D)正确.

308 【答案】 C

【分析】 因为齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解, 且其任一解均可以由 α 线性表出, 说明 $Ax = 0$ 的基础解系只有一个向量. 因此 $r(A) = 3 - 1 = 2$. 对矩阵 A 作初等变换有

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & a+2 & 4 \\ 5 & a & a+5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & a+5 & -2 \\ 0 & a+5 & a-5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & a+5 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

可见当 $a = 3$ 或 $a = -5$ 时, 均有秩 $r(A) = 2$, 所以应选(C).

【评注】 因为 A 中已有二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, 因此, 只要 $|A| = 0$ 就能保证 $r(A) = 2$. 所以本题也可以通过计算 $|A| = 0$ 来求 a .

309 【答案】 D

【分析】 由 A 是 5×4 矩阵, $Ax = 0$ 的基础解系中含有 2 个解向量, 即 $4 - r(A) = 2$ 知 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关, 命题①正确.

由 $A\eta_1 = 0, A\eta_2 = 0$, 有

$$3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 6\alpha_4 = 0$$

分别相减、相加可得:

$$\alpha_1 - 2\alpha_4 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

那么

$$\alpha_1 = 0, \alpha_3 + 2\alpha_4, \text{命题③正确}$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3, \text{命题④正确}$$

关于②, 如果 α_3, α_4 线性相关, 不妨设 $\alpha_3 = k\alpha_4$

则 $\alpha_2 = -(k+4)\alpha_4$ 与秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 相矛盾.

310 【答案】 D

【分析】 AB 是 m 阶矩阵, 那么 $ABx = 0$ 只有零解的充分必要条件是 $r(AB) = m$.

又因 $r(AB) \leq r(B) \leq \min(m, n)$.

故当 $m > n$ 时必有

$$r(AB) \leq r(B) \leq n < m$$

即 $m > n$ 时, $ABx = 0$ 必有非零解.

311 【答案】 C

【分析】 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow A$ 的列向量组线性无关. 故应选(C).

注意① 方程组不一定是 n 个方程 n 个未知数, 所以(A)是充分条件, 不必要.

② 方程组 $Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) \neq r(\bar{A})$. 此时 $r(A)$ 可以为 n 也可以不等于 n .

例如 $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ 都有方程组 $Ax = b$ 无解, 但齐次方程组 $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ 前者只有零解后者有非零解, 所以(B)既不充分也不必要.

③ 请你举例说明(D)既不是充分条件也不是必要条件.

312 【答案】 D

【分析】 若 α_i 是 $Ax = b$ 的解, $\alpha_i \in k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$, 即方程组 $\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \eta = \alpha_i$ 有解.

即 $\xi_1x_1 + \xi_2x_2 = \alpha_i - \eta$ 有解. 将 $\xi_1, \xi_2, \alpha_1 - \eta, \alpha_2 - \eta, \alpha_3 - \eta, \alpha_4 - \eta$ 合并成矩阵, 并作初等行变换, 得

$$[\xi_1, \xi_2 : \alpha_1 - \eta, \alpha_2 - \eta, \alpha_3 - \eta, \alpha_4 - \eta] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

显然 $\alpha_4 - \eta$ 不能由 ξ_1, ξ_2 线性表出, 即 α_4 不包含于 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$ 之中, 应选(D).

313 【答案】 A

【分析】 因为 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = m$ 说明 A 的行向量组线性无关, 那么其延伸组必线性无关, 故增广矩阵 (A, b) 的 m 个行向量也必线性无关. 因此, $r(A) = r(\bar{A}) = m$, 即方程组 $Ax = b$ 必有解. 但方程组有解时, 并不要求秩必为 m . 所以(A)是充分条件. 那么(B)、(C)、(D)错在何处?

当 $m = n$ 时, A 是秩为 r 的 n 阶矩阵, 由于增广矩阵的秩不能保证必是 r , 因此推导不出方程组必有解;

当 $r(A) = n$ 时, 增广矩阵的秩 $r(\bar{A})$ 有可能是 $n+1$, 因此不能保证 $Ax = b$ 必有解. (注意 A 是 $m \times n$ 矩阵, m 有可能大于 n) 你能举个反例吗?

当方程个数小于未知数个数时, $Ax = b$ 是否有解仍是不确定的. 所以(B)、(C)、(D)均不是方程组有解的充分条件.

【评注】 请考查下列方程组, 以说明(B)、(C)、(D)均不正确

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

314 【答案】 B

【分析】 因为线性方程组 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b)$. 当 A 的行向量组线性无关时, 有 $r(A) = m$, 那么此时亦有 $r(A, b) = m$, 所以方程组 $Ax = b$ 有解.

但是当 A 的行向量组线性相关时, 方程组 $Ax = b$ 也可能有解. 例如 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$, 故(B)是充分条件.

注意 ① 当 $m \leq n$ 时, 若 $r(A) = \min(m, n) = m$, 方程组 $Ax = b$ 有解, 而 $m > n$ 时, 由 $r(A) = n \not\Rightarrow r(A, b) = n$, 故(A)不正确. 例如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, 有 $r(A) = 2$ 而 $r(\bar{A}) = 3$.

② 当 $m < n$ 时, 齐次方程组 $Ax = 0$ 肯定有非零解. 而非齐次线性方程组 $Ax = b$ 则可以无解, 这里不要混淆. 例如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 故(C)不正确.

③ 关于(D) 即 $r(A) = n$ 可参看 ①.

315 【答案】 D

【分析】 $Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n$, 但 $r(A) = n \not\Rightarrow r(\bar{A}) = n$, 所以(A)不正确.

$Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$, 但 $r(A) < n \not\Rightarrow r(A) = r(\bar{A})$, 所以(B)不正确.

$Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) \neq r(\bar{A})$, 但 $r(A) \neq r(\bar{A}) \not\Rightarrow r(A) < n$, 所以(C)不正确.

$Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$, 自然有 $r(A) < n$, 故(D)正确.

【评注】 请构造简单的反例说明(A)、(B)、(C)均错误.

316 【答案】 A

【分析】 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 A 中有 n 阶子式不为零, 而 A 中又不存在 $n+1$ 阶子式, 故必有 $r(A) = n$. 同理, 若 A 中有 m 阶子式不为零, 则必有 $r(A) = m$, 本题就是考查秩与方程组解之间的关系.

对于(A), 因为 $r(A) = n$, 而 $Ax = 0$ 是 n 个未知数的齐次方程组, 所以 $Ax = 0$ 必只有零解. 即(A)正确.

关于(B), 当 $r(A) = n$ 时, 增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩有可能是 $n+1$, 所以 $Ax = b$ 可能无解. 即(B)不正确. 为此, 请思考下例

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

有 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解.

至于(C)和(D), $r(A) = m$ 说明 A 的行向量组线性无关, 那么其延伸组必线性无关, 所以 $r(\bar{A}) = m$. 因此, 方程组 $Ax = b$ 必有解. 但是否必有唯一解? $Ax = 0$ 是否只有零解都是不确定的.

例如, $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 有无穷多解

仅当 $m = n$ 时, (C)、(D) 才正确.

【评注】 本题涉及矩阵的秩、向量组的秩的概念及相互关系, $Ax = 0$ 及 $Ax = b$ 解的理论. 另外要注意的是, 当 A 是 $m \times n$ 矩阵且 $r(A) = n$ 时, 不要误以为必有 $r(\bar{A}) = n$, 因为 $r(\bar{A}) = n + 1$ 是有可能的.

317 【答案】 B

【分析】 由 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \beta$ 知

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta$$

即 $\gamma_1 = (1, 2, -1, 0)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的解. 同理 $\gamma_2 = (1, 1, 1, 1)^T, \gamma_3 = (2, 3, 1, 2)^T$ 也均是 $Ax = \beta$ 的解. 那么

$$\eta_1 = \gamma_1 - \gamma_2 = (0, 1, -2, -1)^T$$

$$\eta_2 = \gamma_3 - \gamma_2 = (1, 2, 0, 1)^T$$

是导出组 $Ax = 0$ 的解, 并且它们线性无关. 于是 $Ax = 0$ 至少有两个线性无关的解向量, 有 $n - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$, 又因为 α_1, α_2 线性无关, 有 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \geq 2$. 所以必有 $r(A) = 2$, 从而 $n - r(A) = 2$, 因此 η_1, η_2 就是 $Ax = 0$ 的基础解系, 根据解的结构 (B) 入选.

【评注】 $\gamma_3 - \gamma_1 = (1, 1, 2, 2)^T$ 也是 $Ax = 0$ 的解, (D) 的错误在于 $Ax = b$ 的特解不正确, 而 (A) 和 (C) 的特解是正确的, 错在 $Ax = 0$ 的基础解系.

这一类题目考查解的性质与解的结构. 既要检查是不是 $Ax = b$ 或 $Ax = 0$ 的解, 还要检查是否符合解的结构.

318 【答案】 C

【分析】 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

因为 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解, 即三个平面没有公共交点. 又因平面的法向量 $n_1 = (1, 2, 1), n_2 = (2, 3, 1), n_3 = (1, -1, -2)$ 互不平行. 所以三个平面两两相交, 围成一个三棱柱.

【评注】 数学一考生应当知道平面与三元一次方程组之间的对应关系. 每种图形与秩有什么样的联系?

319 【答案】 C

【分析】 (A) 中 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ 表明三个平面的法向量平行, 从而三个平面相互平行(或重合), 又 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha) = 2$ 说明三个平面没有公共的交点, 因而这三个平面两两平行, 至多有两个重合.

当三个平面两两相交成三条平行直线时, 必有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha) = 3$, 但当 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha) = 3$ 时, 有可能其中两个平面平行, 第 3 个平面和它们相交, 所以(B) 是必要条件不充分.

而(D) $\Leftrightarrow$ (A) 或(B), 亦知(D) 是必要条件, 不充分.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个均线性无关 $\Leftrightarrow$ 任何两个平面都不平行相交成一条直线, 而 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ 三个平面没有公共交点. 故应选(C).

320 【答案】 A

【分析】 如果 α 是(I) 的解, 有 $A\alpha = 0$, 可得

$$A^T A\alpha = A^T(A\alpha) = A^T 0 = 0$$

即 α 是(II) 的解. 故(I) 的解必是(II) 的解.

反之, 若 α 是(II) 的解, 有 $A^T A\alpha = 0$, 用 α^T 左乘可得

$$(A\alpha)^T (A\alpha) = (\alpha^T A^T)(A\alpha) = \alpha^T (A^T A\alpha) = \alpha^T 0 = 0$$

若设 $A\alpha = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 那么

$$(A\alpha)^T (A\alpha) = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$

即 $A\alpha = 0$. 亦即 α 是(I) 的解. 因此(II) 的解也必是(I) 的解. 所以应选(A).

【评注】 若 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 其中 $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是实数, 则 $\alpha^T \alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, 因此

$$\alpha^T \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

要熟悉内积, 习惯符号 $\alpha^T \beta, \alpha^T \alpha$ 等含义. 本题说明, $Ax = 0$ 和 $A^T Ax = 0$ 是同解方程组.

321 【答案】 A

【分析】 若 $A^n \alpha = 0$, 则 $A^{n+1} \alpha = A(A^n \alpha) = A0 = 0$, 即若 α 是(I) 的解, 则 α 必是(II) 的解, 可见命题(1) 正确.

下面的问题是选(A) 还是选(B)? 即 ② 与 ④ 哪一个命题正确?

如果 $A^{n+1} \alpha = 0$, 而 $A^n \alpha \neq 0$, 那么对于向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^n\alpha$, 一方面有:

若 $k\alpha + k_1 A\alpha + k_2 A^2\alpha + \dots + k_n A^n\alpha = 0$, 用 A^n 左乘上式的两边, 并把 $A^{n+1}\alpha = 0, A^{n+2}\alpha = 0, \dots$ 代入, 得

$$kA^n \alpha = 0,$$

由于 $A^n \alpha \neq 0$ 而知必有 $k = 0$. 类似地用 A^{n-1} 左乘可得 $k_1 = 0, \dots$

因此, $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^n\alpha$ 线性无关. 但另一方面, 这是 $n+1$ 个 n 维向量它们必然线性相关, 两者矛盾. 故 $A^{n+1}\alpha = 0$ 时, 必有 $A^n \alpha = 0$, 即(II) 的解必是(I) 的解. 因此命题 ② 正确.

故命题 ①、② 正确, 即 $A^n x = 0$ 和 $A^{n+1} x = 0$ 是同解方程, 故应选(A).

322 【答案】 D**【分析】** 由特征值的性质: $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$

现在

$$\sum a_{ii} = 1 + (-3) + 1 = -1$$

故可排除(C).

显然, 矩阵 A 中第 2、第 3 两列成比例, 易知行列式 $|A| = 0$, 故 $\lambda = 0$ 必是 A 的特征值, 因此可排除(B).

对于(A) 和(D) 的选择, 我们可以用特殊值法, 由于

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

说明 $\lambda = 1$ 不是矩阵 A 的特征值.

故可排除(A).

【评注】 这一类题目最直接方法是计算 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ -4 & \lambda + 3 & -3 \\ -2 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ -4 & \lambda & -3 \\ -2 & \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \dots$$

另一个方法是验算、代入 λ 值. 看那个选项中 λ 满足 $|\lambda E - A| = 0$.但是应当会用: $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$, $\prod \lambda_i = |A|$, 及特殊值法来排除. 也许会更方便.**323 【答案】 C****【分析】** 由 A^* 的特征值是 1, -1, 2, 4 知 $|A^*| = -8$, 又因 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 而知 $|A|^3 = -8$, 于是 $|A| = -2$. 因 $\lambda = \frac{|A|}{\lambda^*}$, 故矩阵 A 的特征值是: $-2, 2, -1, -\frac{1}{2}$.因此, $A - E$ 的特征值是 $-3, 1, -2, -\frac{3}{2}$, 因为特征值非零, 故矩阵 $A - E$ 可逆.类似地易见, 矩阵 $A + 2E$ 的特征值中含有 0, 所以矩阵 $A + 2E$ 不可逆.**【评注】** 既要会由矩阵 A 的特征值求 A^* 的特征值, 也要会由 A^* 的特征值求 A 的特征值.若 λ_1 是 A 的特征值, 则 $\lambda_1^* = \frac{|A|}{\lambda_1}$ 是 A^* 的特征值. 即 $\lambda_1 \lambda_1^* = |A|$ 根据 $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, 可知 A 可逆的充分必要条件是 $\lambda_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.**324 【答案】 A****【分析】** 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 可得到:

$$A^2\alpha = \lambda^2\alpha, \quad A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha, \quad (A-E)\alpha = (\lambda-1)\alpha$$

说明 $A^2, A^{-1}, A-E$ 与 A 的特征值是不一样的(但 A 的特征向量也是它们的特征向量). 由排除法应选(A).

$$\text{或由于 } |\lambda E - A^T| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A|$$

A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以 A 与 A^T 有相同的特征值.

325 【答案】 C

【分析】 因(A)和(D)的向量成比例. 如果(A)中 $(-1, 1, 0)^T$ 不是矩阵 A 的特征向量, 则(D)中的 $(3, -3, 0)^T$ 亦肯定不是矩阵 A 的特征向量, 而选项唯一, 所以(A)、(D)均是矩阵 A 的特征向量.

$$\text{由 } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 18 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

所以(B)是矩阵 A 的特征向量. 故应选(C).

$$\text{其实 } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ -14 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ 故(C)不是 } A \text{ 的特征向量.}$$

【评注】 本题用定义 $A\alpha = \lambda\alpha$ 来判断.

326 【答案】 A

【分析】 设 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量, 按定义有

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

对应分量相等, 即有

$$\begin{cases} 3-4-3=\lambda \\ a+4+6=-2\lambda \\ 3-2b-3=3\lambda \end{cases}$$

可见 $\lambda = -4, a = -2, b = 6$, 所以应选(A).

【评注】 利用特征值、特征向量的定义建立方程组, 然后求出参数的值. 这种方法是基本的, 也是重要的.

327 【答案】 D

【分析】 由 $A\alpha_3 = 2\alpha_3 \Rightarrow A(-5\alpha_3) = -5A\alpha_3 = -10\alpha_3 = 2(-5\alpha_3)$ 故(A)正确.

如果 α_1, α_2 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量, 那么只要 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 仍是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

本题中, 由 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1, A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$ 知 α_1, α_2 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量, 从而(B)、(C)均正确.

利用“特征值不同特征向量线性无关”可知, 不同特征值的特征向量其线性组合不再是特征向量, 故应选(D).

【评注】 若 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$. 则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是矩阵 A 的特征向量. 这是因为: 若 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)$, 则由 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$

而有 $\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$, 于是 $(\lambda - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda - \lambda_2)\alpha_2 = 0$. 因为不同特征值的特征向量线性无关. 从而 $\lambda - \lambda_1 = 0, \lambda - \lambda_2 = 0$ 与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 相矛盾. 所以 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是矩阵 A 的特征向量. 要注意(B)、(D) 的区别, 不应混淆.

若 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 Λ 由 A 的特征值所构成, P 由 A 的线性无关的特征向量所构成. 并且 P 中特征向量的次序与 Λ 中特征值的次序是协调的.

328 【答案】 B

【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 有 $A^2\alpha = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha, \alpha \neq 0$
即 α 必是 A^2 属于特征值 λ^2 的特征向量.

$$\text{又 } (E - \frac{1}{2}A)\alpha = \alpha - \frac{1}{2}A\alpha = (1 - \frac{1}{2}\lambda)\alpha, \alpha \neq 0$$

知 α 必是矩阵 $E - \frac{1}{2}A$ 属于特征值 $1 - \frac{1}{2}\lambda$ 的特征向量.

关于(2) 和(3) 则不一定成立. 这是因为

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha) = P^{-1}A\alpha = \lambda P^{-1}\alpha$$

按定义, 矩阵 $P^{-1}AP$ 的特征向量是 $P^{-1}\alpha$. 由于 $P^{-1}\alpha$ 与 α 不一定共线, 因此 α 不一定还是 $P^{-1}AP$ 的特征向量, 即相似矩阵的特征向量是不一样的.

线性方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 与 $(\lambda E - A^T)x = 0$ 不一定同解, 所以 α 不一定是第二个方程组的解, 即 α 不一定是 A^T 的特征向量.

【评注】 本题考查相关联矩阵特征向量之间的联系. 注意与下一题的区别!

329 【答案】 D

【分析】 若 α 是 $2A$ 的特征向量. 即 $(2A)\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$.

那么 $A\alpha = \frac{\lambda}{2}\alpha$, 所以 α 是矩阵 A 属于特征值 $\frac{\lambda}{2}$ 的特征向量. 即 D 正确.

由于方程组 $(\lambda E - A^T)x = 0, (\lambda E - A^*)x = 0, (\lambda E - A^2)x = 0$ 与 $(\lambda E - A)x = 0$ 不一定同解, 所以 α 不一定是 A 的特征向量.

$$\text{如 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 的特征向量是 } (1, 0, 0)^T, \text{ 而 } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 有 } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 有 } \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 均不是 } A \text{ 的特征向量.}$$

330 【答案】 A

【分析】 方法一: 由 $A\alpha_2 = 3\alpha_2$, 有 $A(-\alpha_2) = 3(-\alpha_2)$, 即当 α_2 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量时, $-\alpha_2$ 仍是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量. 同理 $2\alpha_3$ 仍是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量.

当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, P 由 A 的特征向量所构成, Λ 由 A 的特征值所构成, 且 P 与 Λ 的位置是对应一致的. 现在, 矩阵 A 的特征值是 $1, 3, -2$, 故对角矩阵 Λ 应当由 $1, 3, -2$ 构成, 因此排除 (B)、(C). 由于 $2\alpha_3$ 是属于 $\lambda = -2$ 的特征向量, 所以 -2 在对角矩阵 Λ 中应当是第 2 列, 故应选 (A).

方法二: 由题设条件知, 若取 $Q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则有

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$(D) \text{ 现取 } P = [\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} QC$$

$$\text{则 } P^{-1}AP = (QC)^{-1}AQC = C^{-1}(Q^{-1}AQ)C$$

$$= C^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix} C$$

$$\text{其中 } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

故应选 (A).

【评注】 当 $P^{-1}AP = B$ 时, P 中列向量不是矩阵 A 的特征向量. 当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, P 中列向量是矩阵 A 的特征向量, Λ 是矩阵 A 的特征值, 且 P 与 Λ 中特征向量与特征值位置要对应正确.

331 【答案】 D

$$\text{【分析】 若 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}, P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$$

则有

$$AP = P\Lambda$$

即

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = [a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, a_3\alpha_3]$$

可见 α_i 是矩阵 A 属于特征值 a_i 的特征向量 ($i = 1, 2, 3$), 又因矩阵 P 可逆, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

若 α 是属于特征值 λ 的特征向量, 则 $-\alpha$ 仍是属于特征值 λ 的特征向量, 故 (A) 正确.

若 α, β 是属于特征值 λ 的特征向量, 则 $2\alpha + 3\beta, \dots$ 仍是属于特征值 λ 的特征向量. 本题中, α_2, α_3 是属于 $\lambda = 5$ 的线性无关的特征向量, 故 $\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_3$ 仍是 $\lambda = 5$ 的特征向量, 并且 $\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_3$ 线性无关, 故 (B) 正确.

关于 (C), 因为 α_2, α_3 均是 $\lambda = 5$ 的特征向量, 所以 α_2 与 α_3 谁在前谁在后均正确. 即 (C) 正确.

由于 α_1, α_2 是不同特征值的特征向量, 因此 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 不再是矩阵 A 的特征向量, 故 (D) 错误.

332 【答案】 D

【分析】 (A) 是实对称矩阵, 实对称矩阵必可以相似对角化.

(B) 是下三角矩阵, 主对角线元素就是矩阵的特征值, 因而矩阵有三个不同的特征值, 所以矩阵必可以相似对角化.

(C) 是秩为 1 的矩阵, 由 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - 4\lambda^2$, 知矩阵的特征值是 4, 0, 0. 对于二重根 $\lambda = 0$, 由秩

$$r(0E - A) = r(A) = 1$$

知齐次方程组 $(0E - A)x = 0$ 的基础解系有 $3 - 1 = 2$ 个线性无关的解向量, 即 $\lambda = 0$ 有两个线性无关的特征向量. 从而矩阵必可以相似对角化.

(D) 是上三角矩阵, 主对角线上的元素 1, 1, -1 就是矩阵的特征值, 对于二重特征值 $\lambda = 1$, 由秩

$$r(E - A) = r \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

知齐次方程组 $(E - A)x = 0$ 只有 $3 - 2 = 1$ 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 1$ 只有一个线性无关的特征向量, 故矩阵必不能相似对角化. 所以应当选 (D).

【评注】 (A) 与 (B) 是矩阵相似对角化的充分条件. 当特征值有重根时, 有些矩阵能相似对角化, 有些矩阵不能相似对角化, 这时关键是检查秩, 以便查清矩阵是否有 n 个线性无关的特征向量.

333 【答案】 C

【分析】 根据 A 和 B 相似的必要条件

$$(1) r(A) = r(B) \quad (2) |A| = |B| \quad (3) \lambda_A = \lambda_B \quad (4) \sum a_{ii} = \sum b_{ii}$$

易见 (A) 秩不等、(B) 主对角元之和不等、(D) 行列式不等或主对角元素之和不等, 故均不相似. 所以应选 (C). 实际上, 对于 (C) 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)$$

知矩阵 A 的特征值为 2, 0, 0. 又因秩 $r(0E - A) = 1$, 有 $n - r(0E - A) = 2$. 即齐次方程组 $(0E - A)x = 0$ 有 2 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 0$ 有两个线性无关的特征向量. 从而

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

类似地

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

334 【答案】 C

【分析】 $AB = \begin{bmatrix} b_{12} & 2b_{11} & -b_{13} \\ b_{22} & 2b_{21} & -b_{23} \\ b_{32} & 2b_{31} & -b_{33} \end{bmatrix}$ 可以由 B 作列变换得到.

将 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ 的 1, 2 列互换再将第 2 列乘 2, 第 3 列乘 -1 , 得 AB , 即

$$\begin{aligned} BE_{12}E_2(2)E_3(-1) &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \\ &= B \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} & 2b_{11} & -b_{13} \\ b_{22} & 2b_{21} & -b_{23} \\ b_{32} & 2b_{31} & -b_{33} \end{bmatrix} = AB \end{aligned}$$

B 是可逆阵, 两边左乘 B^{-1} , 得 $B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 故 $A \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

应选(C).

335 【答案】 B

【分析】 $A \sim C$, 即存在可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP = C$. $B \sim D$, 即存在可逆阵 Q , 使 $Q^{-1}BQ = D$,

故存在可逆阵 $\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$, 使得

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} & O \\ O & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1}AP & O \\ O & Q^{-1}BQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}$$

得 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}$, 应选(B).

(A)、(C)、(D) 显然不成立.

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 和 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A \sim C$ 和 $B \sim D$

但 $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 和 $C+D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 不相似

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $CD = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不相似

关于(D),请说出

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不相似的理由?

336 【答案】 B

【分析】 由于“ k 重特征值最多有 k 个线性无关的特征向量”,那么当 $r(A_{3 \times 3}) = 1$ 时, $(0E - A)x = 0$ 必有两个线性无关特征向量,故 $\lambda = 0$ 的重数 ≥ 2 ,即 $\lambda = 0$ 至少是二重特征值,当然也可能三重.例 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r(A) = 1$,但 $\lambda = 0$ 是三重特征值.

故应选(B).

337 【答案】 D

【分析】 请考察下列矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

它们的特征值全是零,而秩分别为0,1,2.可见仅由特征值全是零是不能确定矩阵的秩的.

【评注】 若 A 的特征值全为零,而且知道 A 有几个线性无关的特征向量就可以确定矩阵 A 的秩.因为若 A 有 k 个线性无关的特征向量,即齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系有 k 个向量.因此

$$n - r(A) = k$$

也就可以求出秩 $r(A) = n - k$.**338** 【答案】 B【分析】 由 $A \sim B$,即存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$ 知

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| &= |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P| \\ &= |P^{-1}| |\lambda E - A| |P| = |\lambda E - A| \end{aligned}$$

即 A 与 B 有相同的特征值.但当 A, B 有相同特征值时, A 与 B 不一定相似,例如

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

虽然 A, B 有相同的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,但由于 $r(A) \neq r(B)$, A, B 不可能相似.所以,相似的必要条件是 A, B 有相同的特征值.**339** 【答案】 D【分析】 由 $A \sim B$,即存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$;若 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$,有

$$B(P^{-1}\alpha) = (P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha) = P^{-1}A\alpha = \lambda(P^{-1}\alpha)$$

即 α 是 A 的特征向量, $P^{-1}\alpha$ 是 B 的特征向量.所以, A 与 B 的特征向量不同.

反之,若 A 与 B 有相同的特征向量,因为它们可以属于不同的特征值,即

$$A\alpha = \lambda\alpha, B\alpha = \mu\alpha \quad \lambda \neq \mu$$

由于 A 与 B 的特征值不同, A 和 B 不可能相似. 因此, A 与 B 有相同的特征向量对于 $A \sim B$ 来说既不充分又不必要, 所以应当选(D).

340 【答案】 A

【分析】 若 $A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{bmatrix}$, 则有可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$, 或 $AP = P\Lambda$

令 $P = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$, 则有

$$A[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{bmatrix} = [a_1\gamma_1, a_2\gamma_2, \dots, a_n\gamma_n]$$

从而有

$$A\gamma_i = a_i\gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由 P 可逆, 有 $\gamma_i \neq 0$, 且 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 线性无关. 按定义知 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 是 A 的 n 个线性无关的特征向量.

反之, 若 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 满足

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$$

那么, 用分块矩阵有

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

由于矩阵 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ 可逆. 故 $P^{-1}AP = \Lambda$. 即 A 与对角矩阵 Λ 相似.

【评注】 这是一个重要的定理, 从证明中应认识到 $A \sim \Lambda$ 时, Λ 是矩阵 A 的特征值, 相似时的可逆矩阵 P 是矩阵 A 的特征向量.

341 【答案】 A

【分析】 用配方法, 有

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

可见二次型的正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$. 因此, (A) 是二次型的标准形.

进一步还知道所用坐标变换是:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

与

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = 2y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \text{ 即 } \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

即经坐标变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{有 } x^T A x = y^T \Lambda y = y_1^2 + 4y_2^2$$

本题并没有要求所作的是什么坐标变换,只是要说明选项(A)的标准形是存在相应的坐标变换的.

【评注】 二次型的标准形是不唯一的,化二次型为标准形所用坐标变换也是不唯一的.只要两个二次型的正、负惯性指数相同就一定有坐标变换把一个二次型转化为另一个二次型.本题中 $y_1^2 + y_2^2, 4y_1^2 + 9y_2^2, 5y_1^2 + 6y_2^2 \cdots$ 等均可以是二次型 f 的标准形.

对于本题二次型矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, A 的特征多项式是

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 5 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

故 A 的特征值是 1, 6, 0. 矩阵 A 有两个正特征值,没有负特征值,因此, $p = 2, q = 0$. 所以利用特征值也可知(A)是标准形.

作为选择题来求标准形,即可用配方法也可用特征值法,可根据题目来决定方法.只要能求出 p 与 q 问题也就解决了.

342 【答案】 B

【分析】 二次型的规范形中,平方项的系数只能是 1, -1, 0. 故应当排除(A)

只要求出二次型的正、负惯性指数就可以确定二次型的规范形.通常可以求二次型矩阵的特征值或用配方法化二次型为标准形来实现.

方法一: 二次型 f 经整理为

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 14x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

由于

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -7 & -2 \\ -7 & \lambda - 5 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 12 & \lambda - 12 & 0 \\ -7 & \lambda - 5 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda + 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 12 & 0 & 0 \\ -7 & \lambda + 2 & 2 \\ -2 & 4 & \lambda + 4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 6)(\lambda - 12) \end{aligned}$$

故矩阵 A 的特征值是 12, -6, 0. 因此二次型正惯性指数 $p = 1$, 负惯性指数 $q = 1$, 故应选(B).

方法二: 本题若用配方法,有

$$f = 5 \left[x_1^2 + 2x_1 \left(\frac{7}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \right) + \left(\frac{7}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \right)^2 \right] + 5x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 - 5 \left(\frac{7}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \right)^2$$

$$= 5 \left(x_1 + \frac{7}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \right)^2 - \frac{24}{5}(x_2 + x_3)^2$$

亦知 $p = 1, q = 1$.

而应当选(B).

【评注】 本题中,若令
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_3 = \sqrt{5}x_2 + \sqrt{5}x_3 \end{cases} \quad (1)$$

而认为规范形是 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ 就不正确了. 因为变换(1)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 0$$

所以上述变换(1)不是坐标变换(即不是可逆线性变换),当然 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ 也就不是规范形了.

另外,坐标变换 $x = Cy$ 中, C 是可逆矩阵不能忽略或遗忘.

343 【答案】 A

【分析】 按惯性定理,经坐标变换二次型的正(负)惯性指数不变.

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + ax_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 + bx_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{因为} \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{知(1)是坐标变换,于是}$$

$$x^T A x = y_1 y_2$$

$$\text{再令} \begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{因为} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{知(2)是坐标变换,从而}$$

$$x^T A x \xrightarrow{(1)} y^T B y \xrightarrow{(2)} z_1^2 - z_2^2$$

故应选(A).

344 【答案】 D

【分析】 化二次型为标准形既可用正交变换法也可用配方法,化成标准形和所用坐标变换都是不惟一的.(A)、(C)均不正确.

规范形由二次型的正、负惯性指数所确定,而正、负惯性指数在坐标变换下是不变的.故(D)正确.

345 【答案】 C

【分析】 二次型正定的必要条件是: $a_{ii} > 0$.

在(D)中, 由于 $a_{33} = 0$, 易知 $f(0, 0, 1) = 0$, 与 $x \neq 0, x^T A x > 0$ 相矛盾.

二次型正定的充分必要条件是顺序主子式全大于零. 在(A)中, 二阶主子式

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

在(B)中, 三阶主子式 $\Delta_3 = |A| = -1$.

因此(A)、(B)、(D)均不是正定矩阵. 故应选(C).

对(C). 因 $A_1 = 2 > 0, A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$,

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 > 0.$$

故(C)是正定二次型.

【评注】 利用正定的必要条件, 先排除不正定的矩阵是方便的. 关于(C), 用顺序主子式判别最简捷. 当然, 利用特征值或配方化标准形来看正惯性指数是否为 n 也是可以的.

346 【答案】 B

【分析】 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$

知矩阵 A 的特征值为 $1, 1, -1$.

$A + kE$ 的特征值为: $k+1, k+1, k-1$.

$$\begin{cases} k+1 > 0 \\ k-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow k > 1.$$

347 【答案】 C

【分析】 (A) $q = 0$ 是正定的必要条件.

(B) 是正定的充分条件, 正定不要求特征值全为 1.

(D) 矩阵 C 缺少条件可逆, 若 C 可逆且 $A = C^T C$, 则 A 与 E 合同.

348 【答案】 C

【分析】 实对称矩阵 A, B 合同的充要条件是 $x^T A x, x^T B x$ 有相同的正、负惯性指数;

由合同定义: $C^T A C = B, (C \text{ 可逆})$. 故合同的必要条件是: $r(A) = r(B)$ 且行列式 $|A|$ 与 $|B|$ 同号.

本题(A) $r(A) = 1 \neq r(B) = 2$ (且 $|A|, |B|$ 不同号) (A) 不合同. (B) $|A|, |B|$ 不同号. (B) 不合同.

易见(C)中矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 0$, 而矩阵 B 的特征值为 $1, 3, 0$, 所以二次型 $x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同的正、负惯性指数, 所以 A 和 B 合同. 故应选(C).

而(D)中, A 的特征值为 $1, \pm 2, B$ 的特征值为 $-1, -2, -2$, 从而 $x^T A x$ 与 $x^T B x$ 正、负惯性指数不同而不合同.

349 【答案】 B

【分析】 二次型 $x^T A x$ 经正交变换 $x = Qy$ 化为新的二次型 $y^T B y$, 由于 $x^T A x = (Qy)^T A (Qy) = y^T (Q^T A Q) y$, 则有 $Q^T A Q = B$ 即原二次型矩阵 A 和新二次型矩阵 B 合同, 又因 Q 是正交矩阵 $Q^T = Q^{-1}$, 故

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = B$$

因此在正交变换下, 二次型矩阵 A 与 B 不仅合同而且相似.

因为两个实对称矩阵相似的充分必要条件是有相同的特征值, 现在

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

知矩阵 A 的特征值是 2, 4, -2. 所以应当选(B).

【评注】 如果你选择的是(A). 看看是不是在用配方法? 用配方法得到的矩阵仅仅合同并不相似, 这一点要理解清楚. (D) 是二次型 f 的规范形的矩阵, 仍然是只合同不相似.

本题中, 与矩阵 A 合同的矩阵是(A)、(B)、(D) 与 A 相似的是(B).

350 【答案】 B

【分析】 按定义, 若存在可逆矩阵 C 使 $C^T A C = B$, 则称 A 与 B 合同.

因为矩阵 C 可逆, 故有

$$r(A) = r(C^T A C) = r(B)$$

即(B) 正确.

注意, 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则有 $C^T A C = B$, 即 A 与 B 合同.

此时 A 的特征值是 1, 1, B 的特征值是 1, 4; $(3, 2)^T$ 是 A 的特征向量, 但不是 B 的特征向量; $|A| = 1$, $|B| = 4$ 亦不相同. 说明(A)、(C)、(D) 均不正确.

【评注】 实对称矩阵 A 与 B 合同的必要条件是 $r(A) = r(B)$, 注意 $r(A) = r(B)$ 时, A 与 B 不一定合同, 这些地方不要混淆. A 与 B 合同的充分条件是有相同的特征值.

351 【答案】 D

【分析】 实对称矩阵相似 $\Leftrightarrow$ 有相同的特征值.

实对称矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 有相同的正、负惯性指数.

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$$

可知 $A \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 从而 A 与 B 既不相似也不合同.

352 【答案】 D

【分析】 (A) 如果 A 可逆, 则有 $A^T = A^T A^{-1} A$, 即 A^{-1} 与 A^T 合同.

(B) 若 A 与 E 合同, 即 $\exists$ 可逆矩阵 C , 使 $C^T A C = E$.

于是 $|C^T| |A| |C| = 1$, 即 $|C|^2 \cdot |A| = 1$, 故 $|A| > 0$

(C) 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A^2 的特征值是 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$, 由 A 可逆知 A^2 的特征值全大于 0, 从而 $x^T A^2 x$ 正定, 亦即 A^2 与 E 合同.

(D) 当 $|A| > 0$ 时, 不能保证 A 的特征值全大于 0, 因此 A 可能不正定, 故 A 不一定与 E 合同.

353 【答案】 C

【分析】 A 和 B 合同 $\Leftrightarrow$ 二次型 $x^T A x$ 和 $x^T B x$ 有相同的正、负惯性指数

由 $A \sim B$ 相似, 知 A 和 B 有相同的特征值 $\Rightarrow$ 二次型 $x^T A x$ 和 $x^T B x$ 有相同的标准形 $\Rightarrow A$ 和 B 合同. (A) 正确.

由 $A \simeq B$ 合同 $\Rightarrow A$ 和 B 有相同的正、负惯性指数 $\Rightarrow A$ 和 B 的特征值有相同的正、负号, 而 B 和 $9B$ 的特征值是 9 倍的关系, 从而 A 和 $9B$ 的特征值有相同的正、负号, 故 A 和 $9B$ 有相同的正、负惯性指数, (B) 正确.

因为 A 和 $A + kE$ 正、负惯性指数不一定相同, 从而 $A + kE$ 和 $B + kE$ 的正、负惯性指数可以不同. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 4 \end{bmatrix}; A - E = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}, B - E = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 3 \end{bmatrix} \text{ 故 (C) 不正确.}$$

若 A 和 B 合同, 则存在可逆矩阵 C 使 $C^T A C = B$. 因为 C 可逆, 故

$$r(B) = r(C^T A C) = r(AC) = r(A)$$

即 (D) 正确.

354 【答案】 C

【分析】 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow$ 二次型 $x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同的正、负惯性指数. 用配方法有:

$$x^T A x = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1(ax_2 + x_3) + (ax_2 + x_3)^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2ax_2x_3 - (ax_2 + x_3)^2$$

$$= (x_1 + ax_2 + x_3)^2 + (a - a^2)x_2^2$$

$$x^T B x = 2x_1^2 + ax_2^2$$

矩阵 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow a$ 与 $a - a^2$ 有相同的正、负号

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ 或 } 1 - a > 0$$

$$\Leftrightarrow a < 1.$$

355 【答案】 D

【分析】 将初等行、列变换, 用左、右乘初等阵表出, 由题设 $AE_{ij} = B, E_{ij}B = C$.

故 $C = E_{ij}B = E_{ij}AE_{ij}$. 因 $E_{ij} = E_{ij}^T = E_{ij}^{-1}$,

故 $C = E_{ij}AE_{ij} = E_{ij}^{-1}AE_{ij} = E_{ij}^TAE_{ij}$, 故即 $C \cong A, C \sim A$, 且 $C \simeq A$, 故应选 (D).

| 概率论与数理统计 |

356 【答案】 D

【分析】 事件 $A =$ “到时刻 T 为止, 系统仅更换了一个元件” 这件事等价于“第一个元件在时刻 T 之前已经损坏,” 即事件“ $X_1 < T$ ”, 同时“第二个元件换上后 T 时刻还在工作”, 即事件“ $X_1 + X_2 > T$ ”, 所以事件 $A = \{X_1 < T, X_1 + X_2 > T\}$. 选择(D).

(A) 不能选, 因为仅 $X_1 < T$ 不能保证 $X_1 + X_2 > T$, 也许两个元件寿命加在一起还小于 T .

(C) 也不能选, 因为 $X_1 + X_2 > T$ 的情况中包含第一个元件的寿命大于 T . 在 T 时刻并没有更换元件.

357 【答案】 D

【分析】 由图形立即得到正确选项为(D), 事实上, 由题设知

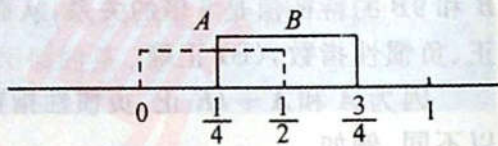
$$X \sim f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } P(A) = P\left\{0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$P(AB) = P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4},$$

因此成立 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即 A 与 B 相互独立.

**358** 【答案】 B

【分析】 由题设知, 试验的基本事件共有 4 个:

$w_1 =$ “正, 正”, $w_2 =$ “正, 反”, $w_3 =$ “反, 正”, $w_4 =$ “反, 反”,

所以 $A = \{w_1, w_2\}$, $B = \{w_2, w_4\}$, $C = \{w_2, w_3, w_4\}$, $P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{3}{4}$, 显然 A 与 B 独立, $B \subset C$, 故 B, C 不独立, 选项(A) 不成立.

又 $BC = B$, $ABC = AB$, $P(ABC) = P(AB) = P(A)P(B) = P(A)P(BC)$, 即 A 与 BC 独立, 选项(B) 正确.

而 $P(ABC) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B)P(AC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$, $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(C)P(AB) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$, 故选项(C)、(D) 不正确.

359 【答案】 A

【分析】 讨论事件 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 的独立性, 可等价地考虑 A, B, C 的独立性. 概率为零的事件与任何事件均独立, A, B 又相互独立, A, B, C 必定两两独立, 且事件 C 也与事件 AB 独立, 所以成立

$$P(ABC) = P(AB)P(C) = P(A)P(B)P(C).$$

总之 A, B, C 相互独立.

答案应选(A).

【评注】在解题中我们用了一个结论:如果 $P(C) = 0$ 或 1 , 则 C 与任何事件相互独立. 这结论在判断事件组是否相互独立时经常用到, 务必记住. 我们可以简单证明结论如下:

当 $P(C) = 0$ 时, 对任何事件 A , $P(AC) \leq P(C) = 0$, 则 $P(AC) = 0 = P(A)P(C)$.

当 $P(C) = 1$ 时, $P(\bar{C}) = 0$, $\bar{C}$ 与任何事件 A 独立, C 与 A 也独立.

360 【答案】 C

【分析】 已知 $P(\bar{A} | B) = P(B | \bar{A})$, $\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}$, 即 $P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, 所以 $P(A) + P(B) = 1$. 选项(A)、(B)是 A 与 B 独立的充要条件, 因此不能选. 由“对称性”知选项(C)正确, 应选(C).

事实上, $P(\bar{B} | A) = P(A | \bar{B})$, $\frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$, 即 $P(A) = P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, 所以 $P(A) + P(B) = 1$.

选项(D)未必成立, 这是因为 $P(A | B) = P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B) \Leftrightarrow P(A | B) = \frac{1}{2}$ 即 $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{2}P(B)$, 此与 $P(\bar{A} | B) = P(B | \bar{A})$ 不等价.

361 【答案】 C

【分析】 $A - B$ 与 C 相互独立. $P((A - B) \cap C) = P(A - B)P(C)$.

$P((A - B) \cap C) = P(A\bar{B}C) = P(AC - B) = P(AC) - P(ABC)$.

而 $P(A - B)P(C) = [P(A) - P(AB)]P(C) = P(A)P(C) - P(AB)P(C)$.

所以, $A - B$ 与 C 相互独立的充要条件为 $P(ABC) = P(AB)P(C)$.

即 AB 与 C 相互独立.

362 【答案】 D

【分析】 已知 $AB = \emptyset$, 我们无法断言 $\bar{A}\bar{B} = \emptyset$ 或 $\neq \emptyset$, 因此(A)、(B)不能选. 由于 $AB = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$ 所以 $A \cup \bar{B} = \bar{B}$, 选择(D).

【评注】 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ 与 $P(\bar{A}\bar{B}) \neq 0$, 并非是逻辑关系中的“非此即彼”, 因为 A, B 并不是事先给出的确定的事件, 而是满足条件“ $AB = \emptyset$ ”的无穷多个事件, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ 有时成立, 有时不成立. 例如 $A = \bar{B}$, 则 $AB = \bar{B}B = \emptyset$, $\bar{A}\bar{B} = B\bar{B} = \emptyset$, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$; 又如事件 $A = \left\{0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\}$, $B = \left\{\frac{3}{4} \leq X \leq 1\right\}$, 其中随机变量 X 在 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, 则 $AB = \emptyset$, 而 $\bar{A}\bar{B} = \{-\infty < X < 0\} \cup \left\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}\right\} \cup \{1 < X < +\infty\}$, $P(\bar{A}\bar{B}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{4} \neq 0$.

363 【答案】 C

【分析】 由于 $AB = \emptyset$, 就有 $A \subset \bar{B}$, 也就有 $P(A) \leq P(\bar{B})$. 如果 $P(A) = 1$, 则 $P(\bar{B}) \geq P(A) = 1$, $P(\bar{B}) = 1$, 即有 $P(B) = 0$, 选择(C).

如果 $P(A) = 0$, 只能得到 $P(\bar{B}) \geq 0$.

364 【答案】 B

【分析】 这是一道考查概率性质的选择题, 应用概率运算性质知, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B)$, 选项(A)不成立. $P(A - B) = P(A) - P(AB) \geq P(A) - P(B)$, 故正确选项为(B). 而 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \leq \frac{P(A)}{P(B)}$, 所以(D)不成立. 至于选项(C), 它可能成立也可能不成立, 例如 $AB = \emptyset$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则 $P(AB) = 0 < P(A)P(B)$; 如果 $A \subset B$, 则 $P(AB) = P(A) \geq P(A)P(B)$.

365 【答案】 A

【分析】 设 $P(A) = x$, 则 $P(A) = P(B) = P(C) = x$

且

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = x^2.$$

由公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

得 $\frac{9}{16} = 3x - 3x^2 + 0$, 所以 $x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$, 解得 $x = \frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$.

$x = \frac{3}{4}$ 是不可能的, 因为 $P(A \cup B \cup C) \geq P(A)$, 不可能 $\frac{9}{16} \geq \frac{3}{4}$, 故只能有 $x = \frac{1}{4}$.

366 【答案】 D

【分析】 由于 $P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$, 现 $P(B|A) = 1$, 就等价于 $P(BA) = P(A)$.

根据加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(B) + [P(A) - P(AB)] = P(B).$$

所以选择(D), 而不是(C).

选项(A)、(B)是不能选的. 因为题目的条件是概率, 仅从概率的条件是得不出事件的结论的.

367 【答案】 D

【分析】 $P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$ 意指: 在 C 发生的条件下, A 与 B 独立, 所以“在 C 发生的条件下, A 发生与否不影响 B 发生的概率”, 即 $P(B|AC) = P(B|C)$, 故选择(D). 我们也可以通过计算来确定选项.

事实上, $P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$, 而

$$P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(AC)}{P(C)} \cdot \frac{P(ABC)}{P(AC)} = P(A|C)P(B|AC),$$

即 $P(A|C)P(B|AC) = P(A|C)P(B|C)$,

所以 $P(B|AC) = P(B|C)$.

选项(A)、(B)、(C)分别是 A 与 C、B 与 C、AB 与 C 独立的充要条件.

【评注】 条件 $P(ABC) > 0$, 除了保证各条件概率有意义外, 还保证各项概率均不为零.

368 【答案】 D

【分析】 设 A—取出 n 个球同一种颜色;

B—黑色的球.

则所求概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

$$P(A) = \frac{C_{2n-1}^n + C_{2n}^n}{C_{4n-1}^n}, P(AB) = \frac{C_{2n}^n}{C_{4n-1}^n}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(B|A) &= \frac{\frac{C_{2n}^n}{C_{4n-1}^n}}{\frac{C_{2n-1}^n + C_{2n}^n}{C_{4n-1}^n}} = \frac{C_{2n}^n}{C_{2n-1}^n + C_{2n}^n} = \frac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} + \frac{(2n)!}{n!n!}} \\ &= \frac{\frac{2n}{n}}{1 + \frac{2n}{n}} = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

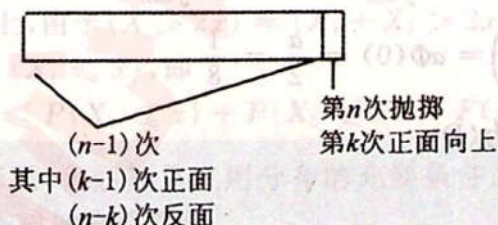
【评注】 有的选择题中, 问题是带有 n 的计算题, 这时可用 $n=1$ 或 $n=2$ 的具体值代入计算. 将计算结果与各选择项对比, 不难判断哪个选择项是正确的.

本题令 $n=1$, 这时就有一个白球, 2 个黑球, 一次取一个球, 当然就一种颜色, 该球为黑色的概率为 $\frac{2}{3}$.

将 $n=1$ 代入 (A) 和 (B), 分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 所以选项 (A)、(B) 和 (C) 均不可能. 就可以判断必为 (D) 了.

369 【答案】 D

【分析】



总共抛掷 n 次, 其中有 k 次出现正面, 余下的为 $n-k$ 次反面.

第 n 次必是正面向上, 前 $n-1$ 次中有 $n-k$ 次反面, $k-1$ 次正面.

根据伯努利公式, 所求概率为

$$C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \frac{1}{2} = C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

370 【答案】 B

【分析】 分布律必定成立 $\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = 1$, 即 $1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} e^{-2} = C e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = C \cdot e^{-1}$, 所以 $C = e$. 这里用到了公式 $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $-\infty < x < +\infty$,

本题也可对比泊松分布 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\dots$.

可以看出当 $\lambda=1$ 时, 就有 $P\{X=k\} = \frac{1}{k!} e^{-1}$, $k=0,1,2,\dots$, 即 $C=e$, 选(B).

371 【答案】 C

【分析】 应用分布函数充要条件判断, 由 $G_i(x)$ 的形式是分段函数, $x=1$ 是分界点, 于是立即想到要判断 $\lim_{x \rightarrow 1^+} G_i(x) = G_i(1) = 0$ 是否成立, 即 $G_i(x)$ 是否右连续. 容易计算 $\lim_{x \rightarrow 1^+} G_1(x) = 1 - F(1) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} G_2(x) = 1 + F(1) \geq 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} G_4(x) = F(1) + F(1) \neq 0$, $G_1(x), G_2(x), G_4(x)$ 都不右连续, 所以正确选项是(C). 如果需要直接证明 $G_3(x)$ 是分布函数, 那就需要按充要条件逐条加以验证.

372 【答案】 C

【分析】 由于 $F(x)$ 是单调不减的非负函数, 所以(A)、(B)不成立. 已知 $f(x)$ 是偶函数, 因此有 $F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t) dt = \int_x^{+\infty} f(t) dt$, $F(x) + F(-x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt = 1$, 选择(C). 而 $2F(x) - F(-x) = 2 \int_{-\infty}^x f(t) dt - \int_x^{+\infty} f(t) dt = 2 - 3 \int_x^{+\infty} f(t) dt \neq 1$, 选项(D)不成立.

373 【答案】 D

【分析】 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = a + b = 1$, 知四个选项均符合这个要求, 因此只好通过 $F(0) = \frac{1}{8}$ 确定正确选项.

$$\begin{aligned} \text{由于 } F(0) &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_{-\infty}^0 f_2(x) dx \\ &= a \Phi\left(\frac{0-0}{\sigma}\right) = a \Phi(0) = \frac{a}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

所以 $a = \frac{1}{4}$, 正确选项为(D).

374 【答案】 B

【分析】 由于 $F(x)$ 是右连续函数, 故 $F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 1 = 1$. 所以应选(B).

$F(x)$ 不一定左连续所以 $x < a$ 时 $F(x) = 0$ 不能推出 $F(a) = 0$. (A) 不正确.

$P\{X < a\} = \frac{1}{2}$ 不能得到 $F(a) = P\{X \leq a\} = \frac{1}{2} + P\{X = a\} = \frac{1}{2}$. (C) 不正确.

$P\{X \geq a\} = \frac{1}{2}$ 即 $P\{X < a\} = \frac{1}{2}$. 同(C). 故(D) 也不正确.

375 【答案】 C

【分析】 应用分布函数的充要条件: 单调不降; $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$; 右连续.

概率密度函数的充要条件: $f(x) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 就可以确定正确的选项为(C).

事实上, 由(C) 得到 $f_2(x) + a[f_1(x) - f_2(x)] = af_1(x) + (1-a)f_2(x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \text{且 } \int_{-\infty}^{+\infty} [af_1(x) + (1-a)f_2(x)]dx &= a \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx + (1-a) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx \\ &= a + (1-a) = 1 \end{aligned}$$

(C) 满足概率密度函数的充要条件, 所以选(C).

其他选项均不正确. 例如: 选 $X_1 \sim U(-1, 0)$ 和 $X_2 \sim U(0, 1)$,

$$\text{所以 } F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x+1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x. \end{cases} \quad \text{和} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \leq x. \end{cases}$$

$$\text{以及 } f_1(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \text{和} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

这时, (A) 得 $(1+a)F_2(x) - aF_1(x)$, 令 $x = -\frac{1}{2}$.

$$(1+a)F_2\left(-\frac{1}{2}\right) - aF_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2} < 0$$

这时, (D) 得 $f_1(x)f_2(x) \equiv 0$, (A) 不成立, (D) 也不成立.

(B) 不成立, 因为 $aF_1(+\infty)F_2(+\infty) = a < 1$.

376 【答案】 C

【分析】 由(A) 知当 $F(+\infty) = 1$ 时, $G(+\infty) = 2$, 而分布函数 $G(+\infty) = 1$, 故(A) 不成立.

同理, 由(D) $G(+\infty) \geq 2F(+\infty) = 2$, 不可能. (D) 也不能选.

对选项(B), 考虑特例, 当 $X_1 = X_2$, 当然 X_1 与 X_2 有相同分布 $F(x)$, $G(2x) = P\{X \leq 2x\} = P\{X_1 + X_2 \leq 2x\} = P\{2X_1 \leq 2x\} = P\{X_1 \leq x\} = F(x)$, 故(B) 不成立.

正确选项应为(C). 事实上, 由于 $\{X > 2x\} = \{X_1 + X_2 > 2x\} \supset \{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}$, 故 $\{X \leq 2x\} \subset \{X_1 \leq x\} \cup \{X_2 \leq x\}$, 即

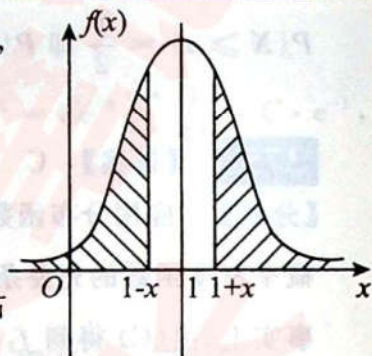
$$G(2x) = P\{X \leq 2x\} \leq P\{X_1 \leq x\} + P\{X_2 \leq x\} = F(x) + F(x) = 2F(x).$$

【评注】 上述这些选择题, 我们都是应用分布的充要条件来确定正确选项的, 必须记住: 分布函数, 密度函数, 分布律的充要条件.

377 【答案】 B

【分析】 由于 $X \sim N(1, \sigma^2)$, 所以 X 的密度函数 $f(x)$ 的图形是关于 $x = 1$ 对称的, 而 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ 是曲边梯形面积, 由此即知正确选项是(B). 当然我们也可以应用特殊值

(例如取 $x = 0$) 或者通过计算 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-1}{\sigma}\right)$ 来确定正确选项, 读者不妨自己计算一下, 从中确定正确选项.



378 【答案】 C

【分析】 函数 $F(x)$ 成为分布函数的充要条件为:

① $F(x)$ 单调不减; ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; ③ $F(x)$ 右

连续.

(A) $F(ax)$ 当 $a < 0$ 时, ①, ②, ③ 都不满足, 故 $F(ax)$ 不是分布函数.

(B) $F(x^2 + 1)$ 不满足条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, 不是分布函数.

(C) $F(x^3 - 1)$ 条件 ①, ②, ③ 均成立, 是分布函数.

(D) $F(|x|)$ 不满足条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, 不是分布函数.

379 【答案】 B

【分析】 概率密度的充要条件为 ① $f(x) \geq 0$, ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

(A) $f(2x)$ 不是概率密度. 因 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \neq 1$.

(B) $f(2-x)$ 是概率密度. 因 $f(2-x) \geq 0$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(2-x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(2-x) d(2-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

对(C)、(D) 容易举出反例, 使 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2) dx$ 均不为 1.

例如 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & -4 < x < 4, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$ 是密度函数.

但 $f^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{64} & -4 < x < 4, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$ 和 $f(x^2) = \begin{cases} \frac{1}{8} & -2 < x < 2, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$

显然都不是密度函数.

380 【答案】 C

【分析】 由题设 $P\{X > k\} = P\{X < k\}, P\{X = k\} = 0$,

又 $P\{X > k\} + P\{X < k\} + P\{X = k\} = 1$, 所以 k 应使 $P\{X < k\} = \frac{1}{2}$,

$$\text{即 } \int_{-\infty}^k f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

由密度函数图形及概率的几何意义知正确选项是(C). 如果通过计算 $\int_{-\infty}^k f(x) dx = \frac{1}{2}$ 来确定正确选项, 此时需要按 k 的取值不同来计算, 其结果是一样的.

381 【答案】 C

【分析】 概率 $P\{\lambda < X < \lambda + a\} (a > 0)$, 显然与 a 有关, 固定 λ 随 a 的增大而增大, 因而选择(C).

事实上, 由于 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = A \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} dx = Ae^{-\lambda}$, 解得 $A = e^{\lambda}$, 概率 $P\{\lambda < X < \lambda + a\} = A \int_{\lambda}^{\lambda+a} e^{-x} dx = e^{\lambda}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda-a}) = 1 - e^{-a}$, 与 λ 无关随 a 的增大而增大.

382 【答案】 B

【分析】 $F(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 0\} \leq y\} = 1 - P\{\min\{X, 0\} > y\}$
 $= 1 - P\{X > y, 0 > y\}.$

当 $y < 0$ 时, $P\{X > y, 0 > y\} = P\{X > y\}$, $F(y) = 1 - P\{X > y\} = P\{X \leq y\} = \Phi(y).$

当 $y \geq 0$ 时, $P\{X > y, 0 > y\} = 0$, $F(y) = 1.$

383 【答案】 A

【分析】 方法一: 先确定 A . $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 Ax(1-x) dx = 1.$

$$1 = A \int_0^1 (x - x^2) dx = A \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{A}{6}, A = 6.$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 6x(1-x) dx = 6 \int_0^{\frac{1}{2}} (x - x^2) dx = 6 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{2}.$$

方法二: $f(x)$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 是对称的, 故 $F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2}.$

384 【答案】 B

【分析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + be^{-x}) = a = 1.$

$F(x)$ 为连续型 X 的分布, 故 $F(x)$ 必连续, $F(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 即 $a + b = 0, b = -1.$

385 【答案】 D

【分析】 方法一: $P\{X \leq 2 | X \geq 1\} = \frac{P\{X \geq 1, X \leq 2\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{1 \leq X \leq 2\}}{\int_1^{+\infty} e^{-x} dx}$

$$= \frac{\int_1^2 e^{-x} dx}{\int_1^{+\infty} e^{-x} dx} = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - e^{-1}.$$

方法二: $P\{X \leq 2 | X \geq 1\} = 1 - P\{X > 2 | X \geq 1\} = 1 - P\{X \geq 2 | X \geq 1\}$
 $= 1 - P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-1}.$

【评注】 当随机变量 X 服从指数分布 $E(\lambda)$ 时,必具有性质:无记忆性,即 $P\{X \geq s+t | X \geq t\} = P\{X \geq s\}$, 其中 $s, t \geq 0$.

方法二就用了这性质.

这性质证明: $P\{X \geq t\} = \int_t^{+\infty} f(x)dx = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}, t \geq 0$

$$P\{X \geq s+t | X \geq t\} = \frac{P\{X \geq s+t\}}{P\{X \geq t\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P\{X \geq s\}, s, t \geq 0.$$

386 【答案】 C

【分析】 X 落入 $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, +\infty)$ 的概率应为 $\frac{7}{100}, \frac{24}{100}, \frac{38}{100}, \frac{24}{100}, \frac{7}{100}$, 即 $0.07, 0.24, 0.38, 0.24, 0.07$.

$$P\{X \leq x_4\} = 1 - P\{X > x_4\} = 1 - 0.07 = 0.93 = \Phi(1.5).$$

而 $X \sim N(15, 4)$, 所以 $\frac{X-15}{2} \sim N(0, 1)$.

$$P\{X \leq x_4\} = P\left\{\frac{X-15}{2} \leq \frac{x_4-15}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{x_4-15}{2}\right).$$

所以 $\frac{x_4-15}{2} = 1.5,$

解得 $x_4 = 18$.

又 $P\{X \leq x_3\} = 1 - P\{X > x_3\} = 1 - 0.24 - 0.07 = 0.69 = \Phi(0.5),$

$$P\{X \leq x_3\} = P\left\{\frac{X-15}{2} \leq \frac{x_3-15}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{x_3-15}{2}\right), \text{得 } \frac{x_3-15}{2} = 0.5,$$

故 $x_3 = 16$.

由对称性 x_1 与 x_4, x_2 与 x_3 都关于 15 对称.

所以

$$x_1 = 15 - (x_4 - 15) = 12, x_2 = 15 - (x_3 - 15) = 14.$$

387 【答案】 C

【分析】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其密度函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$

$F(x)$ 的拐点的 x 坐标 a 应有 $F''(a) = f'(a) = 0$, 故 $a = \mu$ 为 $f(x)$ 的驻点, 当 $x = \mu$ 时, $F(\mu) = \frac{1}{2}$, 故曲线拐点在 $(\mu, \frac{1}{2})$.

388 【答案】 A

【分析】 依题意要通过确定 $Z = X+Y$ 分布函数 $F_Z(z)$ 有几个间断点来确定正确选项. 如果 $F_Z(z)$ 在 $z = a$ 间断, 即 $F_Z(a) - F_Z(a-0) \neq 0$, 也就有 $P\{Z = a\} \neq 0$, 因此我们可以通过计算概率 $P\{Z = a\}$ 或求 $Z = X+Y$ 的分布函数来确定正确选项.

方法一(概率法)

由全概率公式知,对任意实数 a ,

$$\begin{aligned} P\{X+Y=a\} &= P\{X+Y=a, Y=1\} + P\{X+Y=a, Y=-1\} \\ &= P\{X=a-1, Y=1\} + P\{X=a+1, Y=-1\} \\ &\leq P\{X=a-1\} + P\{X=a+1\} = 0, \end{aligned}$$

所以 $X+Y$ 的分布函数是连续函数,选择(A).

方法二(分布函数法)

已知 $X \sim F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 又 X 与 Y 相互独立,所以应用全概公式得 $X+Y$ 的分布函数

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X+Y \leq z\} \\ &= P\{X+Y \leq z, Y=1\} + P\{X+Y \leq z, Y=-1\} \\ &= P\{X \leq z-1, Y=1\} + P\{X \leq z+1, Y=-1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X \leq z-1\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z+1\} \\ &= \frac{1}{2}F_X(z-1) + \frac{1}{2}F_X(z+1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } z+1 \leq 0, \text{ 即 } z \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda(1+z)}), & \text{当 } z+1 > 0, z-1 \leq 0, \text{ 即 } -1 < z \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(e^{-\lambda} + e^{\lambda})e^{-\lambda z}, & \text{当 } z-1 > 0, \text{ 即 } z > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$F_Z(z)$ 是连续函数,选择(A).

389 【答案】 C

【分析】 记事件 $A = \{X \leq x\}, B = \{Y \leq y\}$, 则

$$\begin{aligned} P\{X > x, Y > y\} &= P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P\{X \leq x\} - P\{Y \leq y\} + P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y). \end{aligned}$$

390 【答案】 B

【分析】 我们只能在(A)与(B)或(C)与(D)中选一正确答案. 由微积分知识知(C)、(D)未必正确, 因此只考虑(A)、(B). 根据题设得:

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p_1 & p_1 \end{pmatrix}, \text{ 即}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p_1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x, \end{cases}$$

$$X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}, \text{ 即}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p_2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x, \end{cases}$$

所以 $F_1(x) \leq F_2(x)$ 就有 $1 - p_1 \leq 1 - p_2$, 即 $p_2 \leq p_1$, 选择(B). (注意: $p_1 = p_2$ 等价于 $F_1(x) = F_2(x)$).

由 $F_1(x) \leq F_2(x)$ 无法确定对一切 x , $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 有完全一致的大小关系. 例如:

$$F_1(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ e^x, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } f_2(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ e^x, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$F_1(x) \leq F_2(x), \text{ 但是 } f_1(x) - f_2(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ -e^x, & x \leq 0. \end{cases}$$

391 【答案】 D

【分析】 显然我们可以通过计算每个选项中的随机变量的分布来确定正确选项, 这样会有大量计算. 我们也可以利用指数分布的一些性质来判断.

如果 $X \sim E(\lambda)$ 则 $EX = \frac{1}{\lambda}$.

$$E(X+Y) = EX + EY = \frac{2}{\lambda} \neq \frac{1}{2\lambda},$$

$$E(X-Y) = EX - EY = 0 \neq \frac{1}{2\lambda},$$

所以(A)不对, (B)也不对; 当 X, Y 独立时, $\max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

显然不等于 $E(2\lambda)$ 的分布函数 $F_1(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 所以选择(D).

事实上, $\min(X, Y)$ 的分布函数

$$\begin{aligned} P\{\min(X, Y) \leq x\} &= 1 - P\{\min(X, Y) > x\} \\ &= 1 - P\{X > x, Y > x\} = 1 - P\{X > x\}P\{Y > x\} \\ &= 1 - [1 - F(x)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

即 $\min(X, Y) \sim E(2\lambda)$.

【评注】 应用数字特征可以判断随机变量不服从某种分布.

392 【答案】 A

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P\{X=Y\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=Y=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=k, Y=k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=k\}P\{Y=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2(k-1)} \end{aligned}$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (q^2)^{k-1} = p^2 \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1+q)(1-q)}$$

$$= \frac{p}{1+q} = \frac{p}{2-p}.$$

393 【答案】 C

【分析】 显然,我们需由等式 $P\{X+Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ 确定 μ ,为此需要知道 $X+Y$ 的分布.

由题设 X 与 Y 独立知 $X+Y \sim N(2\mu, 1)$, 所以由

$$P\{X+Y \leq 1\} = \Phi\left(\frac{1-2\mu}{1}\right) = \Phi(1-2\mu) = \frac{1}{2}$$

得到 $1-2\mu = 0, \mu = \frac{1}{2}$, 选择(C).

394 【答案】 D

【分析】 为确定选项,必须知道相应事件中随机变量的分布,由题设可知 $X+Y \sim N(0, 2)$, $X-Y \sim N(0, 2)$ 所以选项(A)、(B)都不成立,否则若(A)成立,则(B)必成立(事实上, $P\{X+Y \geq 0\} = P\{X-Y \geq 0\} = \frac{1}{2}$).

而对于(D),有

$$P\{\min(X, Y) \geq 0\} = P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = P\{X \geq 0\}P\{Y \geq 0\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

所以正确选项是(D).

至于(C), 概率

$$P\{\max(X, Y) \geq 0\} = 1 - P\{\max(X, Y) < 0\} = 1 - P\{X < 0, Y < 0\}$$

$$= 1 - P\{X < 0\}P\{Y < 0\} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{4}.$$

【评注】 如果将已知分布改为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 那么正确选项是什么? 我

们应用一般模式求解,即将 (X, Y) 的联合分布写成矩阵形式,从而求出 $Z = g(X, Y)$ 的分布,进而便可确定正确选项. 依题设 X, Y 独立,因而 (X, Y) 联合分布及其函数的分布为

p_{ij}	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$
(X, Y)	$(0, -1)$	$(0, 1)$	$(1, -1)$	$(1, 1)$
$X+Y$	-1	1	0	2
$X-Y$	1	-1	2	0
$\max(X, Y)$	0	1	1	1
$\min(X, Y)$	-1	0	-1	1

由此可知 $P\{X+Y \geq 0\} = \frac{13}{16}$, $P\{X-Y \geq 0\} = \frac{15}{16}$, $P\{\max(X, Y) \geq 0\} = 1$, $P\{\min(X, Y) \geq 0\} = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$. 选择(D).

如果将已知条件改为: X, Y 独立, X 概率分布为 $P\{X = -1\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$, $Y \sim N(0, 1)$, 那么正确答案是什么?(答案为(D)).

395 【答案】 B

【分析】 两个随机变量即使是独立同分布, 也不能认为是相同的 $X = Y$, 所以不能选(A).

事实上, $P\{X = Y\} = P\{X = Y = 1\} + P\{X = Y = 0\}$

$$= P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = 0\}$$

$$= P\{X = 1\}P\{Y = 1\} + P\{X = 0\}P\{Y = 0\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

396 【答案】 C

【分析】 由题设知 $P\{X_1 + X_2 \neq 0\} = 0$, 而

$$P\{X_1 + X_2 \neq 0\} = P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} +$$

$$P\{X_1 = -1, X_2 = 0\} + P\{X_1 = 0, X_2 = -1\} +$$

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} +$$

$$P\{X_1 = 1, X_2 = 1\},$$

所以等式中的各加项概率都等于零, 据此可求得 (X_1, X_2) 的联合分布表, 并算得

$$P\{X_1 = X_2\} = P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} + P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{1}{2} \text{ 选择(C).}$$

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	
-1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

397 【答案】 D

【分析】 显然这是一道计算性选择题, 需要通过计算才能确定正确选项. 由题设知 (X, Y) 的概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

选项(C)、(D) 易于计算, 且 $P\{\min(X, Y) \geq 0\} = P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \iint_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0}} f(x, y) dx dy =$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4}, \text{ 选择(D).}$$

$$\text{又 } P\{\max(X, Y) \geq 0\} = 1 - P\{\max(X, Y) < 0\} = 1 - P\{X < 0, Y < 0\}$$

$$= 1 - \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^0 \frac{1}{4} dy = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$P\{X+Y \geq 0\} = \iint_{x+y \geq 0} f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^1 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1+x) dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$P\{X-Y \geq 0\} = \iint_{x-y \geq 0} f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (x+1) dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

所以选项(A)、(B)、(C) 都不正确.

【评注】 如果将已知条件改为: (X,Y) 的概率分布为

Y \ X	1	2
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

, 那么正确

选项是什么?

由题设不难计算出:

$$P\{\min(X,Y) \geq 0\} = P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} = \frac{1}{4}.$$

$$P\{\max(X,Y) \geq 0\} = 1 - P\{\max(X,Y) < 0\} = 1 - P\{X < 0, Y < 0\} = 1.$$

$$P\{X+Y \geq 0\} = P\{X=-1, Y=1\} + P\{X=-1, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} = 1.$$

$$P\{X-Y \geq 0\} = P\{X \geq Y\} = P\{X=1, Y=1\} = 0.$$

选项(D) 正确, 其他选项均不正确.

398 【答案】 D

【分析】 二维正态分布应具有密度函数

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ 均为常数, 记作 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$.

显然本题的 $f(x,y)$ 不具这种形式, 因此 (X,Y) 不服从二维正态, 所以(A)、(B) 不正确.

由于 $\sin x e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是奇函数, 因此 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0$.

$$\text{而 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \sin x \sin y}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \sin y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

即 $X \sim N(0,1)$, 同理可证 $Y \sim N(0,1)$. 由此可知, 虽然联合分布 (X,Y) 不服从二维正态分布, 但其边缘分布 X 与 Y 均为正态分布. 故选(D).

399 【答案】 B

【分析】 方法一: 由于联合分布决定边缘分布, 但边缘分布不能决定联合分布. 因此(A)不成立, 由(A)不成立, 可以推知(C)、(D)不一定成立, 所以选择(B).

方法二: 也可以举例给以说明. 例如

$$(X, Y) \sim$$

$X \backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$\text{和 } (U, V) \sim$$

$U \backslash V$	0	1	
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

显然, (X, Y) 与 (U, V) 具有相同的边缘分布, 均服从 $B(1, \frac{1}{2})$, 但联合分布不同. 且

$X+Y$	0	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,

$U+V$	1
P	1

以及

$X-Y$	0
P	1

,

$U-V$	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

400 【答案】 C

【分析】 设事件 $A = \{X \leq a\}$, $B = \{Y \leq b\}$, 则

$$\begin{aligned} P\{X > a, Y > b\} &= P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P\{X \leq a\} - P\{Y \leq b\} + P\{X \leq a, Y \leq b\} \\ &= 1 - F(a, +\infty) - F(+\infty, b) + F(a, b). \end{aligned}$$

【评注】 本题也可以直接用平面区域图来求解.

401 【答案】 A

【分析】 $X \sim B(1, \frac{1}{2})$, X 取值只能 $X=0$ 或 $X=1$, 将 $X=0$ 和 $X=1$ 看成完备事件组, 用全概率公式有

$$\begin{aligned} P\{X+Y \leq \frac{1}{3}\} &= P\{X=0\}P\{X+Y \leq \frac{1}{3} | X=0\} + P\{X=1\}P\{X+Y \leq \frac{1}{3} | X=1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot P\{Y \leq \frac{1}{3} | X=0\} + \frac{1}{2} \cdot P\{1+Y \leq \frac{1}{3} | X=1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot P\{Y \leq \frac{1}{3}\} + \frac{1}{2} \cdot P\{Y \leq -\frac{2}{3}\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

402 【答案】 D

$$\begin{aligned} P\{X \leq 2Y\} &= P\{X=0\} + P\{X=1, Y=1\} \\ &= \frac{2}{3} + P\{X=1\}P\{Y=1\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

403 【答案】 D

【分析】 $X_i \sim B(1, \frac{1}{2})$, 即 $\begin{array}{c|cc} X_i & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} (i = 1, 2, 3, 4).$

显然 $\begin{array}{c|cc} X_i^j & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} (i, j = 1, 2, 3, 4).$ 故 X_1, X_2^2, X_3^3, X_4^4 同服从 $B(1, \frac{1}{2})$ 分布.

至于(A)、(B)、(C) 均不正确, 可以举反例如下:
设

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X_3 \backslash X_4$	0	1
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

显然 X_1, X_2, X_3, X_4 均服从 $B(1, \frac{1}{2})$, 但 (X_1, X_2) 与 (X_3, X_4) 不同分布.

$X_1 + X_2$	0	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X_3 + X_4$	1
P	1

即 $X_1 + X_2$ 与 $X_3 + X_4$ 不同分布.

$X_1 - X_2$	0
P	1

$X_3 - X_4$	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

即 $X_1 - X_2$ 与 $X_3 - X_4$ 不同分布.

【评注】 事实上由边缘分布 X_1, X_2, X_3, X_4 不能决定联合分布 $(X_1, X_2), (X_3, X_4)$, 从而进一步可知(A)、(B) 也一定不会成立.

本题中给出的反例恰巧是 $X_1 = X_2, X_3 = 1 - X_4$.

404 【答案】 B

【分析】 $P\{\frac{X+Y}{2} + 1 = 0\} = P\{\frac{X+Y}{2} = -1\} = P\{X+Y = -2\}$
 $= P\{X = -1, Y = -1\} = P\{X = -1\}P\{Y = -1\}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

$P\{\frac{X+Y}{2} + 1 = 1\} = P\{X+Y = 0\} = P\{X = 1, Y = -1\} + P\{X = -1, Y = 1\}$
 $= P\{X = 1\}P\{Y = -1\} + P\{X = -1\}P\{Y = 1\}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

$$P\left\{\frac{X+Y}{2} + 1 = 2\right\} = P\{X+Y=2\} = P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\} = \frac{1}{4}.$$

所以 $\frac{X+Y}{2} + 1$ 服从分布 $B(2, \frac{1}{2})$.

不难计算出(A)、(C)、(D)的分布律,它们均不服从二项分布.

$X+Y+2$	0	2	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

,

$X-Y+2$	0	2	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

,

$\frac{X-Y}{2}-1$	-2	-1	0
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

405 【答案】 A

【分析】 $P\{X=1 | X+Y=2\} = \frac{P\{X=1, X+Y=2\}}{P\{X+Y=2\}}.$

$$\begin{aligned} P\{X+Y=2\} &= \sum_{k=0}^2 P\{X=k, Y=2-k\} = \sum_{k=0}^2 P\{X=k\}P\{Y=2-k\} \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-1}}{k!} \cdot \frac{e^{-1}}{(2-k)!} = e^{-2} \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!(2-k)!} = e^{-2} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \cdot e^{-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=1, X+Y=2\} &= P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\} \\ &= e^{-1} \cdot e^{-1} = e^{-2}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } P\{X=1 | X+Y=2\} = \frac{e^{-2}}{2 \cdot e^{-2}} = \frac{1}{2}.$$

【评注】 可以证明:当相互独立的随机变量 X 和 Y 均服从 $P(\lambda)$ 分布,则 $X+Y \sim P(2\lambda)$,这时 $P\{X+Y=2\} = \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-2\lambda}.$

406 【答案】 B

【分析】 方法一: $P\{X > Y\} = \sum_{i>j} P\{X=i, Y=j\} = \sum_{i>j} P\{X=i\}P\{Y=j\}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} P\{X=i\}P\{Y=j\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} \cdot p(1-p)^{j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[p \cdot \frac{(1-p)^j}{1-(1-p)} \right] p \cdot (1-p)^{j-1} \\ &= p \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{2j-1} = p \frac{(1-p)}{1-(1-p)^2} \\ &= p \cdot \frac{1-p}{p(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}. \end{aligned}$$

方法二:由对称性知 $P\{X > Y\} = P\{X < Y\} = \frac{1}{2}[1 - P\{X=Y\}].$

$$\text{而 } P\{X=Y\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=Y=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=k\}P\{Y=k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)} = p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.$$

$$\text{所以 } P\{X > Y\} = \frac{1}{2}[1 - P\{X = Y\}] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{p}{2-p}\right] = \frac{1-p}{2-p}.$$

407 【答案】 B

【分析】 设 (X_1, X_2) 的分布为 $F_1(x_1, x_2)$, (Y_1, Y_2) 的分布为 $F_2(y_1, y_2)$.

$$F_2(y_1, y_2) = P\{Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2\} = P\{2X_1 \leq y_1, \frac{1}{3}X_2 \leq y_2\}$$

$$= P\{X_1 \leq \frac{y_1}{2}, X_2 \leq 3y_2\} = F_1(\frac{y_1}{2}, 3y_2).$$

$$\text{所以 } f_2(y_1, y_2) = \frac{3}{2}f_1(\frac{y_1}{2}, 3y_2).$$

408 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P\{1 < \max(X, Y) \leq 2\} &= P\{\max(X, Y) \leq 2\} - P\{\max(X, Y) \leq 1\} \\ &= P\{X \leq 2, Y \leq 2\} - P\{X \leq 1, Y \leq 1\} \\ &= P\{X \leq 2\}P\{Y \leq 2\} - P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

409 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P\{\min(X, Y) > 1\} &= P\{X > 1, Y > 1\} = P\{X > 1\}P\{Y > 1\} \\ &= e^{-1} \cdot e^{-(\lambda+2)} = e^{-2(\lambda+1)}. \end{aligned}$$

【评注】 利用公式: $X \sim E(\lambda)$ 时, $P\{X > t\} = e^{-\lambda t}, (t > 0)$.

410 【答案】 D

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } P\{1 < \min(X, Y) \leq 2\} &= P\{\min(X, Y) > 1\} - P\{\min(X, Y) > 2\} \\ &= P\{X > 1, Y > 1\} - P\{X > 2, Y > 2\} \\ &= P\{X > 1\}P\{Y > 1\} - P\{X > 2\}P\{Y > 2\} \\ &= e^{-1} \cdot e^{-1} - e^{-2} \cdot e^{-2} = e^{-2} - e^{-4}. \end{aligned}$$

411 【答案】 D

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } E[X(X+Y-2)] &= E[X^2 + XY - 2X] = E(X^2) + E(XY) - E(2X) \\ &= DX + (EX)^2 + EX \cdot EY - 2EX = 3 + 4 + 2 - 4 = 5. \end{aligned}$$

412 【答案】 D

【分析】 由于 $DX = EX^2 - (EX)^2 \geq 0$, 故 $EX^2 \geq (EX)^2$, 选择(D). 选项(A)、(B)对某些随机变量可能成立, 对某些随机变量可能不成立. 例如, 随机变量 X 在区间 $[0, 1]$ 上服从均

匀分布, 则 $EX = \frac{1}{2}, DX = \frac{1}{12}, EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = EX$, 选项(A) 成立. 此时(B) 不成立. 又如 $X \sim N(\mu, \sigma^2), EX = \mu, DX = \sigma^2, EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$, 取 $\sigma \geq \mu = \frac{1}{2}$, 则 $EX^2 \geq 2\mu^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = EX$, 即选项(B) 成立. 此时(A) 不成立.

413 【答案】 C

【分析】 由于 $DX = D(X-c) = E(X-c)^2 - E^2(X-c)$,

所以 $E(X-c)^2 = DX + E^2(X-c)$,

选择(C).

或者是, 由于

$$E(X-c)^2 = E(X^2 - 2cX + c^2) = EX^2 - 2cEX + c^2,$$

$$[E(X-c)]^2 = (EX-c)^2 = (EX)^2 - 2cEX + c^2,$$

故 $E(X-c)^2 - E^2(X-c) = EX^2 - (EX)^2 = DX, E(X-c)^2 = DX + E^2(X-c)$ 选择(C).

414 【答案】 B

【分析】 当(B) 成立时, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a)dx = 0$.

令 $x+a=t$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt - a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ &= E(X) - a = 0 \quad \text{即 } E(X) = a. \end{aligned}$$

415 【答案】 D

【分析】 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 2$, 令 $t = \frac{x}{2}$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2tf(2t)d(2t) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} tf(2t)dt = 2,$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(2x)dx = \frac{1}{2}.$$

416 【答案】 B

【分析】 方法一: X 的分布律为

X	6	9	12
P	$\frac{C_3^3}{C_{10}^3}$	$\frac{C_3^2 C_1^1}{C_{10}^3}$	$\frac{C_3^1 C_2^2}{C_{10}^3}$

即

X	6	9	12
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$EX = 6 \times \frac{7}{15} + 9 \times \frac{7}{15} + 12 \times \frac{1}{15} = \frac{117}{15} = 7.8$$

方法二: 设 X_i —— 第 i 次取得的奖金数, $i = 1, 2, 3$.

$X = X_1 + X_2 + X_3$,

X_i	2	5
P	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$

, $EX_i = 2 \times 0.8 + 5 \times 0.2 = 2.6$. 干由

$$EX = EX_1 + EX_2 + EX_3 = 3 \times 2.6 = 7.8.$$

417 【答案】 A

【分析】 $D(X^2) = E(X^4) - (EX^2)^2$.

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2!$$

$$EX^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 4!$$

$$D(X^2) = 4! - (2!)^2 = 24 - 4 = 20.$$

【评注】 利用 $f(x)$ 是偶函数, 具有对称性, 可以简化计算. 记住公式 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

418 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } E[(X-2)^2 e^{2X}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 e^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx = e^2 \end{aligned}$$

所以选择(C). 上式最后一步是因为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$ 是正态 $N(2, 1)$ 的概率密度.

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx$ 恰是它的方差, 等于 1.

419 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } D(XY) &= E(XY)^2 - (EXY)^2 \\ &= E(X^2 Y^2) - (EXEY)^2 \\ &= EX^2 \cdot EY^2 - (1 \cdot 1)^2 \\ &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - 1 \\ &= 2 + 1^2(2 + 1^2) - 1 \\ &= 8. \end{aligned}$$

故应选(C).

420 【答案】 A

$$\text{【分析】 } \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}, EX = EY = \frac{1}{2}, DX = DY = \frac{1}{4}$$

$$\text{所以 } 1 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}, \text{ 即 } \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4}$$

$$\text{但 } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY, \text{ 即 } \frac{1}{4} = E(XY) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2},$$

所以 $E(XY) = \frac{1}{2}$, 由于 XY 的取值只有 0 和 1.

因此, $P\{XY = 1\} = \frac{1}{2}$ 即 $P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{2}$,

$$P\{X = 0, Y = 1\} = P\{Y = 1\} - P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

421 【答案】 C

【分析】 选项(B)不能选, 否则(D)必成立. 因此我们仅能在(A)、(C)、(D)中考虑, 即考虑 ρ 的符号, 而相关系数符号取决于 $\text{Cov}(X, Y) = EXY - EXEY$, 由题设知 $EX = P(A)$, $EY = P(B)$, $XY \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (因为 $P(AB) = 0$), 所以 $\text{Cov}(X, Y) = -EXEY < 0$, 选择(C).

422 【答案】 B

【分析】 直接计算 Y 与 Z 相关系数 ρ_{YZ} 来确定正确选项. 由于

$$\text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Y, aX + b) = a\text{Cov}(X, Y), \quad DZ = D(aX + b) = a^2 DX,$$

$$\rho_{YZ} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY} \sqrt{DZ}} = \frac{a\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DY} \sqrt{a^2 DX}} = \frac{a}{|a|} \rho_{XY}, \quad \rho_{YZ} = \rho_{XY} \text{ 就有 } \frac{a}{|a|} = 1, \text{ 即 } a > 0. \text{ 选择(B).}$$

423 【答案】 D

【分析】 $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}},$

由公式 $D(X + Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y)$, 因此

$$D(X + Y) = (\sqrt{DX} + \sqrt{DY})^2 \text{ 等价于}$$

$$DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) = DX + 2\sqrt{DX} \sqrt{DY} + DY$$

$$\text{也就等价于 } \text{Cov}(X, Y) = \sqrt{DX} \sqrt{DY}, \text{ 即 } \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = 1.$$

显然, 选项(A)、(C)是 $\rho = 1$ 的充分条件但不是必要条件.

424 【答案】 D

【分析】 $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}$

$$= \text{Cov}(X_1, X_1)\text{Cov}(X_2, X_2) - \text{Cov}(X_1, X_2)\text{Cov}(X_2, X_1)$$

$$= DX_1 DX_2 - [\text{Cov}(X_1, X_2)]^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ 等价 } \left[\frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1} \sqrt{DX_2}} \right]^2 = \rho^2 = 1, \text{ 即 } |\rho| = 1, \text{ 选择(D).}$$

425 【答案】 D

【分析】 直接用定义通过计算确定正确选项, 已知 $DX = DY$, 故

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Cov}(X, X)} = 1,$$

即 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X)$, 所以 $\text{Cov}(X, X - Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) = 0$, 即

$$\text{Cov}(X-Y, X) = 0$$

选择(D). 其余选项均不正确, 这是因为当 $DX = DY$ 时必有

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X+Y, X-Y) &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) \\ &= DX - DY = 0,\end{aligned}$$

选项(C) 成立, 不能推出 $\rho = 1$. 选项(A)、(B) 可推出

$$\text{Cov}(X, Y) = -\text{Cov}(X, X) = -DX \text{ 或 } \text{Cov}(X, Y) = -\text{Cov}(Y, Y) = -DY$$

由此得

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-DX}{DX} = -1.$$

426 【答案】 D

【分析】 应用公式 $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\text{Cov}(X, Y)$ 确定正确选项.

由于 X 与 Y 的相关系数 $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$, 故 $\rho > 0$ 就是 $\text{Cov}(X, Y) > 0$. 所以

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) > DX + DY.$$

$$D(X-Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y) < DX + DY. \text{ 选择(D).}$$

427 【答案】 C

【分析】 由于 (X, Y) 服从二维正态分布, 故 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 即 X 与 Y 有相同的分布, 但是 $\rho \neq 0$, 所以 X 与 Y 不独立, 选择(C).

【说明】 本题可以有下面的变式:

(1) 已知 (X, Y) 服从二维正态分布, $EX = EY = \mu$, $DX = DY = \sigma^2$, X 与 Y 的相关系数 $\rho \neq 0$, 则 $X+Y$ 与 $X-Y$

(A) 不相关且有相同的分布.

(B) 不相关且有不同的分布.

(C) 相关且有相同的分布.

(D) 相关且有不同的分布.

【答案】 B

【分析】 由于 (X, Y) 服从二维正态分布, 故 $X+Y$ 与 $X-Y$ 都服从正态分布, 但是 $E(X+Y) = 2\mu$, $E(X-Y) = 0$, $D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) = 2\sigma^2 + 2\sigma^2\rho = 2(1+\rho)\sigma^2$, $D(X-Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y) = 2(1-\rho)\sigma^2$, 所以 $X+Y$ 与 $X-Y$ 有不同的分布. 又 $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) = DX - DY = 0$, 所以 $X+Y$ 与 $X-Y$ 不相关, 选择(B).

(2) 已知随机变量 X 与 Y 不相关, $DX = DY > 0$, 则随机变量 $2X+Y$ 与 $2Y+1$

(A) 相关且相互独立.

(B) 相关且相互不独立.

(C) 不相关且相互独立.

(D) 不相关且相互不独立.

【答案】 B

【分析】 由题设知

$$\text{Cov}(X, Y) = 0, DX = DY > 0,$$

故

$$\begin{aligned}\text{Cov}(2X+Y, 2Y+1) &= 4\text{Cov}(X, Y) + 2\text{Cov}(X, 1) + 2\text{Cov}(Y, Y) + \text{Cov}(Y, 1) \\ &= 2DY > 0,\end{aligned}$$

所以 $2X+Y$ 与 $2Y+1$ 相关, 从而断言 $2X+Y$ 与 $2Y+1$ 不独立, 选择(B).

【评注】(1) 本题可以改为: $2X+Y$ 与 $2Y+1$ 的相关系数 $\rho =$ _____.

【解答】 由于 $\text{Cov}(X, Y) = 0, DX = DY > 0$,

故 $\text{Cov}(2X+Y, 2Y+1) = 2DY, \sqrt{D(2X+Y)} = \sqrt{4DX+DY} = \sqrt{5DY}, \sqrt{D(2Y+1)} = \sqrt{4DY}$, 所以 $\rho = \frac{2DY}{\sqrt{5DY} \sqrt{4DY}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(2) 若将已知条件改为: X 与 Y 独立且有相同的分布 $P\{X=i\} = P\{Y=i\} = \frac{1}{2}, i=1, 2$, 则 $X+Y$ 与 $X-Y$ 不相关且相互不独立. 这是因为 $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = 0, P\{X+Y=2, X-Y=0\} \neq P\{X+Y=2\}P\{X-Y=0\}$.

428 【答案】 A

【分析】 直接通过计算协方差来判断,

已知 X 与 Y 独立, 故 $\text{Cov}(X, Y) = 0$,

$\text{Cov}(X, X+Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) = DX > 0$.

所以 X 与 $X+Y$ 一定相关, 选择(A).

又由于

$\text{Cov}(X, XY) = EX^2Y - EX \cdot EXY = EX^2 \cdot EY - (EX)^2 \cdot EY$

$$= [EX - (EX)^2]EY = DXEY \begin{cases} = 0, & \text{若 } EY = 0, \\ \neq 0, & \text{若 } EY \neq 0. \end{cases}$$

故选项(C)、(D) 有时成立, 有时不成立.

【评注】 如果将选项中的“相关”改为独立, “不相关”改为不独立, 那么正确选项应该是().

由原题计算知 X 与 $X+Y$ 一定相关, 从而推知 X 与 $X+Y$ 一定不独立, 选择(B).

429 【答案】 D

【分析】 判断 X, Y 是否不相关, 就得判断 X 与 Y 的相关系数 $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$ 是否为 0, 可通过计算 $\text{Cov}(X, Y)$ 来判定.

由于 $X \sim N(0, 1)$, 所以 $EX = 0, DX = EX^2 = 1, EX^3 = 0, EXY = EX(2X^2 + X + 3) = 2EX^3 + EX^2 + 3EX = 1, \text{Cov}(X, Y) = EXY - EXEY = 1 \neq 0$, 即 X 与 Y 非不相关, 由此得出 X 与 Y 不独立, 选择(D).

【评注】 (1) 理解随机变量的独立性与相关性的概念, 掌握它们之间的关系及其判别方法十分重要. 我们知道: 两个随机变量相互独立一定不相关, 反之不然. 由此可知非不相关必不独立, 既非不相关又相互独立的两个随机变量不存在, 而不相关又不相互独立的两个随机变量是存在的. 如果 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 X 与 Y 独立等价于 X 与 Y 不相关.

(2) 如果将题目中的 Y 改为 $Y = X^2$, 则 $EXY = EX^3 = 0 = EXEY$, 故 X 与 Y 不相关.

由于 $\{X^2 \leq \frac{1}{4}\} = \{|X| \leq \frac{1}{2}\} \subset \{X \leq \frac{1}{2}\}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } P\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{4}\} &= P\{X \leq \frac{1}{2}, X^2 \leq \frac{1}{4}\} = P\{X^2 \leq \frac{1}{4}\} \\ &\neq P\{X \leq \frac{1}{2}\}P\{X^2 \leq \frac{1}{4}\} = P\{X \leq \frac{1}{2}\}P\{Y \leq \frac{1}{4}\} \end{aligned}$$

故 X 与 $Y = X^2$ 不独立, 此时应选择(B).

430 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } D(X_1 + X_2 + X_3) &= D(X_1 + X_2) + DX_3 + 2\text{Cov}(X_1 + X_2, X_3) \\ &= DX_1 + DX_2 + 2\text{Cov}(X_1, X_2) + DX_3 + \\ &\quad 2\text{Cov}(X_1, X_3) + 2\text{Cov}(X_2, X_3) \\ &= DX_1 + DX_2 + DX_3 + 2\text{Cov}(X_1, X_2) + \\ &\quad 2\text{Cov}(X_1, X_3) + 2\text{Cov}(X_2, X_3). \end{aligned}$$

题给条件 $D(X_1 + X_2 + X_3) = DX_1 + DX_2 + DX_3$, 所以

$$\text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_1, X_3) + \text{Cov}(X_2, X_3) = 0. \quad (*)$$

显然, (D) 不正确, 因为 X_1, X_2, X_3 两两不相关时上式(*)必成立.

现在只要证明 X_1, X_2, X_3 不一定两两不相关时(*)也可能成立, 也就是说(A)、(B)均不正确, 答案就是(C)了. 取 $X_1 = X_2 = -2X_3$, 显然, X_1, X_2, X_3 是两两相关. 这时

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_1, X_3) + \text{Cov}(X_2, X_3) \\ &= \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_1, -\frac{1}{2}X_1) + \text{Cov}(X_1, -\frac{1}{2}X_1) = DX_1 - \frac{1}{2}DX_1 - \frac{1}{2}DX_1 = 0 \end{aligned}$$

(*) 式成立. 所以答案应选(C).

431 【答案】 D

【分析】 通过计算协方差来确定正确选项. 由于 X_i 相互独立, 故

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) = D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\text{Cov}(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}) = \text{Cov}(X_1, X_2) - \text{Cov}(X_1, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, X_2) + \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_1, X_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_2) + D\bar{X} \\ &= -\frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} \neq 0. \end{aligned}$$

所以 $X_1 - \bar{X}$ 与 $X_2 - \bar{X}$ 不是不相关因此 $X_1 - \bar{X}$ 与 $X_2 - \bar{X}$ 不独立, 选择(D).

432 【答案】 D

【分析】 由于 X 与 Y 相互独立, 故 e^X 与 $2Y+1$ 相互独立, 选择(D).

事实上, 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} P\{e^X \leq x, 2Y+1 \leq y\} &= P\left\{X \leq \ln x, Y \leq \frac{y-1}{2}\right\} \\ &= P\{X \leq \ln x\} \cdot P\{Y \leq \frac{y-1}{2}\} = P\{e^X \leq x\} \cdot P\{2Y+1 \leq y\}. \end{aligned}$$

而当 $x \leq 0$ 时, $P\{e^X \leq x\} = 0$,

所以 $P\{e^X \leq x, 2Y+1 \leq y\} = 0 = P\{e^X \leq x\} \cdot P\{2Y+1 \leq y\}$, 由此可知 e^X 与 $2Y+1$ 相互独立.

选项(A)、(B)、(C) 不成立, 是由于 $\text{Cov}(3X+1, 4Y-2) = 12\text{Cov}(X, Y) = 0$, 所以 $3X+1$ 与 $4Y-2$ 不相关; $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y) = DX - DY \neq 0$ 得出 $X+Y$ 与 $X-Y$ 并非不相关; $\text{Cov}(X+Y, 2Y+1) = 2\text{Cov}(X, Y) + 2\text{Cov}(Y, Y) = 2DY \neq 0$ 得出 $X+Y$ 与 $2Y+1$ 并非不相关, 也就有 $X+Y$ 与 $2Y+1$ 不相互独立.

433 【答案】 C

【分析】 由题设知 $XY \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P\{X=1, Y=1\} & 1-P\{X=1, Y=1\} \end{pmatrix}$, 所以

$$EXY = P\{X=1, Y=1\} = \frac{5}{8},$$

$$P\{X+Y \leq 1\} = 1 - P\{X+Y > 1\} = 1 - P\{X=1, Y=1\} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8},$$

故选择(C).

434 【答案】 D

【分析】 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = (1 \cdot \frac{1}{12} + 0 \cdot \frac{11}{12}) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0$,

所以 $\rho = 0$, (A)、(B) 不成立.

$$P\{X=1, Y=1\} = P\{XY=1\} = \frac{1}{12} = P\{X=1\}P\{Y=1\};$$

$$\begin{aligned} P\{X=0, Y=1\} &= P\{Y=1\} - P\{X=1, Y=1\} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} = P\{X=0\}P\{Y=1\}; \end{aligned}$$

同理可以证明 $P\{X=1, Y=0\} = P\{X=1\}P\{Y=0\}$

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

总之 X, Y 相互独立.

【评注】 对 $X \sim B(1, p_1), Y \sim B(1, p_2)$ 的两随机变量的独立性

$$\text{应该验证} \begin{cases} P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\}; \\ P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1\}; \\ P\{X=1, Y=0\} = P\{X=1\}P\{Y=0\}; \\ P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0\}. \end{cases}$$

但实际上只要验证以上四个等式中一个成立, 其他三个条件就一定成立.

例如 $P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\}$ 成立,

$$\begin{aligned} P\{X=0, Y=1\} &= P\{Y=1\} - P\{X=1, Y=1\} = P\{Y=1\} - P\{X=1\}P\{Y=1\} \\ &= P\{Y=1\}[1 - P\{X=1\}] = P\{X=0\}P\{Y=1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=0, Y=0\} &= P\{X=0\} - P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\} - P\{X=0\}P\{Y=1\} \\ &= P\{X=0\}[1 - P\{Y=1\}] = P\{X=0\}P\{Y=0\}. \end{aligned}$$

435 【答案】 A

【分析】 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}, X + Y = 2.$

X, Y 均服从 $B(2, \frac{1}{2})$ 分布, $EX = EY = 1, DX = DY = \frac{1}{2}.$

XY 的分布为

XY	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(XY) = \frac{1}{2}$

总之, $\rho_{XY} = \frac{\frac{1}{2} - 1 \cdot 1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}} = -1.$ 答案选(A).

【评注】 本题也可以更简单解为 $X + Y = 2, Y = 2 - X.$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X, 2 - X)}{\sqrt{DX} \sqrt{D(2 - X)}} = \frac{\text{Cov}(X, 2) - \text{Cov}(X, X)}{DX} = \frac{-DX}{DX} = -1.$$

如果对相关系数性质了解, 由 $Y = 2 - X$ 可以直接得出 $\rho_{XY} = -1.$

436 【答案】 C

【分析】 直接应用辛钦大数定律的条件进行判断, 选择(C). 事实上, 应用辛钦大数定律, 随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 必须是: “独立同分布且数学期望存在”, 选项(A) 缺少同分布条件, 选项(B)、(D) 虽然服从同一分布但不能保证期望存在. 因此选择(C).

437 【答案】 B

【分析】 由题设, 我们应该考虑应用大数定律来确定正确选项. 由于 X_n 相互独立, 所以 Y_n 相互独立, 选项(A) “缺少同分布” 条件, 选(C)、(D) “缺少数学期望存在” 的条件, 因此都不满足辛钦大数定律. 所以选择(B). 事实上, 若 $EX_n = \mu, DX_n = \sigma^2$ 存在, 则

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (EX_{2i} - EX_{2i-1}) = 0,$$

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DY_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (DX_{2i} + DX_{2i-1}) = \frac{2n\sigma^2}{n^2} = \frac{2\sigma^2}{n} \leq 2\sigma^2,$$

根据切比雪夫大数定律得:

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right)\right| \leq \epsilon\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right| \leq \epsilon\right\} = 1.$ 即 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ 依概率收敛到零.

438 【答案】 C

【分析】 这是一道计算性选择题, 由题设知 $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, 且 $EX_n = 0.$

$DX_n = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}.$ 根据中心极限定理, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \leq \sqrt{\frac{n}{3}} x \right\} = \Phi(x).$$

取 $x = \sqrt{3}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \leq \sqrt{n} \right\} = \Phi(\sqrt{3})$, 故选择(C).

439 【答案】 D

【分析】 由题设条件及所求概率, 即知解答此题必须应用大数定律或中心极限定理, 而我们仅知“ $EX_n = 0$ ”, 因而考虑应用辛钦大数定律: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 0$, 即对任意 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right| < \epsilon \right\} = 1, \text{ 取 } \epsilon = 1, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| < n \right\} = 1, \text{ 又}$$

$$\left\{ \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| < n \right\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < n \right\},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < n \right\} = 1$, 选择(D).

440 【答案】 C

【分析】 由题设知 $X_n \sim B(n, \frac{1}{2})$, 根据“二项分布以正态分布为其极限分布”定理得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_n - \frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{1}{4}n}} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x). \text{ 选择(C).}$$

441 【答案】 B

【分析】 由于 $X_i \sim N(\mu, 1), i = 1, 2, \dots, n$ 相互独立.

$$(X_n - X_1) \sim N(0, 2), \quad \frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \quad \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1).$$

显然, $2(X_n - X_1)^2$ 并不服从 χ^2 分布, 答案应选(B).

442 【答案】 A

【分析】 由题设知, $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 独立, 所以 } \frac{\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/n-1}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1).$$

选择(A).

443 【答案】 C

【分析】 由题设知, $X \sim N(0, \sigma^2)$, $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\frac{X}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 且相互独立, 由 χ^2 分布, t 分布, F 分布的典型模式知, 选项(A)、(B) 不成立, 事实上, $\frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, (A) 不成立, $\frac{10Y^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(10)$, (B) 不成立, $\frac{\frac{X}{\sigma}}{\sqrt{\frac{10Y^2}{\sigma^2}/10}} = \frac{X}{Y} \sim t(10)$, (C) 成立. 而

$$\frac{\frac{X^2}{\sigma^2}/1}{\frac{10Y^2}{\sigma^2}/10} = \frac{X^2}{Y^2} \sim F(1, 10), (D) \text{ 不成立. 所以选择(C).}$$

444 【答案】 D

【分析】 由于总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 故各选项的第二项 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 又 $\bar{X}$ 与 S^2 独立, 根据 χ^2 分布可加性, 我们仅需确定服从 $\chi^2(1)$ 分布的随机变量. 因为 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 故 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$. 选择(D).

【评注】 我们也可以应用数字特征来确定选项, 如果 $Y \sim \chi^2(n)$, 则 $EY = n$. 由于总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 故 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $\bar{X} - \mu \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, 故 $E\bar{X}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$, $E(\bar{X} - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, $ES^2 = \sigma^2$, 所以 $E\frac{\bar{X}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}$, $E\frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n}$, $E\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = n-1$, 由此即知正确选项为(D).

445 【答案】 C

【分析】 由题设得 $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立, 所以 $\frac{\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2}/1}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)} = \frac{n\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$. 选择(C).

446 【答案】 D

【分析】 依题意, 统计量 $Y \sim F(m, n)$, 所以 $4 = \frac{1/i}{1/(10-i)} = \frac{10-i}{i}$, 解得 $i = 2$, 选择(D). 事实上, 由 $X_j \sim N(0, \sigma^2)$, 就有 $\frac{X_j}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\left(\frac{X_j}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$,

$$U = \sum_{j=1}^i \left(\frac{X_j}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(i), V = \sum_{j=i+1}^{10} \left(\frac{X_j}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(10-i), U \text{ 与 } V \text{ 独立},$$

$$\text{所以 } \frac{U/i}{V/(10-i)} = \frac{10-i}{i} \frac{X_1^2 + \cdots + X_i^2}{X_{i+1}^2 + \cdots + X_{10}^2} \sim F(i, 10-i)$$

由题设知 $\frac{10-i}{i} = 4$, 即 $i = 2$, 选择(D).

447 【答案】 D

【分析】 应用 t 分布典型模式来确定正确选项. 由于 $\sum_{i=1}^m X_i \sim N(0, m\sigma^2)$, $U = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sqrt{m\sigma^2}} \sim N(0, 1)$,

而 $\frac{Y_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 且相互独立, 所以 $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$, U 与 V 相互独立, 根据 t 分布典型

模式知, $\frac{U}{\sqrt{V/n}} = \sqrt{\frac{n}{m}} \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_n^2}} \sim t(n)$, 依题设知 $\sqrt{\frac{n}{m}} = 2$, 即 $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$, 选择(D).

448 【答案】 B

【分析】 由于 $\frac{\bar{X}}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, $\frac{nS_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 且这两个随机变量相互独立, 故

$$\frac{\bar{X}/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS_2^2}{\sigma^2}}/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{X}}{S_2/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1) \text{ 因此选(B). 而 } \frac{\bar{X}}{S_1/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \text{ 故(A) 不正确.}$$

(C) 和(D) 也不正确, 因为 S_3 或 S_4 与 $\bar{X}$ 不独立.

449 【答案】 D

【分析】 这是一道概念性、理论性的选择题, 应用已知结论即可确定正确选项. 事实上,

由题设知 $\bar{X}, \bar{Y}, S_X^2, S_Y^2$ 相互独立, 且 $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, $\bar{Y} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

$\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 由此知 $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, \frac{2\sigma^2}{n})$, 选项(A) 不正确; $\frac{(n-1)}{\sigma^2} (S_X^2 + S_Y^2) \sim$

$\chi^2(2n-2)$, 选项(B) 不正确; $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \bar{Y})/\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\frac{(n-1)}{\sigma^2} (S_X^2 + S_Y^2)/2(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{S_X^2 + S_Y^2}} \sim t(2n-2)$, 选项

(C) 不正确; $\frac{\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}/(n-1)}{\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}/(n-1)} = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n-1, n-1)$, 选择(D).

F 分布典型模式知, 如果 $aX \sim \chi^2(m)$, $bY \sim \chi^2(n)$, X 与 Y 相互独立, 则

$$\frac{aX/m}{bY/n} = \frac{anX}{bmY} \sim F(m, n).$$

450 【答案】 B

【分析】 因为 $X \sim F(n, n)$, 所以 $\frac{1}{X} \sim F(n, n)$, 即 X 与 $\frac{1}{X}$ 具有相同的分布, 因此有

$$p_1 = P\{X \geq 1\} = P\left\{\frac{1}{X} \leq 1\right\} = P\{X \leq 1\} = p_2 \text{ 选择(B).}$$

451 【答案】 C

【分析】 我们要通过 $P\{|X - \mu| < a\} = P\{|\bar{X} - \mu| < b\}$ 来确定正确选项, 为此需要先求出 $X - \mu$ 与 $\bar{X} - \mu$ 的分布.

依题设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 标准化得 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

由此可知: 如果 $P\{|X - \mu| < a\} = P\{|\bar{X} - \mu| < b\}$,

则有

$$P\left\{\frac{|X - \mu|}{\sigma} < \frac{a}{\sigma}\right\} = P\left\{\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - \mu|}{\sigma} < \frac{\sqrt{nb}}{\sigma}\right\},$$

所以 $\frac{a}{\sigma} = \frac{\sqrt{nb}}{\sigma}$, 即 $\frac{a}{b} = \sqrt{n}$, 比值 $\frac{a}{b}$ 与 σ 无关, 与 n 有关, 选择(C).

452 【答案】 B

【分析】 应用已知结果 $E\bar{X}^2 = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, $ES^2 = \sigma^2$, 计算得正确选项.

由于 $ES_k^2 = \frac{n}{k}E\bar{X}^2 + \frac{1}{k}ES^2 = \frac{n}{k} \cdot \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{k}\sigma^2 = \frac{2}{k}\sigma^2$, 故 $ES_k^2 = \frac{2}{k}\sigma^2 = \sigma^2$, 即 $k = 2$. 选择(B).

453 【答案】 A

【分析】 $E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left[\sum_{j=1}^n (nX_j - \sum_{k=1}^n X_k)^2\right]\right\} = E[n\bar{X} \cdot n^2(n-1)S^2]$
 $= n^3(n-1)E(\bar{X} \cdot S^2) = n^3(n-1)\mu \cdot \sigma^2.$

因 $\bar{X}, S^2$ 是相互独立的.

454 【答案】 D

【分析】 $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 且它们相互独立, 所以

$$\begin{aligned} DT &= \sigma^4 D\left[\frac{n-1}{\sigma^2}(S_X^2 + S_Y^2)\right] = \sigma^4 \left[D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S_X^2\right) + D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S_Y^2\right)\right] \\ &= \sigma^4 [2(n-1) + 2(n-1)] = 4(n-1)\sigma^4. \end{aligned}$$

455 【答案】 C**【分析】** 由于

$$EX = 0, DX = EX^2 = \sigma^2,$$

故

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2,$$

所以选择(C), 其他选项都不是 σ^2 的无偏估计量, 这是因为,

$$E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \sigma^2, \text{ 即 } E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 \neq \sigma^2, \text{ (A) 不正确,}$$

$$\text{由 (B)} E\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{n-1}{n+1} \sigma^2,$$

$$\text{由 (D)} E\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{n}{n+1} \sigma^2, \text{ 均不是无偏估计.}$$

【评注】 在讨论统计量的数字特征时, 只需假定总体的数字特征存在, 无需对其分布作假设. 要记住样本均值 $\bar{X}$ 、样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 分别为总体均值、方差的无偏估计.

456 【答案】 C**【分析】** 依题意有 $E\hat{\lambda} = \lambda$, 由此计算出 a 值, 从而确定正确选项.由于总体 $X \sim P(\lambda)$, 所以 $EX = DX = \lambda, E\bar{X} = EX = \lambda, ES^2 = DX = \lambda$,又 $E\hat{\lambda} = \lambda$, 所以 $a\lambda + (2-3a)\lambda = \lambda, a+2-3a=1$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 选择(C).**457 【答案】 D****【分析】** 由于 $E(X) = (-1) \cdot \theta + 0 \cdot (1-2\theta) + 1 \cdot \theta = 0$, 不包含未知参数 θ .没法用 $EX = \bar{X}$ 来估计 θ .考虑用二阶矩 $E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 来求解未知参数 θ .

$$\text{由于 } E(X^2) = (-1)^2 \cdot \theta + 0^2 \cdot (1-2\theta) + 1^2 \cdot \theta = 2\theta.$$

$$\text{故 } E(X^2) = 2\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \text{ 解得 } \hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

458 【答案】 C**【分析】** 应用无偏估计, 一致估计概念, 通过简单计算便可选出正确选项, 事实上已知

$E\hat{\theta} = \theta, \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, 所以 $\hat{\theta}^2 \xrightarrow{P} \theta^2$, 又 $E\hat{\theta}^2 = D\hat{\theta} + (E\hat{\theta})^2 = D\hat{\theta} + \theta^2 > \theta^2$, 所以 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏一致估计, 选择(C).

459 【答案】 D

【分析】 根据矩估计量的定义确定选项, 由于 $EX^2 = DX + (EX)^2$, 而 DX 与 EX 矩估计量分别为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n} S^2$ 与 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 所以 EX^2 的矩估计量为 $\frac{n-1}{n} S^2 + \bar{X}^2$. 选择(D).

【评注】 $\frac{n-1}{n} S^2 + \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 按定义, 此即为 EX^2 的矩估计量.

460 【答案】 C

【分析】 应用置信区间的概念, 选择(C). 均值 μ 是一个客观存在的数, 说“ μ 以 95% 的概率落入区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ ”是不妥的, 因此不选(A), 而(B)、(D) 均与 μ 无关, 无法由它确定 μ 的置信区间.

461 【答案】 A

【分析】 首先要求出 L , 进而推断 L 与 $1-\alpha$ 的关系. 当总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知时, μ 的置信区间为 $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}})$, 其中 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 是标准正态分布上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数, 由 $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + (1-\alpha)}{2}$ 确定, 其中 $\Phi(x)$ 是 x 单调增函数, 因此置信区间的长度 $L = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}$, 当样本容量 n 固定时, 随 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 的减小而变小, 即随 $1-\alpha$ 的减小而变小. 所以选择(A).

462 【答案】 C

【分析】 正态总体方差未知时, 关于期望值 μ 的置信区间公式为

$$\left(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$$

其中, $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 满足 $P\{|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha, T \sim t(n-1)$.

本题 $n = 16, \bar{x} = 20, S = 1, \alpha = 1 - 0.90 = 0.10, t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.05}(15)$.

答案应选(C).

463 【答案】 A

【详解】 当 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(X_i - 1)$ 时,

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [DX_i + (EX_i)^2] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\lambda + \lambda^2) - \lambda = \lambda^2. \end{aligned}$$

【评注】 很容易计算(B)、(C)、(D) 各项:

$$(B)E(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [DX_i + (EX_i)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\lambda + \lambda^2) = \lambda + \lambda^2.$$

$$\begin{aligned} (C)E(T) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) + \left[E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right]^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i + \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right]^2 = \frac{\lambda^2}{n} + \lambda. \end{aligned}$$

$$(D)E(T) = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j\right)^2\right] = E(S^2) = D(X) = \lambda.$$

464 【答案】 D

【分析】 选项(A)、(B)、(C) 的假设都不能完全确定总体的分布,所以是复合假设,而选项(D) 的假设可以完全确定总体分布,因而是简单假设,选择(D).

465 【答案】 B

【分析】 直接应用“犯第二类错误” = “取伪” = “ H_0 不成立,接受 H_0 ” 的定义,选择(B).

【评注】 本题考察假设检验中“犯第二类错误”的定义. 在假设检验中,“犯第二类错误”是指“ H_0 不成立,接受 H_0 ”的情况.

【分析】 依题意, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. 设 $T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$, 则 $T \sim t_{n-1}$. 由 $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha$, 得 $\alpha = 0.1$. 选择(B).

【评注】 本题考察 t 检验. 在假设检验中, 当总体方差未知时, 应使用 t 检验. 本题中, 总体方差未知, 且样本容量 $n < 30$, 故应使用 t 检验.

【分析】 依题意, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. 设 $T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$, 则 $T \sim t_{n-1}$. 由 $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha$, 得 $\alpha = 0.1$. 选择(C).

【评注】 本题考察 t 检验. 在假设检验中, 当总体方差未知时, 应使用 t 检验. 本题中, 总体方差未知, 且样本容量 $n < 30$, 故应使用 t 检验.

【分析】 依题意, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. 设 $T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$, 则 $T \sim t_{n-1}$. 由 $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha$, 得 $\alpha = 0.1$. 选择(D).

【评注】 本题考察 t 检验. 在假设检验中, 当总体方差未知时, 应使用 t 检验. 本题中, 总体方差未知, 且样本容量 $n < 30$, 故应使用 t 检验.

【分析】 依题意, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. 设 $T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$, 则 $T \sim t_{n-1}$. 由 $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha$, 得 $\alpha = 0.1$. 选择(A).

【评注】 本题考察 t 检验. 在假设检验中, 当总体方差未知时, 应使用 t 检验. 本题中, 总体方差未知, 且样本容量 $n < 30$, 故应使用 t 检验.

【分析】 依题意, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. 设 $T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$, 则 $T \sim t_{n-1}$. 由 $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha$, 得 $\alpha = 0.1$. 选择(B).

【评注】 本题考察 t 检验. 在假设检验中, 当总体方差未知时, 应使用 t 检验. 本题中, 总体方差未知, 且样本容量 $n < 30$, 故应使用 t 检验.

【分析】 依题意, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. 设 $T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$, 则 $T \sim t_{n-1}$. 由 $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha$, 得 $\alpha = 0.1$. 选择(C).

【评注】 本题考察 t 检验. 在假设检验中, 当总体方差未知时, 应使用 t 检验. 本题中, 总体方差未知, 且样本容量 $n < 30$, 故应使用 t 检验.

【分析】 依题意, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. 设 $T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$, 则 $T \sim t_{n-1}$. 由 $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha$, 得 $\alpha = 0.1$. 选择(D).

【评注】 本题考察 t 检验. 在假设检验中, 当总体方差未知时, 应使用 t 检验. 本题中, 总体方差未知, 且样本容量 $n < 30$, 故应使用 t 检验.

第2部分

填空题

· 高等数学 ·

· 线性代数 ·

· 概率论与数理统计 ·

· 参考答案 ·



高等数学

466 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ 2+x, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

467 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^x (3e^x + 1)}{[1 + (e^x + 1)^2](1 + e^x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

468 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

469 设 $\alpha > 0, \beta > 0$ 为常数, 则 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

470 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

471 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{\sin^{10} x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

472 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 - \sqrt[3]{\cos x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\cos x})}{(1 - \cos x)^{n-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

473 设 $a > 0, a \neq 1$, 且 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p (a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) = \ln a$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

474 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{e^{\tan x} - e^{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

475 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

476 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + \frac{f(x)}{x})}{x} = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

477 设 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 为正数 ($m \geq 2$), 则 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

478 $[x]$ 表示 x 的最大整数部分, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{2}{x} \right] =$ _____.

479 设 $\{a_n\}$ 为数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, |q| < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____.

480 数列 $x_n = n[e(1 + \frac{1}{n})^{-n} - 1]$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

481 数列极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} \right) =$ _____.

482 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \{ \ln(1 + 2x - x^2) - 6[(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1] \} =$ _____.

483 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, 且 $f(1)=1$ 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[2 + f(x^{\frac{1}{x}})] =$ _____.

484 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}, & (-\infty < x \leq 1), \\ Ae^{\arctan x}, & (1 < x < +\infty), \end{cases}$ $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $A =$ _____.

485 设 $f(x) = \begin{cases} 6, & x \leq 0, \\ \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x}, & x > 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} \frac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x < 1, \\ e^{bx} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$
若 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 则 $a =$ _____ 且 $b =$ _____.

486 设 $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4}, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f'(x) =$ _____.

487 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f'(x) =$ _____.

488 函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0, f'(0) > 0$, 则 $J = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} =$ _____.

489 设 $f'(1) = 1$, 则 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1-2\sin x)}{x + 2\sin x} =$ _____.

490 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f(0) = 1, f'(0) = 3$, 则数列极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{1-\cos \frac{1}{n}}} =$ _____.

491 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶导数存在, 则

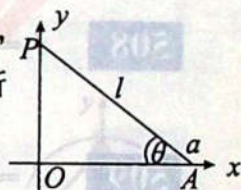
$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

492 设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \ln(1+x^2), & x \geq 0, \end{cases}$ $f(x)$ 可导, 则 $\frac{d}{dx} f[\varphi(x)] = \underline{\hspace{2cm}}.$

493 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x 处可导, $f(x) > 0, g(x) > 0$, 则 $[f(x)^{\frac{1}{g(x)}} + \log_{f(x)} g(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}.$

494 曲线 $y = e^{x^3}$ 过原点的切线是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

495 设质点 P 在直角坐标系 xOy 的 y 轴上作匀速运动, 速度为 c , 定点 A 在 x 轴上 $x=a>0$ 处, 记 AP 之长为 l , AP 与 x 轴夹角为 θ (如图所示) 则直线段 AP 的角速度与 l^2 之积等于 $\underline{\hspace{2cm}}.$



496 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$ $y = y(x)$ 在任意点处的曲率 $K = \underline{\hspace{2cm}}.$

497 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = \sin(x+y)$ 确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

498 作变量替换 $x = \ln t$, 方程 $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0$ 简化为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

499 设 $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+3x}, n \geq 2$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

500 设 $y = y(x)$ 是由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 确定的, 则 $y = y(x)$ 的极值点是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

501 函数 $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的单调增区间是 $\underline{\hspace{2cm}},$ 单调减区间是 $\underline{\hspace{2cm}},$ 极值是 $\underline{\hspace{2cm}},$ 凹区间是 $\underline{\hspace{2cm}},$ 凸区间是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

502 设 $(1,3)$ 是曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 14$ 的拐点, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

503 设 $f(x) = 3x^2 + Ax^{-3} (x > 0), A$ 为正常数, 则 A 至少为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 有

$$f(x) \geq 20(x > 0).$$

504 函数 $f(x) = |4x^3 - 18x^2 + 27|$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值等于 _____, 最大值等于 _____.

505 设有界函数 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b$, 则 $b =$ _____.

506 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 且任意 $x \in (a, +\infty)$ 有 $|f'(x)| \leq M$ (M 为常数), 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} =$ _____.

507 已知 $\int f'(x^3) dx = x^3 + C$ (C 为 $\forall$ 常数), 则 $f(x) =$ _____.

508 $I = \int \frac{dx}{x^2(1-x^4)} =$ _____.

509 $I = \int \sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}} dx =$ _____.

510 $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx =$ _____.

511 $I = \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx =$ _____.

512 $I = \int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx =$ _____.

513 设 $a > 0$, 则 $I = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{3} dx =$ _____.

514 $I = \int_0^1 (\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{(1-x^2)^3}) dx =$ _____.

515 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = c$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

516 设 $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$, 则 $f(x)$ 的极值为 _____, $f(x)$ 的拐点坐标为 _____.

517 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, $\psi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 则 $\psi'(x) =$ _____.

518 设 $f(x)$ 有连续的一阶导数, $F(x) = \int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$, $f(0) = 0$, $f(a) = 1$, 则 $F(2a) - 2F(a) =$ _____.

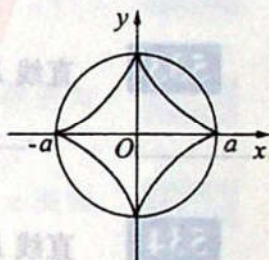
519 设 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x)dx + 2 \int_0^1 f(x)dx$, 则 $f(x) =$ _____.

520 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1 < x < 0, \end{cases}$ 则 $\int_1^4 f(x-2)dx =$ _____.

521 $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^{\frac{1}{x}}} =$ _____.

522 设 $f(x) = \max\{1, x^2\}$, 则 $\int_1^x f(t)dt =$ _____.

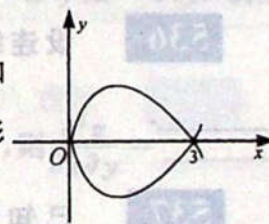
523 设星形线方程为 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, 则它所围成的面积 A 为 _____, 它的弧长 L 为 _____, 它绕 x 轴旋转而生成的旋转体体积 V 为 _____.



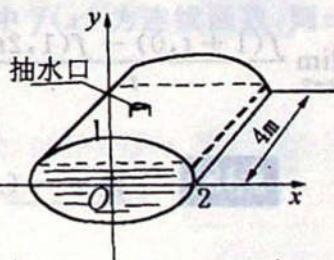
524 在曲线 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) 上取一点 (t, t^2) , ($0 < t < 1$), 设 A_1 是曲线 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$), 直线 $y = t^2$ 和 $x = 0$ 围成的面积; A_2 是由曲线 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) 直线 $y = t^2$ 和 $x = 1$ 围成的面积, 则 t 取 _____ 时, $A = A_1 + A_2$ 取最小值.

525 设有曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 则以曲线、切线及 x 轴所围成平面图形绕 x 轴旋转一圈所得到的表面积为 _____.

526 已知抛物线形的一部分: $y^2 = \frac{x}{9}(3-x)^2$ ($0 \leq x \leq 3$), 如图示, 它围成的图形为 M , 则 M 的面积 $A =$ _____, M 的质心(形心) $(\bar{x}, \bar{y}) =$ _____.



527 在水平放置的椭圆底柱形容器内储存某种液体, 容器的尺寸如图所示, 其中椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (单位: m), 则当液面过点 $(0, y)$ ($-1 \leq y \leq 1$) 处水平线时, 容器内液体的体积是 _____, 当容器内储满了液体后, 以 $0.16 \text{ m}^3/\text{min}$ 的速度将液体从容器顶端抽出, 则当液面降至 $y = 0$ 时, 液面下降的速度为 _____, 如果液体的密度为 $1000 (\text{kg}/\text{m}^3)$ 抽出全部液体所作的功为 _____.



528 设无穷长直线 L 的线密度为 1, 引力常数为 k , 则 L 对距直线为 a 的单位质点 A 的引力为_____.

529 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} =$ _____.

530 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx =$ _____.

531 设 $a, b, c \neq 0$, 若 $a = b \times c, b = c \times a, c = a \times b$, 则 $|a| + |b| + |c| =$ _____.

532 过点 $P(-1, 0, 4)$ 且与平面 $3x - 4y + z + 10 = 0$ 平行, 又与直线 $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程是_____.

533 直线 $L: \begin{cases} 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\Pi: x - y + 3z + 8 = 0$ 上的投影方程为_____.

534 直线 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$ 绕直线 $L_1: \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 旋转一圈所产生的曲面方程是_____.

535 平面 $\Pi: x - 2y + 2z + 9 = 0$ 与以点 $M_0(2, 0, -1)$ 为球心的球面相切, 则该球面的方程是_____.

536 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz \Big|_{(0,1)} =$ _____.

537 已知函数 $z = f(x, y)$ 连续且满足 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x, y) - x + 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t, 0) - f(1, 2t)}{t} =$ _____.

538 设 $z = (x - 2y)^{y-2x}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} =$ _____.

539 设 $f(x, y, z) = e^x + y^2z$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 则 $f'_x(0, 1, -1) =$ _____.

540 设 $z = f(xy, x^2 + y^2)$, 其中 f 可微, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

541 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ a, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 则 $a =$ _____.

542 设 $z = e^x + y^2 + f(x + y)$, 且当 $y = 0$ 时, $z = x^3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

543 设 $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

544 设 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 =$ _____.

545 设 $f(x), g(x)$ 可微, $u(x, y) = f(2x + 5y) + g(2x - 5y)$, 且满足 $u(x, 0) = \sin 2x, u'_y(x, 0) = 0$. 则 $f(x) =$ _____.

546 设 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{e^{xy} + xy \sqrt{x^2 + y^2}}$, 则 $f'_x(1, 0) =$ _____.

547 设 $f(x, y) = \frac{2x + 3y}{1 + \ln(1 + xy)}$, 则 $df(0, 0) =$ _____.

548 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.

549 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

550 设 $z = xg(x+y) + y\varphi(xy)$, 其中 g, φ 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

551 设 $z = \int_0^1 |xy - t| f(t) dt, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则 $z''_{xx} + z''_{yy} =$ _____.

552 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f(x^y, y^{2x})$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

553 设 $f(x, y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$ _____.

554 设 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$, 则 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$ _____.

555 已知对任意的 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x, y) dx + x \cos y dy = t^2$ 成立, $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 则 $f(x, y)$ _____.

556 设 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$, $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

557 二元函数 $f(x, y) = x^2(2+y^2) + y \ln y$ 的极小值为 _____.

558 函数 $f(x, y) = x^2 y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最小值为 _____.

559 设 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \Big|_{(1,-2,2)} =$ _____.

560 向量场 $A(x, y, z) = (x+y+z)i + xyj + zk$ 的旋度 $\operatorname{rot} A =$ _____.

561 曲面 $z - (xy)^2 + 2xy = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程为 _____.

562 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线方程为 _____.

563 函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 在该点的外法线方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial n} =$ _____.

564 函数 $f(x, y, z) = x^3 + y^4 + z^2$ 在点 $(1, 1, 0)$ 处方向导数的最大值与最小值之积为 _____.

565 交换二次积分的积分次序, $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy =$ _____.

566 设 $a > 0$, 交换二次积分的积分次序, $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{ay}} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_0^{2a-y} f(x, y) dx =$ _____.

567 交换二次积分的积分次序, $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{1+y^2} f(x, y) dx =$ _____.

568 设 D 是由不等式 $x^2 + y^2 \geq ax$ 与 $x^2 + y^2 \leq a^2 (a > 0)$ 及 $x \geq 0$ 所确定, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 在极坐标下先 ρ 后 θ 的二次积分为_____.

569 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) d\sigma =$ _____.

570 $\iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+2y) d\sigma =$ _____.

571 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于_____.

572 $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy =$ _____.

573 积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx =$ _____.

574 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ _____.

575 交换积分次序 $\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} dx \int_0^{\sqrt{6-x^2}} f(x, y) dy =$ _____.

576 交换积分次序 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho =$ _____.

577 设 D 为不等式 $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$ 所确定的区域, 则 $\iint_D \min(x, y) dx dy =$ _____.

578 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy =$ _____.

579 $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} \cos^2 x dx =$ _____.

580 已知 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = x^2 + (x+y) \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y) d\sigma$ 则 $f(x, y) =$ _____.

581 $\int_0^2 dx \int_0^1 |y-x| dy =$ _____.

582 设 Ω 由 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 所确定, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dv =$ _____.

583 设 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 2$ 和 $z = 8$ 所围立体, 则 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv =$ _____.

584 设 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 所确定, 则 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dv =$ _____.

585 设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域, 则 $I = \iiint_{\Omega} (x + z) dv =$ _____.

586 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ 上任一点处的密度等于该点到原点的距离的平方, 则此球的质心的 z 坐标为 _____.

587 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax (a > 0)$, 则面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS =$ _____.

588 设 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于 $z = 0$ 和 $z = 1$ 之间的部分, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS =$ _____.

589 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则 $\iint_{\Sigma} (x + y + z)^2 dS =$ _____.

590 设曲线 C 为圆 $x^2 + y^2 = R^2$, 则线积分 $\oint_C (x^2 + y^2 + 2xy) ds =$ _____.

591 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

592 已知曲线 L 为圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 在第一象限的部分, 则 $\int_L xy ds =$ _____.

593 已知曲线 L 为曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线, 则 $\oint_L x^2 y^2 z^2 ds =$ _____.

594 若曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a =$ _____.

595 设 L 是正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则线积分 $\int_L x dy - 2y dx =$ _____.

596 设 C 为 $|x| + |y| = 1$ 的正向, 则 $\oint_C \frac{x dy - y dx}{|x| + |y|} =$ _____.

597 设 C 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的正向, 则 $\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} =$ _____.

598 设 C 为上半圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 从 $O(0, 0)$ 到 $A(2, 0)$ 的弧段, 则 $\int_C (xe^{y^2} - 2y) dx + (x^2 - 1)ye^{y^2} dy =$ _____.

599 设 C 为曲线 $y = \sqrt{\pi x^2}$ 上从 $O(0, 0)$ 到 $A(1, \sqrt{\pi})$ 的曲线段, 则 $\int_C \cos y^2 dx - 2xysiny^2 dy =$ _____.

600 设 Γ 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为顺时针方向, 则 $I = \oint_{\Gamma} (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz =$ _____.

601 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\oiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy =$ _____.

602 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} xy dy dz + x dz dx + x^2 dx dy =$ _____.

603 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy =$ _____.

604 设 D 是由 $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$ 所确定的上半圆域, 则 D 的形心的 y 坐标 $\bar{y} =$ _____.

605 设 Ω 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 1$ 围成的空间体, 则 Ω 的形心 z 坐标 $\bar{z} =$ _____.

606 设 Γ 为质量均匀分布的半圆 $y = \sqrt{1-x^2}$, 线密度为 ρ , 则 Γ 对 x 轴的转动惯量 $I_x =$ _____.

607 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛的充要条件是 α 应满足 _____.

608 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的敛散性为 _____.

609 若级数 $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \cdots$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ _____.

610 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}$ 收敛, 则 α 应满足 _____.

611 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ 的收敛域为 _____.

612 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n} x^{2n}$ 的收敛半径为 _____.

613 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} (x-1)^n$ 的收敛区间为 _____.

614 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 2, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^n$ 的收敛区间为 _____.

615 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right) x^n$ 的收敛域为 _____.

616 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛半径为 _____.

617 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=2$ 处收敛, 在 $x=0$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 _____.

618 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n}$ 的收敛域为_____.

619 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.

620 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ 的和为_____.

621 设 $a_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2019$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的和为_____.

622 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ 等于_____.

623 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$ 的和为_____.

624 设 $f(x) = x^2, (0 \leq x \leq 1)$, 而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 1, 2, \dots)$, 则 $S(-\frac{1}{2}) =$ _____.

625 $f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$ 在 $x = -1$ 处的泰勒展开式为_____.

626 $f(x) = \ln(2 + x - 3x^2)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开式为_____.

627 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f''(0) =$ _____.

628 已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, -\frac{1}{2})$, 且其上任一点 (x, y) 处的切线斜率为 $x \ln(1 + x^2)$, 则 $f(x) =$ _____.

629 设 $y = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x) (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$ 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 则该方程为_____.

630 方程 $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ 的通解为_____.

631 方程 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解为_____.

632 方程 $(1+x)dy + (1-2e^{-y})dx = 0$ 的通解为_____.

633 方程 $xy' - x\sin \frac{y}{x} - y = 0$ 的通解为_____.

634 方程 $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ 满足条件 $y(1) = 0$ 的特解为_____.

635 方程 $xy' + 2y = \sin x$ 满足条件 $y|_{x=\pi} = \frac{1}{\pi}$ 的特解为_____.

636 方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^4}$ 的通解为_____.

637 方程 $y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0$ 的通解为_____.

638 方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为_____.

639 方程 $y''' - y' = 0$ 满足条件 $y|_{x=0} = 3, y'|_{x=0} = -1, y''|_{x=0} = 1$ 的特解为_____.

640 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为_____.

线性代数

641

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

642

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

643

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2+b & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3+b & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4+b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

644

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

645

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \\ 0 & 0 & \cdots & b & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

646

设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是三阶矩阵, 且 $|A| = 4$. 若 $B = [\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3]$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

647

设四阶方阵 $A = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$, $B = [\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为四维列向量, 且 $|A| = 4$, $|B| = -1$, 则 $|A - 3B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

648

若三阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$. B^* 是矩阵 B 的伴随矩阵, 则行列式 $\left| \left(\frac{1}{2}A \right)^T B^* \right| = \underline{\hspace{2cm}}.$

649

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$, 则 $A\Lambda - \Lambda A =$ _____.

650

设 $\alpha = (1, 3, -2)^T$, $\beta = (2, 0, 0)^T$, $A = \alpha\beta^T$, 则 $A^3 =$ _____.

651

设 $PA = BP$, 其中 $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{100} =$ _____.

652

已知 $CA - AB = C - B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $C^6 =$ _____.

653

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 则矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* =$ _____.

654

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $A =$ _____.

655

已知 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, -1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 0)^T$ 且 $A\alpha_1 = (2, 1)^T$, $A\alpha_2 = (-1, 1)^T$, $A\alpha_3 = (3, -4)^T$, 则 $A =$ _____.

656

n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - 3A - 4E = O$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____.

657

已知 $\alpha = (2, 3, -1)^T$, $\beta = (1, 0, 0)^T$, $A = E + \alpha\beta^T$, 则 $(A - 2E)^{-1} =$ _____.

658

已知 $AB = A + B$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $(A - E)^{-1} =$ _____.

659

已知三阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵 $(A^*)^{-1} =$ _____.

660

已知 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{11} - 2a_{13} & a_{12} & a_{12} + a_{13} \\ a_{21} - 2a_{23} & a_{22} & a_{22} + a_{23} \\ a_{31} - 2a_{33} & a_{32} & a_{32} + a_{33} \end{bmatrix}$, 若行列式 $|A| = 2$, 则 $(A^*B)^{-1} =$ _____.

661 若 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, 则 $X =$ _____.

662 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$, 经初等行变换化成梯形矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其过

程如下:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

故知存在可逆阵 P , 使得 $PA = B$, 其中 $P =$ _____.

663 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 不等价, 则 $a =$ _____.

664 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 则秩 $r(A^2 - 2A) =$ _____.

665 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $r(A^*)^* =$ _____.

666 设 A 是五阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 η_1, η_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个坐标不成比例的解, 那么秩 $r(A^*) =$ _____.

667 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (3, -1, 2)^T, \alpha_3 = (2, 3, t)^T$ 线性相关, 则 $t =$ _____.

668 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 0, t, 0)^T, \alpha_3 = (0, -4, 5, t)^T$ 线性无关, 则 t 的取值为 _____.

669 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 - a\alpha_3$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

670 设 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$, β 是任意 n 维向量, 若 $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, a\beta + \alpha_3$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

671 已知 $\alpha_1 = (2, 3, 3)^T, \alpha_2 = (1, 0, 3)^T, \alpha_3 = (3, 5, a+2)^T$. 若 $\beta_1 = (4, -3, 15)^T$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, $\beta_2 = (-2, -5, a)^T$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $a =$ _____.

672 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, a)^T$ 可以表示任意一个三维向量, 则 a 的取值为 _____.

673 已知向量组

$$(I) \alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 3, a)^T, \alpha_3 = (1, a+2, -2)^T$$

$$(II) \beta_1 = (1, -1, 1)^T, \beta_2 = (1, a, -1)^T, \beta_3 = (a, 1, 2)^T$$

不等价, 则 $a =$ _____.

674 已知向量组 $\alpha_1 = (a, a, 1)^T, \alpha_2 = (a, 1, a)^T, \alpha_3 = (1, a, a)^T$ 的秩是 2, 则 $a =$ _____.

675 设 $\alpha_1 = (1, 1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (2, 4, 6, 2)^T, \alpha_3 = (2, 6, t, 6)^T$. 已知 α_1, α_3 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组, 则 $t =$ _____.

676 向量 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T$ 的 Schmidt 正交规范化向量组是 _____.

677 向量 $\beta = (1, -2, 4)^T$ 在基 $\alpha_1 = (1, 2, 4)^T, \alpha_2 = (1, -1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 9)^T$ 的坐标是 _____.

678 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间的一个基底, 若

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2,$$

则由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵是 _____.

679 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & a+5 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & a & -5 \end{bmatrix}$, 若 $Ax = 0$ 的解空间是二维空间, 那么 $a =$ _____.

680 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系是 _____.

681 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + ax_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + \quad \quad x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

的基础解系由 2 个线性无关的解向量构成, 那么方程组的通解是_____.

682

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $A^*x = 0$ 的通解是_____.

683

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^nx = 0$ 的通解_____.

684

已知方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ ax_2 + 2x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$ 无解, 则 $a =$ _____.

685

设 $\alpha_1 = (6, -1, 1)^T$ 与 $\alpha_2 = (-7, 4, 2)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

的两个解, 那么此方程组的通解是_____.

686

设线性方程组 $A_{3 \times 4}x = b$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

有通解 $k(1, 2, -1, 1)^T + (1, -1, 0, 2)^T$, 其中 k 是任意常数, 则方程组 $B_{3 \times 3}x = b$ 即

$$\begin{cases} a_{12}y_1 + a_{13}y_2 + a_{14}y_3 = b_1 \\ a_{22}y_1 + a_{23}y_2 + a_{24}y_3 = b_2 \\ a_{32}y_1 + a_{33}y_2 + a_{34}y_3 = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

有一个特解是_____.

687

设线性方程组 $A_{3 \times 3}x = b$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

有唯一解 $\xi = (1, 2, 3)^T$.

方程组 $B_{3 \times 4} y = b$ 即

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 = b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 = b_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

有特解 $\alpha = (-2, 1, 4, 2)^T$, 则方程组(2)的通解是_____.

688

已知方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ (II) $x_1 + 5x_3 = 0$

那么(I)与(II)的公共解是_____.

689

已知非齐次线性方程组(I)与(II)同解, 其中

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} ax_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - ax_3 = 16 \end{cases}$$

则 $a =$ _____.

690

已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 那么 A^* 的特征值是_____.

691

已知三阶矩阵 A 的特征值是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 又三阶矩阵 B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$. 则矩阵 B 的特征值是_____.

692

设 A 是主对角线元素之和为 -5 的三阶矩阵, 且满足 $A^2 + 2A - 3E = O$, 那么矩阵 A 的三个特征值是_____.

693

已知 $\alpha = (a, 1, 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量, 那么 α 在矩阵 A 中对应的特征值是_____.

694

已知 $\alpha = (1, 3, 2)^T, \beta = (1, -1, 2)^T$, 若矩阵 A 和 $\alpha\beta^T$ 相似, 那么矩阵 $(A + 2E)^*$ 的最小特征值是_____.

695

设 A 是三阶实对称矩阵, 存在正交阵 $Q = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$, 使得 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q =$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则矩阵 $B = A - \xi_1\xi_1^T$ 的特征值是_____.

696

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 最大特征值的特征向量是_____.

697

已知 A 是 3 阶矩阵, 且矩阵 A 各行元素之和均为 5, 则矩阵 A 必有特征向量_____.

698

设 $\alpha = (1, -1, a)^T, \beta = (1, a, 2)^T, A = E + \alpha\beta^T$, 且 $\lambda = 3$ 是矩阵 A 的特征值, 则矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量是_____.

699

已知 $P^{-1}AP = B$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则矩阵 A 关于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量是_____.

700

已知 A 是三阶实对称矩阵, 特征值是 1, 3, -2, 其中 $\alpha_1 = (1, 2, -2)^T, \alpha_2 = (4, -1, a)^T$ 分别是属于特征值 $\lambda = 1$ 与 $\lambda = 3$ 的特征向量, 那么矩阵 A 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量是_____.

701

设 A 是三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关的列向量, 且 $A\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, 则和 A 相似的矩阵是_____.

702

A 是三阶矩阵, ξ, α, β 是三个三维线性无关的列向量, 其中 $A\xi = 0$ 有解 $\xi, A\alpha = \beta$ 有解 $\alpha, A\alpha = \alpha$ 有解 β , 则 $A \sim$ _____.

703

已知 A 是三阶实对称矩阵, 满足 $A^2 - 2A = 3E$, 如果秩 $r(A + E) = 2$, 则和 A 相似的对角矩阵是_____.

704

已知 A 是三阶实对称矩阵, 若正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, 如果 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量, 则 $Q =$ _____.

705

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似, 则 $b =$ _____.

706

设 $\alpha = (1, -1, a)^T$ 是 $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 的特征向量, 又知 $r(A^*) = 3$, 则 $a =$ _____.

707

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 和对角矩阵相似, 则 $a =$ _____.

708

已知二次型 $x^T A x = ax_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的秩为 2, 则 $a =$ _____.

709

已知 3 元二次型 $x^T A x = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 的秩为 2, 且 $\alpha = (2, 1, 2)^T$ 是 A 的特征向量, 则二次型 $x^T A x$ 的正惯性指数 $p =$ _____.

710

已知三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 的秩为 2, 则二次型的正惯性指数 $p =$ _____.

711

二次型 $x^T A x = ax_1^2 + ax_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 经正交变换化为标准形 $3y_1^2 - y_2^2$, 则 $a =$ _____.

712

二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_3x_4$ 的规范形是 _____.

713

已知二次型 $x^T A x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3$ 的规范形是 $y_1^2 + y_2^2$, 则 a 的取值范围是 _____.

714

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_3 + 2tx_2x_3$ 经正交变换 $x = Py$ 可化成标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 7y_3^2$, 则 $t =$ _____.

715

若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ 是正定的, 则 a 的取值范围是 _____.

716

设 $\alpha = (1, 0, 1)^T$, $A = \alpha \alpha^T$, 若 $B = (kE + A)^2$ 是正定矩阵, 则 k 的取值范围是 _____.

717

设 A 是三阶实对称矩阵, 满足 $A^3 = 2A^2 + 5A - 6E$, 且 $kE + A$ 是正定矩阵, 则 k 的取值范围是 _____.

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, E 是 n 阶单位阵, 矩阵 $B = -aE + A^T A$ 是正定矩阵, 则 a 的

取值范围是_____.

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = 3x_1^2 + ax_3^2$ 的矩阵 $\mathbf{B}$ 合同, 则

a 的取值 .

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 合同, 那么使 $C^T A C = B$ 的可逆矩阵

$C = \frac{1}{\lambda}$

概率论与数理统计

721 设两个相互独立事件 A 与 B 至少有一个发生的概率为 $\frac{8}{9}$, A 发生 B 不发生与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

722 已知事件 A 与 B 相互独立, $P(A) = a, P(B) = b$. 如果事件 C 发生必然导致事件 A 与 B 同时发生, 则 A, B, C 都不发生的概率为 _____.

723 已知事件 A, B 仅发生一个的概率为 0.3, 且 $P(A) + P(B) = 0.5$, 则 A, B 至少有一个不发生的概率为 _____.

724 10 个同规格的零件中混入 3 个次品, 现进行逐个检查, 则查完 5 个零件时正好查出 3 个次品的概率为 _____.

725 设 A, B, C 是两两相互独立且三事件不能同时发生的随机事件, 且它们的概率相等. 则 $P(A \cup B \cup C)$ 的最大值为 _____.

726 已知甲袋有 3 个白球, 6 个黑球, 乙袋有 5 个白球, 4 个黑球. 先从甲袋中任取一球放入乙袋, 然后再从乙袋中任取一球放回甲袋, 则甲袋中白球数不变的概率为 _____.

727 某人参加一个笔试, 其中有三道选择题不会做, 只能瞎猜, 每个选择题各有 4 个选项, 只有一个选项是正确的, 则这三个题他能猜对至少一个题的概率为 _____.

728 将一枚硬币重复掷五次, 则正、反面都至少出现二次的概率为 _____.

729 已知每次试验“成功”的概率为 p , 现进行 n 次独立试验, 则在没有全部“失败”的条件下, “成功”不止一次的概率为 _____.

730 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取出两个数, 则“两数之积小于 $\frac{1}{2}$ ”的概率为 _____.

731 某种产品由自动生产线进行生产, 一旦出现不合格品就立即对其进行调整, 经过调整后生产出的产品为不合格品的概率为 0.1. 那么两次调整之间至少生产 3 件产品的概率为 _____.

732 袋中有 8 个球, 其中 3 个白球 5 个黑球, 现随意从中取出 4 个球, 如果 4 个球中有 2 个白球 2 个黑球, 试验停止. 否则将 4 个球放回袋中, 重新抽取 4 个球, 直到出现 2 个白球 2 个黑球为止. 用 X 表示抽取次数, 则 $P\{X = k\} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($k = 1, 2, \dots$).

733 假设 X 服从参数为 λ 的指数分布, 对 X 作三次独立重复观察, 至少有一次观测值大于 2 的概率为 $\frac{7}{8}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

734 假设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 且 X 落入区间 $(1, 2)$ 内的概率达到最大, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

735 一批元件其寿命(单位: 小时)服从参数为 λ 的指数分布. 系统初始先由一个元件工作, 当其损坏时立即更换一个新元件接替工作. 那么到 48 小时为止, 系统仅更换一个元件的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

736 设袋中有黑, 白球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到二种颜色球都取到时停止, 则取球次数恰好为 3 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

737 已知随机变量 X 的概率密度 $f(x) = Ae^{-(\frac{x+1}{2})^2}$, 则常数 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

738 假设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = e^{-x^2+bx+c}$ ($x \in \mathbf{R}, b, c$ 为常数) 在 $x = 1$ 处取最大值 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, 则概率 $P\{1 - \sqrt{2} < X < 1 + \sqrt{2}\} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($\Phi(2) = 0.9772$).

739 设随机变量 X 服从 $(0, 2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0, 4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

740 从 $1, 2, \dots, N$ ($N > 3$) 这 N 个数中任取三个数, 记这三个数中中间大小的数为 X , 则随机变量 X 的分布律 $P\{X = k\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

741 设随机变量 X 的概率分布 $P\{X = k\} = \frac{a}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$. 其中 a 为常数, X 的分布函数为 $F(x)$, 已知 $F(b) = \frac{3}{4}$, 则 b 的取值应为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

742 设 X 是服从参数为 2 的指数分布的随机变量, 则随机变量 $Y = X - \frac{1}{2}$ 的概率密度函数 $f_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

743 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 其分布函数为 $F(x)$, 则有 $F(\mu + x\sigma) + F(\mu - x\sigma) = \underline{\hspace{2cm}}$.

744 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 随机变量函数 $Y = 1 - e^{-X}$ 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则 $F_Y(\frac{1}{2}) =$ _____.

745 已知随机变量 X 与 Y 都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 如果 $P\{\max(X, Y) > \mu\} = a (0 < a < 1)$, 则 $P\{\min(X, Y) \leq \mu\}$ 等于 _____.

746 设 $X \sim N(\mu, \sigma_1^2), Y \sim N(2\mu, \sigma_2^2)$, X 与 Y 相互独立, 已知 $P\{X - Y \geq 1\} = \frac{1}{2}$, 则 $\mu =$ _____.

747 假设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且都服从 0-1 分布: $P\{X_i = 1\} = p$, $P\{X_i = 0\} = 1 - p (i = 1, 2, 3, 4, 0 < p < 1)$, 已知二阶行列式 $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的值大于零的概率等于 $\frac{1}{4}$, 则 $p =$ _____.

748 已知随机变量 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布, 且随机变量 $Y = \begin{cases} X, & \text{当 } |X| \leq 1, \\ -X, & \text{当 } |X| > 1, \end{cases}$ 则 $P\{Y \leq \frac{1}{2}\} =$ _____.

749 已知随机变量 (X, Y) 的概率密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 则 $P\{X + Y \leq 1\} =$ _____.

750 如果用 X, Y 分别表示将一个硬币接连掷 8 次正反面出现的次数, 则 t 的一元二次方程 $t^2 + Xt + Y = 0$ 有重根的概率是 _____.

751 已知 $X \sim B(1, \frac{3}{4})$, $P\{Y = -\frac{1}{2}\} = 1$, 又 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, X\alpha_3 + Y\alpha_1$ 线性相关的概率为 _____.

752 已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{1}{3}, (k = 1, 2, 3)$, 当 $X = k$ 时随机变量 Y 在 $(0, k)$ 上服从均匀分布, 即

$$P\{Y \leq y | X = k\} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{y}{k}, & 0 < y < k, \\ 1, & k \leq y. \end{cases}$$

则 $P\{Y \leq 2.5\} =$ _____.

753 设随机变量 X_1 和 X_2 相互独立, 它们的分布函数分别 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 已知

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x, \end{cases} \text{ 则 } X_1 + X_2 \text{ 的分布函数 } F(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

754 设随机变量 (X, Y) 服从分布律

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$

$F(x, y)$, 则 $F\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

755 假设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, $Y = |X|$, 则 (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

756 已知 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	α
1	β	0.1	0.2

0.5, 则 $P\{X^2 Y^2 = 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

757 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P\{\max(X, Y) > \mu\} - P\{\min(X, Y) < \mu\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

758 设相互独立两个随机变量 X 和 Y 均服从标准正态分布, 则随机变量 $X - Y$ 的概率密度函数的最大值等于 $\underline{\hspace{2cm}}.$

759 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; 0)$, 其分布函数为 $F(x, y)$, 已知 $F(\mu_1, y) = \frac{1}{4}$, 则

$$y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

760 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $\Phi(2x+1)\Phi(2y-1)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 (X, Y) 服从正态分布 $N(\underline{\hspace{2cm}})$.

761 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布, 其分布函数为 $\Phi(x)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$, 则随机变量 $Z = XY$ 的分布函数 $F(x) =$ _____.

762 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} x, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} (0 < a < b)$, 且 $EX^2 = 2$, 则 $P\{|X| < \sqrt{2}\} =$ _____.

763 已知随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布, 已知 $P\{X_1 + X_2 > 0\} = 1 - e^{-1}$, 则 $E(X_1 + X_2)^2 =$ _____.

764 将 10 双不同的鞋随意分成 10 堆, 每堆 2 只, 以 X 表示 10 堆中恰好配成一双鞋的堆数, 则 $EX =$ _____.

765 假设随机变量 X 在 $[-1, 1]$ 上服从均匀分布, a 是区间 $[-1, 1]$ 上的一个定点, Y 为点 X 到 a 的距离, 当 $a =$ _____ 时, 随机变量 X 与 Y 不相关.

766 已知编号为 1, 2, 3, 4 的 4 个袋中各有 3 个白球, 2 个黑球, 现从 1, 2, 3 袋中各取一球放入 4 号袋中, 则 4 号袋中白球数 X 的期望 $EX =$ _____.

767 已知随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 如果随机变量 $Y = X_1 X_2 X_3$ 的方差 $DY = \frac{1}{8}$, 则 $\sigma^2 =$ _____.

768 已知 (X, Y) 在以点 $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布, 对 (X, Y) 作 4 次独立重复观察, 观察值 $X+Y$ 不超过 1 的出现次数为 Z , 则 $E(Z^2) =$ _____.

769 相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 具有相同的方差 $\sigma^2 > 0$, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $D(X_i - \bar{X}) =$ _____.

770 已知随机变量 X 在 $(1, 2)$ 上服从均匀分布, 在 $X = x, (1 < x < 2)$ 条件下 Y 服从参数为 x 的指数分布, 则 $E(XY) =$ _____.

771 设随机变量 X 和 Y 均服从 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 且 $D(X+Y) = 1$, 则 X 与 Y 的相关系数 $\rho =$ _____.

772 设随机变量 X 服从分布 $E(1)$, 记 $Y = \min\{|X|, 1\}$, 则 Y 的数学期望 $E(Y) =$ _____.

773 设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} a - e^{-bx}, & x > 0, \\ c, & x \leq 0. \end{cases}$ 已知 $E(X) = 1$, 则 $D(X) =$ _____.

774 相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 均服从正态分布 $N(0, \frac{1}{2})$, 则 $D(|X_1 - X_2|) =$ _____.

775 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$), 则 $(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y) \sim$ _____.

776 设随机变量 X 和 Y 的联合分布为

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.2
1	0.2	0.2	0.1

则 X 和 Y 的协方差 $\text{cov}(X, Y) =$ _____.

777 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n > 1$) 独立同分布, 且方差为 $\sigma^2 > 0$, 记 $Y_1 = \sum_{i=2}^n X_i$ 和 $Y_n = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$, 则 Y_1 和 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_1, Y_n) =$ _____.

778 设随机变量 X 在 $[-1, b]$ 上服从均匀分布, 其中 b 是未知常数, 根据切比雪夫不等式有 $P\{|X - 1| \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{3}$, 则 $\epsilon =$ _____.

779 将一个骰子重复掷 n 次, 各次掷出的点数依次为 $X_1, \dots, X_n$. 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于 _____.

780 设随机变量列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立且同分布, 则 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 服从辛钦大数定律, 只要随机变量 X_1 _____.

781 假设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ 独立同分布, 且 $EX_i = DX_i = 1$ ($1 \leq i \leq 2n$), 如果 $Y_n = c \sum_{i=1}^n \frac{X_{2i} - X_{2i-1}}{\sqrt{n}}$, 则当常数 $c =$ _____ 时, 根据独立同分布中心极限定理, 当 n 充分大时 Y_n 近似服从标准正态分布.

782 设相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 均服从标准正态分布, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则随机变量 $X_1 - \bar{X}$ 服从的分布及参数为 _____.

783 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体 X 的简单随机样本, 已知总体 X 的分布为 $F(x)$, 令 $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 则 Y 的分布函数 $F_Y(y) =$ _____.

784 设 X 与 Y 都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 已知 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 为分别来自总体 X 与 Y 的两个相互独立的简单随机样本, 它们的样本均值与样本方差分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$ 和 S_X^2, S_Y^2 , 则统计量 $F = \frac{n(\bar{X} - \bar{Y})^2}{S_X^2 + S_Y^2}$ 服从的分布和参数为 _____.

785 已知 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \frac{1}{12\pi} e^{-\frac{1}{12}(9x^2 + 4y^2 - 8y + 4)}$, 则 $\frac{9X^2}{4(Y-1)^2}$ 服从的分布及参数为 _____.

786 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 而 $X \sim B(1, \frac{1}{2})$. 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $P\{\bar{X} = \frac{k}{n}\} =$ _____ ($0 \leq k \leq n$).

787 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|}$ ($-\infty < x < +\infty$), $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $E(S^2) =$ _____.

788 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 常数 C 满足 $P\{X > C\} = 0.6$, 则 $P\{Y > C^2\} =$ _____.

789 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记样本方差 S^2 , 则 $D(S^2) =$ _____.

790 设 $X_1, X_2, \dots, X_6$ 是来自正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 统计量 $F = a \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}$ 服从 $F(n_1, n_2)$ 分布, 其中 a 为常数, 则参数 n_1 和 n_2 分别为 _____.

791 设 $X_1, X_2, \dots, X_6$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 已知统计量 $T = a \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}}$ 服从 t 分布, 则常数 $a =$ _____.

792 设 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2), (\sigma > 0)$, 记 $Y = c \sum_{i=1}^n (X_{2i} - X_{2i-1})^2$, 已知 $EY = \sigma^2$, 则常数 $c =$ _____.

793

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中

$\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$ 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 则有 θ 的矩估计值为_____.

794

假设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 如果 $P\{\bar{X} > \mu + aS\} = 0.95$, 则 $a =$ _____. ($t_{0.05}(15) = 1.7531$).

795

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 9.0$, 参数 μ 的置信度为 0.90 的双侧置信区间的置信下限为 7.8, 则 μ 的置信度为 0.90 的双侧置信上限为_____.

796

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自区间 $[-a, a]$ 上均匀分布的总体 X 的简单随机样本, 则参数 a 的矩估计量为_____.

797

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体为区间 $[\theta, \theta + 2]$ 上均匀分布的 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值, 则未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} =$ _____.

798

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, -\infty < x < +\infty, \lambda > 0$, 则 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda} =$ _____.

799

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ 为已知, σ^2 未知, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Q^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, 对假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, 用 χ^2 概率统计量为_____.

800

设 $X_1, X_2, \dots, X_{36}$ 是取自正态总体 $N(\mu, 0.04)$ 的简单随机样本, 其中 μ 为未知参数, 记 $\bar{X} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} X_i$, 如果对检验问题

$$H_0: \mu \leq 0.5, H_1: \mu > 0.5$$

在显著性水平 $\alpha = 0.05$, 取检验拒绝域 $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_{36}): \bar{x} > C\}$, 则 $C =$ _____. ($\Phi(1.645) = 0.95$)

参 考 答 案

高等数学

466 【答案】 2

【分析 1】 先求出 $g(f(x))$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2 - f(x), & f(x) \leq 0, \\ 2 + f(x), & f(x) > 0, \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x < 0$; 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$. 于是

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2 + x^2, & x \leq 0, \\ 2 - (-x), & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 + x^2, & x \leq 0, \\ 2 + x, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + x^2) = 2$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 2$.

【分析 2】 不必求出 $g(f(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - (-x)) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + x^2) = 2.$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 2$.

467 【答案】 0

【分析】 用相消法结合洛必达法则求这个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限, 分子、分母同除以 $(e^x)^3$.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{-x} (3 + e^{-x})}{[e^{-2x} + (1 + e^{-x})^2] (e^{-x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + e^{-x}}{[e^{-2x} + (1 + e^{-x})^2] (e^{-x} + 1)} = 0 \times 3 = 0 \end{aligned}$$

其中用洛必达法则易知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$.

【评注】 求 $\frac{\infty}{\infty}$ (或 $\frac{0}{0}$) 型极限的一个重要方法是: 先约去分子、分母中极限为 ∞ (或 0) 的因子, 然后可用四则运算法则.

468 【答案】 $\frac{4}{3}$ 【分析】 将 x_n 化简

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)x_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) \\
 &= \cdots = 1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \\
 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \frac{4}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right) = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

【评注】 通过恒等变形转化为可以用四则运算法则求的极限,这是求数列极限的重要情形.

469 【答案】 0【分析】 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}\right)^{\alpha}$ 用洛必达法则求得 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha} e^{\frac{\beta}{\alpha}x}} = 0 \\
 \Rightarrow I &= 0.
 \end{aligned}$$

【评注】 (1) 同理可证: 设 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ 为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha}}{a^{\beta x}} = 0$. 再由函数极限与数列极限关系可得数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha}}{a^{\beta n}} = 0.$$

(2) 由该题结论可得:

设 $\alpha > 0, \beta > 0$ 为常数, 则 $I = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha} |\ln x|^{\beta} = 0$.(作变量替换, 令 $t = |\ln x| = -\ln x$ (不妨设 $0 < x < 1$) $\Rightarrow x = e^{-t} \Rightarrow I = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\beta} e^{-\alpha t} = 0$.)

(3) 由该题结论还可得:

设 $\alpha > 0, \beta > 0$ 为常数, 则 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}} = 0$ (作变量替换, 令 $t = \ln x \Rightarrow x = e^t, I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\beta}}{e^{\alpha t}} = 0$.)(4) 题中用到了一个简单的结论: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow$ 对 $\forall$ 常数 $\alpha > 0$ 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|^{\alpha} = 0.$$

470 【答案】 $e^{-\frac{1}{3}}$

【分析 1】 这是指数型 (1^∞) 极限, 用求指数型极限的一般方法:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{\sin x}{x}}$$

转化为求 $\frac{0}{0}$ 型极限

$$J \stackrel{\text{记}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{\sin x}{x}$$

先用等价无穷小因子替换, 再用洛必达法则.

$$J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2}x^2} \ln \left[\left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

于是

$$I = e^{-\frac{1}{3}}$$

其中 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\ln \left[\left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) + 1 \right] \sim \frac{\sin x}{x} - 1$ ($x \rightarrow 0$)

【分析 2】 用求 1^∞ 型极限的方法:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[\left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{x}{\sin x - x}} \right\}^{\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}}$$

利用重要极限

$$I = e^A$$

转化为求极限

$$A \stackrel{\text{记}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \frac{1}{2}x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

因此 $I = e^{-\frac{1}{3}}$.

471 【答案】 $\frac{1}{10}$

【分析】 $\sin^{10} x \sim x^{10}$ ($x \rightarrow 0$), 用等价无穷小因子替换得

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x^{10}}$$

再作变量替换: $u = x^2$ 得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u - \int_0^u \cos t^2 dt}{u^5} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos u^2}{5u^4} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}u^4}{5u^4} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

其中 $1 - \cos u^2 \sim \frac{1}{2}u^4$ ($u \rightarrow 0$).

472 【答案】 $\frac{1}{n!}$

【分析 1】 用等价无穷小因子替换

$$\sqrt[m]{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{m}}-1 \sim \frac{x}{m} (x \rightarrow 0)$$

得 $\sqrt[m]{\cos x}-1=\sqrt[m]{1+\cos x-1}-1 \sim \frac{\cos x-1}{m} (x \rightarrow 0)$, 于是

$$I=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{(\cos x-1)+1}(1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1}) \cdots (1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1})}{(1-\cos x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{(\cos x-1)+1}-1}{\cos x-1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{(\cos x-1)+1}-1}{\cos x-1} \right) \cdots$$

$$\cdot \left(\frac{\sqrt[n]{(\cos x-1)+1}-1}{\cos x-1} \right)$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{\cos x-1} \cdot \frac{\frac{1}{3}(\cos x-1)}{\cos x-1} \cdots \frac{\frac{1}{n}(\cos x-1)}{\cos x-1}$$

$$=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

【分析 2】 用等价无穷小因子替换:

$$t \sim \ln(1+t) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{m}}-1 \sim \ln[(\cos x)^{\frac{1}{m}}-1+1] = \frac{1}{m} \ln \cos x \quad (x \rightarrow 0)$$

因此

$$I=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x}-1)(\sqrt[3]{\cos x}-1) \cdots (\sqrt[n]{\cos x}-1)}{(\cos x-1)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\cos x} \ln \sqrt[3]{\cos x} \cdots \ln \sqrt[n]{\cos x}}{(\cos x-1)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^n \cos x}{(\cos x-1)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln[(\cos x-1)+1]}{\cos x-1} \right)^n = \frac{1}{n!}.$$

【分析 3】 用极限的四则运算法则, 这是 $n-1$ 个极限的乘积, 分别求每个 $\frac{0}{0}$ 型极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[m]{\cos x}}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{m}(\cos x)^{\frac{1}{m}-1} \sin x}{\sin x} = \frac{1}{m} \quad (m=2,3,\cdots,n),$$

于是

$$I=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{1-\cos x} \cdots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[n]{\cos x}}{1-\cos x}$$

$$=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

473 【答案】 2

【分析 1】 先作恒等变形后, 用等价无穷小因子替换:

$$a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1) = a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1)$$

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty, a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \sim \frac{\ln a}{x(x+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p a^{\frac{1}{x+1}} \frac{\ln a}{x(x+1)} = \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x(x+1)} \\ &= \ln a \quad (\text{当 } p=2 \text{ 时}). \end{aligned}$$

【评注】 容易看出: 当 $p < 2$ 时, $I = 0$, 当 $p > 2$ 时, $I = +\infty$.

【分析 2】 当 $p \leq 0$ 时, 显然

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p (a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) = 0.$$

当 $p > 0$ 时这是 $\infty \cdot 0$ 型极限, 先转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限, 然后用洛必达法则

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}}{x^{-p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) \ln a}{-px^{-p-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}(2x+1)\ln a}{px^2(x+1)^2} = \begin{cases} +\infty & (p > 2) \\ 0 & (0 < p < 2) \\ \ln a & (p = 2) \end{cases} \end{aligned}$$

474 【答案】 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\sin x}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

上式最后一步利用 $t \rightarrow 0$ 时, $e^t - 1 \sim t$.

【评注】 在计算极限时, 正确利用等价无穷小因子的代换定理能简化计算. 常遇到的等价无穷小有:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0$), $\ln(1+x) \sim x$.

475 【答案】 $\frac{1}{3}$

$$\text{【分析 1】 } \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = x \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) - x \left(\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【评注】 这里先作恒等变形后利用了等价无穷小因子替换:

$$(1+t)^a - 1 \sim at \quad (t \rightarrow 0).$$

【分析 2】 这是求 $\infty - \infty$ 型的极限, 先转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限, 然后再用洛必达法则.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{6}} - (1-t)^{\frac{1}{6}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{6}(1+t)^{-\frac{5}{6}} + \frac{1}{6}(1-t)^{-\frac{5}{6}} \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

476 【答案】 e^2

【分析】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})}{x} = 3$ (1)

当 $x \rightarrow 0$ 时, 分母为无穷小, 所以分子也为无穷小, 进一步有 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \frac{f(x)}{x}) = 0$.

因此, 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\ln(1+x+\frac{f(x)}{x}) \sim x + \frac{f(x)}{x}, \text{ 所以 (1) 可写为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 3.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2.$$

【评注】 由前面导出的 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \frac{f(x)}{x}) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

于是在原条件下又可求得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{x}{f(x)}} \right]^{\frac{f(x)}{x^2}} = e^2.$$

477 【答案】 $\max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

【分析 1】 恒等变形后用幂指数运算法则. 不妨设 a_1 为最大值

$$I = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^n + \dots + \left(\frac{a_m}{a_1} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} = a_1 \cdot 1 = a_1.$$

【分析 2】 用适当放大缩小法. 不妨设 $\max\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = a_1$

$$\text{则 } a_1 \leq (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leq a_1 m^{\frac{1}{n}}$$

令 $n \rightarrow \infty, m^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, 由夹逼定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1 \text{ (即 } \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \text{)}.$$

478 【答案】 2

【分析】 $\frac{2}{x} - 1 < \left[\frac{2}{x} \right] \leq \frac{2}{x}$

因此, 当 $x > 0$ $2 - x < x \left[\frac{2}{x} \right] \leq 2$

当 $x < 0$ $2 \leq x \left[\frac{2}{x} \right] < 2 - x$

又 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - x) = 2$.

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{x} \right] = 2$.

【评注】 上一题和本题都是利用夹逼定理求极限, 解这一类题的关键是要找出两个特殊的数列(或函数), 这要求我们熟练掌握一些常用的数列(或函数)的极限.

479 【答案】 0

【分析 1】 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q| < 1$, 由极限的不等式性质 $\Rightarrow \exists N$, 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, 即 $|a_{n+1}| < |a_n|$, 所以不妨认为数列 $|a_n|$ 是单调减少的, 又 $|a_n| \geq 0$, 由单调有界数列收敛定理推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a$, 则 $a = 0$, 若不然, $a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a}{a} = 1$, 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q| < 1$ 矛盾.

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

【分析 2】 取 q_0 满足 $|q| < q_0 < 1$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q| < q_0$ 及极限不等式性质 $\Rightarrow \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q_0 \quad \text{即} \quad |a_{n+1}| < q_0 |a_n| \quad (n \geq N) \\ |a_{N+1}| &< q_0 |a_N|, \\ |a_{N+2}| &< q_0^2 |a_N| \\ &\dots\dots\dots \\ |a_n| &< q_0^{n-N} |a_N| \quad (n > N) \end{aligned}$$

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} q_0^{n-N} |a_N| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

【评注】 (1) 注意, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

(2) 运用该题结果, 可求出以下数列的极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!} = 0$ 等.

(3) **【分析 1】** 与 **【分析 2】** 的方法均是在所设条件下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \exists$ 且为零的方法. 作为填空题, 实质上已告知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{记}}{=} a \exists$, 所以可用反证法求出该极限 a 的值. 若 $a \neq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1$$

与题设 $|q| < 1$ 矛盾, 因此 $a = 0$.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, |q| > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

480 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 先用等价无穷小因子替换,

$$e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - 1 \sim \ln\left[1 + e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - 1\right] = 1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

【分析 1】 转化为函数极限后再用洛必达法则.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2}.$$

【分析 2】 用泰勒公式: $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) (t \rightarrow 0)$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【分析 3】 若不会用上述等价无穷小因子替换, 我们可直接把 $\infty \cdot 0$ 型数列极限转化为 $\frac{0}{0}$ 型的函数极限, 然后用洛必达法则求解.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1+x)^{-\frac{1}{x}} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ee^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)} - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)} \frac{-\left[\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right]}{x^2} \\ &= -ee^{-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

481 【答案】 2

【分析 1】 这是 $\infty \cdot 0$ 型的数列极限, 转化为求 $\frac{0}{0}$ 型的函数极限, 然后用洛必达法则.

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n(1 + \frac{1}{n})}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan 2x - \arctan \frac{2x}{1+x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^2 - 1}{x(1+4x^2)((1+x)^2 + 4x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x}{(1+4x^2)((1+x)^2 + 4x^2)} = 2.$$

【分析 2】 这是 $\infty \cdot 0$ 型极限, 为简化计算设法寻求 $\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1}$ 的等价无穷小, 它是 $f(x) = \arctan x$ 的改变量 $f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n+1}\right)$. 由拉格朗日中值定理, 它可改写成

$$\begin{aligned} \arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} &= f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n+1}\right) = f'(\xi) \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n(n+1)} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{n+1} < \xi < \frac{2}{n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{1+\xi^2} \rightarrow 1$

因此, $I = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = 2.$

【评注】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$

求形如

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(y_n) - f(z_n)]$$

的数列极限 ($\infty \cdot 0$ 型), 可考虑用拉格朗日中值定理, 转化为求

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (y_n - z_n) \cdot f'(\xi)$$

其中 ξ 在 y_n 与 z_n 之间.

482 【答案】 $-\frac{7}{3}$

【分析 1】 用泰勒公式.

已知 $\ln(1+2x-x^2) = (2x-x^2) - \frac{1}{2}(2x-x^2)^2 + o((2x-x^2)^2)$

$$= 2x - x^2 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 2x - 3x^2 + o(x^2)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) x^2 + o(x^2) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[(2x - 3x^2) - 6 \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \right) + o(x^2) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(-3 + \frac{2}{3} \right) x^2 = -\frac{7}{3}.$$

【分析 2】 用洛必达法则.

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \left[\frac{2-2x}{1+2x-x^2} - 2(1+x)^{-\frac{2}{3}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{2x(1+2x-x^2)} + \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{1+2x-x^2} - 1 \right) - ((1+x)^{-\frac{2}{3}} - 1) \right] \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x+x^2}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x}{x}$$

$$= -1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}.$$

其中 $\frac{1}{1+2x-x^2} - 1 = (1+2x-x^2)^{-1} - 1 \sim (-1)(2x-x^2),$

$$(1+x)^{-\frac{2}{3}} - 1 \sim -\frac{2}{3}x (x \rightarrow 0).$$

483 【答案】 $\ln 3$

【分析】 先求出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$

由函数的连续性得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^{\frac{1}{x}}) = f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[2 + f(x^{\frac{1}{x}})] = \ln 3.$

484 【答案】 $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\ln 2$

【分析】 设 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (a \leq x \leq x_0) \\ h(x) & (x_0 < x \leq b) \end{cases}$, 其中 $g(x), h(x)$ 分别在 $[a, x_0], (x_0, b]$ 是初等函数, 因而连续. 于是 $f(x)$ 在 $[a, x_0], (x_0, b]$ 连续, 又 $h(x)$ 在 $[x_0, b]$ 连续, 于是 $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow g(x_0) = h(x_0)$.

对于该 $f(x)$, 对 $\forall$ 常数 A , 显然 $x \neq 1$ 时 $f(x)$ 连续. 仅当

$$Ae^{\arctan x} \Big|_{x=1} = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \Big|_{x=1}$$

时 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续. 因此, 仅当

$$A = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\ln 2$$

时 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

485 【答案】 $a = -1, b = \ln 2$

【分析】 先分别考察 $f(x), g(x)$ 的连续性.

对 $\forall a, x \neq 0$ 时 $f(x)$ 连续, $x = 0$ 时 $f(x)$ 左连续, $f(0) = 6$,

又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^3}{x - \arcsin x}$$

$$\stackrel{t = \arcsin x}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a \sin^3 t}{\sin t - t} = a \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{\sin t - t} = a \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t^2}{\cos t - 1} = -6a$$

仅当 $a = -1$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 右连续. 因此, 仅当 $a = -1$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

对 $\forall b, x \neq 1$ 时 $g(x)$ 连续, $x = 1$ 时 $g(x)$ 右连续, $g(1) = e^b + 1$, 又

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 \sin(x-1)}{x-1} = 3,$$

仅当 $e^b + 1 = 3$, 即 $e^b = 2, b = \ln 2$ 时 $g(x)$ 在 $x = 1$ 左连续. 因此, 仅当 $b = \ln 2$ 时 $g(x)$ 在 $x = 1$ 连续.

现由连续性运算法则知, $b = \ln 2, a = -1$ 时 $f(x) + g(x)$ 处处连续.

$a \neq -1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 不连续, $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续

$\Rightarrow f(x) + g(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

$b \neq \ln 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续, $g(x)$ 在 $x = 1$ 不连续

$\Rightarrow f(x) + g(x)$ 在 $x = 1$ 不连续.

因此, 仅当 $a = -1, b = \ln 2$ 时 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处处连续.



486

【答案】

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1. \end{cases}$$

【分析】 注意在 $x = 1$ 处 $\arctan x = \frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4}$ 易得

$$f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \leq 1,$$

$$\text{其中 } x = 1 \text{ 处是 } f'_+(1) = \left. \frac{1}{1+x^2} \right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4} \right)' = \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), x \geq 1.$$

$$\text{其中 } x = 1 \text{ 处是 } f'_-(1) = \left. \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1) \right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } f'_+(1) = f'_-(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{因此 } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1. \end{cases}$$

487

【答案】

$$\begin{cases} \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

【分析】 当 $x \neq 0$ 时, 由求导法则得

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}x - \arctan x}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}$$

当 $x = 0$ 时

方法一: 按定义

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x(1+x^2)} = 0 \end{aligned}$$

方法二: 易知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 = f(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - 2x\arctan x}{2x} = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0.$$

【评注】 求形如 $f(x) = \begin{cases} g(x), & (x \neq x_0), \\ A, & (x = x_0), \end{cases}$ 分段函数在分段点处的导数时一般要用

定义来求, 或函数在分段点连续的条件下求导数的极限. 即用下面定理求分段函数在分段点的导数: (1) $f(x)$ 在 x_0 处连续; (2) $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导, (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

488 【答案】 1

【分析】 因 $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} > 0$,

$\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (0, \delta)$ 时 $f(x) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{f(x) \ln x}$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} (x \ln x) = f'(0) \cdot 0 = 0$, 其中

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'_+(0) = f'(0).$$

因此

$$J = e^0 = 1.$$

489 【答案】 1

【分析】 利用导数定义, 转化为求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\varphi(x)) - f(1)}{\varphi(x)} = f'(1)$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+x) - f(1)}{x} \cdot \frac{x}{x+2\sin x} - \frac{f(1-2\sin x) - f(1)}{-2\sin x} \cdot \frac{(-2\sin x)}{x+2\sin x} \right] \\ &= f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+2\sin x} + f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{x+2\sin x} \\ &= f'(1) \frac{1}{3} + f'(1) \frac{2}{3} = f'(1) = 1. \end{aligned}$$

490 【答案】 e^6

【分析】 这是指数型的数列极限, 先化为

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

转化为求

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln f\left(\frac{1}{n}\right)}{1 - \cos \frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}} \left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0) \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0)}{\frac{1}{n}} = 2 \cdot (\ln f(x))' \Big|_{x=0} \\ &= 2 \cdot \frac{f'(0)}{f(0)} = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$I = e^6.$$

【评注】 下面方法是错误的.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln f(t) - \ln f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(t)}{f(t)}}{1} = \frac{f'(0)}{f(0)}$$

这是因为题设中没有假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域可导及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

491 【答案】 $\frac{1}{2} f''(a)$

$$\text{【分析 1】 } I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} \quad (1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} f''(a) \quad (3)$$

(1) 式到 (2) 式用了洛必达法则, (2) 式到 (3) 式利用了 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处的导数定义.

【评注】 由于题设中没有 $f''(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内存在及 $f''(x)$ 在 $x=a$ 是连续的, 所以(2)式到(3)不能利用洛必达法则. 由 $f''(a) \exists \Rightarrow f'(x)$ 在 $x=a$ 某邻域可导, 对(1)式可用洛必达法则.

【分析 2】 用泰勒公式.

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

代入得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)}{h} - f'(a) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}f''(a) + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) = \frac{1}{2}f''(a). \end{aligned}$$

492

【答案】

$$\begin{cases} f' \left(x^2 \arctan \frac{1}{x} \right) \cdot \left(2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^2} \right), & x < 0, \\ f'(\ln(1+x^2)) \cdot \frac{2x}{1+x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$$

【分析】 先考察 $\varphi(x)$ 的可导性并求导. 因 $\varphi(x)$ 在分段点 $x=0$ 的两侧表达式不同, 因此, 要分别求出 $x=0$ 处的左右导数以及 $x>0$ 和 $x<0$ 时的导数.

$x=0$ 时, 按定义求 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数为:

$$\varphi'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \arctan \frac{1}{x}}{x} = 0$$

$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数为 $\ln(1+x^2)$ 在 $x=0$ 的右导数:

$$\varphi'_+(0) = \left. \frac{2x}{1+x^2} \right|_{x=0} = 0$$

于是 $\varphi'(0) = 0$.

$$x > 0 \text{ 时, } \varphi'(x) = (\ln(1+x^2))' = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$x < 0 \text{ 时, } \varphi'(x) = \left(x^2 \arctan \frac{1}{x} \right)' = 2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^2}$$

因此, 由复合函数求导法得

$$\frac{d}{dx} f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

$$= \begin{cases} f' \left(x^2 \arctan \frac{1}{x} \right) \cdot \left(2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^2} \right), & (x < 0), \\ f'(\ln(1+x^2)) \cdot \frac{2x}{1+x^2}, & (x \geq 0). \end{cases}$$

493

【答案】

$$f(x)^{\frac{1}{g(x)}} \left(\frac{f'(x)}{g(x)f(x)} - \frac{g'(x)\ln f(x)}{[g(x)]^2} \right) + \frac{g'(x)}{g(x)\ln f(x)} - \frac{f'(x)\ln g(x)}{f(x)[\ln f(x)]^2}$$

【分析】 $(f(x)^{\frac{1}{g(x)}})' = [e^{\frac{\ln f(x)}{g(x)}}]' = e^{\frac{\ln f(x)}{g(x)}} \left(\frac{\ln f(x)}{g(x)} \right)'$

$$= f(x)^{\frac{1}{g(x)}} \left(\frac{f'(x)}{g(x)f(x)} - \frac{g'(x)\ln f(x)}{[g(x)]^2} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\log_{f(x)} g(x))' &= \left(\frac{\ln g(x)}{\ln f(x)} \right)' = \frac{\frac{g'(x)}{g(x)} \ln f(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x)}{[\ln f(x)]^2} \\ &= \frac{g'(x)}{g(x) \ln f(x)} - \frac{f'(x) \ln g(x)}{f(x) [\ln f(x)]^2} \end{aligned} \quad (2)$$

(1) + (2) 为所求.

【评注】 求 $f(x)^{\frac{1}{g(x)}}$ 的导数时, 也可用“对数求导法”, 令 $u = f(x)^{\frac{1}{g(x)}}$, 则 $\ln u = \frac{1}{g(x)} \ln f(x)$, 因此 $\frac{u'}{u} = \left(\frac{\ln f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{g(x)f(x)} - \frac{g'(x)\ln f(x)}{[g(x)]^2}$.

494 【答案】 $y = \sqrt[3]{3}e^{\frac{1}{3}}x$

【分析】 显然 $(0,0)$ 不在曲线上, 因此要先求出切点坐标, 设切点坐标为 $(x_0, e^{x_0^3})$

$y' = (e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3}$, 因此, 切线方程为:

$$y - e^{x_0^3} = 3x_0^2 e^{x_0^3} (x - x_0)$$

把 $(0,0)$ 代入上式得 $e^{x_0^3} = 3x_0^2 e^{x_0^3}, x_0^3 = \frac{1}{3}$.

因此切线斜率为 $k = 3x_0^2 e^{x_0^3} = \sqrt[3]{3}e^{\frac{1}{3}}$

于是切线方程为

$$y = \sqrt[3]{3}e^{\frac{1}{3}}x.$$

【评注】 求曲线过一已知点 (x_0, y_0) 的切线方程时, 一定要考察 (x_0, y_0) 是否在曲线上, 若 (x_0, y_0) 不在曲线上, 则先求切点坐标, 再求切线方程.

495 【答案】 ac

【分析】 P 点的坐标为 $(0, y)$, AP 与 x 轴夹角为 θ , 则

$$\tan \theta = \frac{y}{a}$$

两边对时间 t 求导得

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{a} \frac{dy}{dt}$$

以 $\cos^2 \theta = \frac{a^2}{l^2}, \frac{dy}{dt} = c$ 代入得

$$\frac{l^2}{a^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{a}$$

因此 $l^2 \frac{d\theta}{dt} = ac$.

496 【答案】 $\frac{1}{t}; -\frac{1+t^2}{t^3}; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

【分析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

$y = y(x)$ 的曲率

$$K = \frac{|y''(x)|}{(1+y'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1+t^2}{|t|^3}}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

【评注】 (1) 通常将一阶导数化简后,再计算二阶导数会简单些.

(2) 注意 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}$, 通常易犯的错误是 $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t$.

497 【答案】 $-\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$

【分析】 将方程两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

解出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)} \quad \left(1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\cos(x+y)}\right)$$

再对 x 求导得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-\cos(x+y)} \right) = -\frac{\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^2} (1+y')$$

代入 $1+y'$ 的表达式得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^3} = -\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$$

498 【答案】 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$

【分析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{t} = t \frac{dy}{dt}$ (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(t \frac{dy}{dt} \right) = \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} + t \frac{d}{dx} \frac{dy}{dt}$$

$$= t \frac{dy}{dt} + t \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dt}{dx} = t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

把(1),(2)代入 $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0$ 中,得 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$.



499 【答案】 $(-1)^{n-1}(n-1)! [(-2)^n - 3^n]$

【分析 1】 $f(x) = \ln(1-2x) - \ln(1+3x)$
 $f^{(n)}(x) = (\ln(1-2x))^{(n)} - (\ln(1+3x))^{(n)}$

由归纳法易得到

$$(\ln(1+ax))^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n (n-1)! (1+ax)^{-n}$$

于是

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n (1-2x)^{-n} - 3^n (1+3x)^{-n}]$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n - 3^n].$$

【分析 2】 $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n + o(t^n)$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + o(t^n) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(1-2x) - \ln(1+3x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-2x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (3x)^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} [(-2)^k - 3^k] x^k + o(x^n)$$

$$\stackrel{\text{记}}{=} \sum_{k=1}^n a_k x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n = n! \frac{(-1)^{n-1}}{n} [(-2)^n - 3^n] = (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n - 3^n].$$

500 【答案】 $x = 1$

【分析】 将方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两边对 x 求导,得

$$6y^2 y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$$

整理得 $y'(3y^2 - 2y + x) = x - y$.

(1)

令 $y' = 0$, 有 $x = y$, 将其代入 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 得

$2x^3 - x^2 - 1 = (x^3 - 1) + (x^3 - x^2) = 0$, 即 $(x-1)(2x^2 + x + 1) = 0$, 于是 $x = 1$ 是唯一的驻点. 此时, $y = x = 1$.

进一步判断 $x = 1$ 是否极值点:

对(1)求导 $y''(3y^2 - 2y + x) + y'(3y^2 - 2y + x)'_x = 1 - y'$

把 $x = 1, y = 1, y'(1) = 0$ 代入上式,得 $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$, 于是 $y(x)$ 只有极值点为 $x = 1$, 它是极小值点.

501 【答案】 $(-\infty, -1], [3, +\infty)$ 是单调增区间; $[-1, 1), (1, 3]$ 是单调减区间;

$f(-1) = -2$ 是极大值, $f(3) = 0$ 是极小值; $(1, +\infty)$ 是凹区间; $(-\infty, 1)$ 是凸区间

【分析】 $y = \frac{((x-1)+(-2))^2}{4(x-1)} = \frac{1}{4}(x-1) - 1 + \frac{1}{x-1}$

$$y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{4(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = -1, y'' \neq 0, x = 1$ 处 y 无定义. 现用 $x = -1, x = 1, x = 3$ 将定义域分成如下区间并列表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y''	-	-	-	无定义	+	+	+
y		-2				0	

502 【答案】 $-3, -9$

【分析】 求出 $y'' = 6x + 2a$,
(1,3) 为该曲线拐点 $\Rightarrow$

$$y(1) = 1 + a + b + 14 = 3$$

$$y''(1) = 6 + 2a = 0$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$. 又

$$y''(x) = 6x - 6 = 6(x-1) = \begin{cases} > 0, & (x > 1) \\ = 0, & (x = 1) \\ < 0, & (x < 1) \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$ 时 (1,3) 确为该曲线的拐点.

因此, $a = -3, b = -9$.

503 【答案】 64

【分析】 为使 $f(x) \geq 20$, 只要 $3x^5 + A \geq 20x^3$ 即 $20x^3 - 3x^5 \leq A$, 设 $g(x) = 20x^3 - 3x^5$, 则 A 至少是 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值.

因

$$g'(x) = 60x^2 - 15x^4 = 15x^2(4 - x^2) = \begin{cases} > 0, & (0 < x < 2), \\ = 0, & (x = 2), \\ < 0, & (x > 2), \end{cases}$$

所以 $x = 2$ 是 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最大值点, 所以 A 至少为 $g(2) = 64$, 有 $f(x) \geq 20$.

504 【答案】 0; 27

【分析】 设 $\varphi(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27$, 则

$$\varphi'(x) = 12x(x-3) = \begin{cases} < 0, & 0 < x < 3, \\ = 0, & x = 3, \\ > 0, & x > 3, \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[0, 2]$ 单调下降

$$\varphi(0) = 27, \quad \varphi(2) = -13$$

$\Rightarrow \exists$ 唯一 $x_0 \in (0, 2), \varphi(x_0) = 0$

由于 $f(x) = |\varphi(x)| \Rightarrow$

$$f(0) = 27, f(x_0) = 0, f(2) = 13$$

因此, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 的最小值为 0, 最大值为 27.

【评注】(1) 若求 $f(x) = |\varphi(x)|$ 在 $[2, 4]$ 上的最大值与最小值, 除求出 $\varphi(2) = -13$ 外, 还须求出

$$\varphi(3) = -27 \quad \varphi(4) = -5$$

由 $\varphi(x)$ 的升降性知, 在 $[2, 4]$ 上 $\varphi(x) \neq 0$.

由于 $f(x) = |\varphi(x)|$

$$f(2) = 13, f(3) = 27, f(4) = 5$$

因此, $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 的最小值为 5, 最大值为 27.

(2) 求在 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最值时, 只须求出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内的驻点, 不可导点, 再将这些点处的函数值与端点的函数值比较, 挑出最大者和最小者, 不必判断驻点和不可导点是否为极值点.

505 【答案】 0

【分析 1】 若知道以下事实: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > 0 (< 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$, 立即可得 $b = 0$. 否则由 $b > 0$ (或 $b < 0$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$ 与 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有界矛盾.

【评注】 实质上就是用反证法证明 $b = 0$, 不妨设 $b > 0$, 取 a 满足 $0 < a < b$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > a$, 则存在 $x_0 > 0$.

当 $x \geq x_0$ 时 $f'(x) > a$, 在 $[x_0, x]$ 上用拉格朗日中值定理,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > a(x - x_0) \quad (\xi \in (x_0, x)),$$

即 $f(x) > a(x - x_0) + f(x_0)$, 因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [a(x - x_0) + f(x_0)] = +\infty.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 从而 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 上无界, 这与 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 上是有界函数矛盾.

【分析 2】 因 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 可导, 有界.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b \Rightarrow b = 0.$$

【评注】 事实上有如下结论: 设

(1) $f(x), g(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 为有限或 ∞);

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

也就是, 在上述情形下, 我们可不必验证分子 $f(x)$ 是否为无穷大量. 【分析 2】中用到了这个结论.

506 【答案】 0【分析 1】 任取定一点 $x_0 \in (a, +\infty)$, 对任意的 $x_0 \in (a, +\infty)$, 有

$$0 \leq \left| \frac{f(x)}{x^2} \right| = \left| \frac{f(x) - f(x_0) + f(x_0)}{x^2} \right|$$

$$= \left| \frac{f'(\xi)(x - x_0) + f(x_0)}{x^2} \right| \leq \frac{M|x - x_0| + |f(x_0)|}{x^2}$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间

$$\text{显然 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M|x - x_0| + |f(x_0)|}{x^2} = 0$$

由夹逼定理, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

【分析 2】 用上题中评注结论, 用洛必达法则立即可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 0.$$

507 【答案】 $\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$, C 为 $\forall$ 常数【分析】 将 $\int f'(x^3)dx = x^3 + C$ 两边求导得

$$f'(x^3) = 3x^2$$

令 $t = x^3$ ($x = t^{\frac{1}{3}}$), 则

$$f'(t) = 3t^{\frac{2}{3}}$$

 $\Rightarrow$

$$f(t) = \frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}} + C$$

因此,

$$f(x) = \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C, (C \text{ 为 } \forall \text{ 常数.})$$

508 【答案】 $-\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } I &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2-1+1}{(1-x^2)(1+x^2)} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C. \end{aligned}$$

509 【答案】 $\frac{3}{2}\arcsin \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{9-4x^2} + C$

$$\text{【分析 1】 } I = \int \frac{3-2x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}x\right)^2}} + \frac{1}{4} \int \frac{d(9 - 4x^2)}{\sqrt{9 - 4x^2}} \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{d\left(\frac{2}{3}x\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}x\right)^2}} + \frac{1}{4} \int \frac{d(9 - 4x^2)}{\sqrt{9 - 4x^2}} \\
 &= \frac{3}{2} \arcsin \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \sqrt{9 - 4x^2} + C.
 \end{aligned}$$

【分析 2】 令 $t = \sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}}$, 解出 $x = \frac{3}{2} \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{-6t}{(1+t^2)^2} dt$, 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{-6t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int 3t d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) \\
 &= \frac{3t}{1+t^2} - \int \frac{3dt}{1+t^2} = \frac{3t}{1+t^2} - 3\arctan t + C \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{9 - 4x^2} - 3\arctan \sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}} + C.
 \end{aligned}$$



510 【答案】 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln|1 + \sin 2x| + C$

【分析 1】 $I = \int \frac{\sin x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x} dx \\
 &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos 2x} d(\cos 2x) - \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos 2x} d(2x) + \frac{1}{2} \int dx \\
 &= -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| - \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{2}x + C \\
 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln |1 + \sin 2x| + C.
 \end{aligned}$$

【分析 2】 将 $\sin x$ 作如下分解

$$\sin x = \alpha(\sin x + \cos x) + \beta(\sin x + \cos x)' = (\alpha - \beta)\sin x + (\alpha + \beta)\cos x$$

$$\text{令 } \begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \text{得 } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C.
 \end{aligned}$$

【评注】 (1)【分析 1】中用到了

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\left[\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right) d\sin x \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + C \end{aligned} \right]$$

(2)【分析 2】中的方法适用于求积分

$$\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx.$$

511 【答案】 $\ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C$

【分析】 令 $\sqrt{x+1} = t$, 则 $x = t^2 - 1, dx = 2t dt$, 于是

$$I = \int \frac{t+2}{t^4-t} 2t dt = 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt = 2 \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1} \right) dt$$

$$= 2 \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{2t+1+1}{t^2+t+1} \right) dt$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= 2 \ln |t-1| - \ln |t^2+t+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

512 【答案】 $2x \sqrt{1+e^x} - 4 \sqrt{1+e^x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + C$

【分析】 先用分部积分法.

$$I = \int 2x d\sqrt{1+e^x} = 2x \sqrt{1+e^x} - 2 \int \sqrt{1+e^x} dx$$

再作变量替换,

令 $\sqrt{1+e^x} = t$, 则 $x = \ln(t^2-1), dx = \frac{2t}{t^2-1} dt$, 于是

$$\int \sqrt{1+e^x} dx = \int \frac{2t^2}{t^2-1} dt$$

$$= 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C$$

$$= 2 \sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + C$$

$$\text{因此, } I = 2x \sqrt{1+e^x} - 4 \sqrt{1+e^x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + C.$$

513 【答案】 $-\frac{\pi}{2}a^2 \ln 3$

【分析】 $I = \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx - \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \ln 3 dx$

由于 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数, 所以

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx = 0$$

由定积分的几何意义 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{\pi}{2}a^2$ (半径为 a 的半圆的面积)

所以 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \ln \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{3} dx = -\frac{1}{2}\pi a^2 \ln 3.$

【评注】 计算在对称区间上的定积分时, 要注意被积函数的奇偶性.

利用 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$ 是圆面积的 $\frac{1}{4}$ 的几何意义会迅速得出正确答案.

514 【答案】 $\frac{\pi}{16}$

【分析】 $I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$

而 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx$

$$\stackrel{\text{令 } x-1=t}{=} \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{4}\pi \text{ (单位圆面积的 } \frac{1}{4} \text{)}$$

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx \stackrel{\text{令 } x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$$

因此, 原式 $= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{16}\pi = \frac{\pi}{16}.$

【评注】 解答本题时, 要注意以下两条:

(1) 有时需作定积分的换元法后再利用定积分的几何意义.

(2) 记住结论:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的奇数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

有时对计算定积分很有用.

515 【答案】 $a \neq 1; b=0; c=0$ 或 $a=1; b=0; c=-2$

【分析】 因 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - ax) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_b^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt$ 存在,

所以必有 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = 0$, 因此必有 $b = 0$.

当 $a \neq 1$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_b^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\cos x - a} = 0$$

因此 $c = 0$

当 $a = 1$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_b^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{-\frac{1}{2}x^2} = -2$$

因此 $c = -2$.

516 【答案】 $0; \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt \right)$

【分析】 由 $f'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x = 0$, 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以,

极小值点为 $x = 0$, 极小值为 $f(0) = 0$.

由 $f''(x) = 2e^{-x^4}(1 - 4x^4) = 0$, 得 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时, $f''(x) < 0$, 当 $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $f''(x) > 0$,

因此, 拐点坐标为 $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt \right)$.

517 【答案】 $\psi'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

【分析】 对 $\int_0^1 f(xt) dt$ 作换元后, 再求 $\psi'(x)$.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 及 $f(x)$ 连续, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

当 $x = 0$ 时, $\psi(0) = \int_0^1 f(0) dx = 0$

当 $x \neq 0$ 时, $\psi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 令 $xt = u$,

则 $\psi(x) = \int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$

所以 $\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

当 $x = 0$ 时, $\psi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 1$

当 $x \neq 0$ 时, $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du + \frac{1}{x} f(x)$,

$$\text{所以 } \psi'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

518 【答案】 1

【分析】 $F(2a) - 2F(a) = \int_0^{2a} f(t) f'(2a-t) dt - 2 \int_0^a f(t) f'(2a-t) dt$
 $= \int_a^{2a} f(t) f'(2a-t) dt - \int_0^a f(t) f'(2a-t) dt$ (对第一个积分令 $2a-t=u$)
 $= \int_0^a f(2a-u) f'(u) du - \int_0^a f(u) f'(2a-u) du$ (对第一个积分作分部积分)
 $= f(2a-u) f(u) \Big|_0^a + \int_0^a f(u) f'(2a-u) du - \int_0^a f(u) f'(2a-u) du$
 $= f^2(a) - f(2a) f(0) = 1.$

519 【答案】 $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

【分析】 设 $\int_0^1 f(x) dx = a, \int_0^2 f(x) dx = b$,

则 $f(x) = x^2 - bx + 2a$

对上式两边分别在 $[0, 1]$ 和 $[0, 2]$ 上作定积分

$$a = \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{b}{2} + 2a$$

$$\text{即 } a - \frac{1}{2}b = -\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$b = \int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right] \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2b + 4a$$

$$\text{即 } 4a - 3b = -\frac{8}{3} \quad (2)$$

由(1)式和(2)式得

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$$

于是 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$

【评注】 注意, $\int_a^b f(x) dx$ 是一个确定的数是解本题的关键.

520 【答案】 $\tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}$

【分析】 先对 $\int_1^4 f(x-2) dx$ 换元, 再计算.

设 $x-2=t$, $dx=dt$, 当 $x=1$ 时 $t=-1$; 当 $x=4$ 时 $t=2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt \\&= \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sec^2 \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t^2} d(-t^2) \\&= \tan \frac{t}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^2 = \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

521 【答案】 1

【分析】 令 $x=-t$,

$$I = - \int_1^{-1} \frac{dt}{1+e^{-\frac{1}{t}}} = \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{1+e^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx$$

$$\text{因此 } 2I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx = \int_{-1}^1 dx = 2$$

于是 $I=1$.

【评注】 对某些积分 $I = \int_a^b f(x)dx$ 难以处理时, 有时通过变形将 I 变为另一种形式 $I = \int_a^b g(x)dx$, 然后把两者结合在一起

$$2I = \int_a^b [f(x) + g(x)] dx$$

若该积分易处理, 则问题就解决了. 以下两种情形是有用的.

$$\begin{aligned}(1) I &= \int_0^b f(x) dx \xrightarrow{\text{令 } x=b-t} \int_0^b f(b-t) dt \\&= \int_0^b f(b-x) dx\end{aligned}$$

与原式相加得

$$2I = \int_0^b [f(x) + f(b-x)] dx.$$

$$(2) \text{ 由 } I = \int_{-a}^a f(x) dx \xrightarrow{x=-t} \int_{-a}^a f(-t) dt$$

$$\text{得到 } 2I = \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

522

【答案】

$$\int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1, \end{cases}$$

【分析 1】 因为

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$$



所以这是求分段函数的变限积分.

当 $x < -1$ 时

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t) dt &= \int_1^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt = \int_1^{-1} 1 dt + \int_{-1}^x t^2 dt \\ &= -2 + \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{3},\end{aligned}$$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x 1 dt = x - 1,$$

当 $x > 1$ 时

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3}.$$

因此,

$$\int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1, \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1. \end{cases}$$

【分析 2】 $\int_1^x f(t) dt \stackrel{(\text{记})}{=} F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 满足 $F(1) = 0$. 因而, 我们也可用拼接法求得分段函数 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $F_0(x)$

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} x^3, & (x \leq -1), \\ x + C_1, & (-1 \leq x \leq 1), \\ \frac{1}{3} x^3 + C_2, & (x \geq 1), \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 满足

$$\frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=-1} = (x + C_1) \Big|_{x=-1} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}$$

$$(x + C_1) \Big|_{x=1} = \left(\frac{1}{3} x^3 + C_2 \right) \Big|_{x=1} \Rightarrow C_2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = F_0(x) + C$$

现定出 C 使得

$$0 = F_0(1) + C = 1 + \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{3}$$

因此

$$\int_0^x f(t) dt = F_0(x) - \frac{5}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{3}, & (x \leq -1), \\ x - 1, & (-1 \leq x \leq 1), \\ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3}, & (x \geq 1). \end{cases}$$

【评注】若求分段函数 $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 的不定积分 $\int f(x) dx$, 或由变限积分法先求得一个原函数 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ (这时要用分段积分法如【分析 1】), 然后就可得

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

或由【分析 2】中的拼接法, 先求得一个原函数, 同样可得 $\int f(x) dx$. 对于多个连接点的分段函数, 也许拼接法更简便些.

523 【答案】 $\frac{3}{8}\pi a^2; 6a; \frac{32}{105}\pi a^3$

【分析】 $A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\sin^4 t - \sin^6 t) dt$$

$$= 12a^2 \left[\frac{1 \times 3}{2 \times 4} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \right] \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos t \sin t dt = 6a (\sin t)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi y^2 dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt$$

$$= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1 - \sin^2 t) dt$$

$$= 6\pi a^3 \left[\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{8}{9} \right) \right] = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

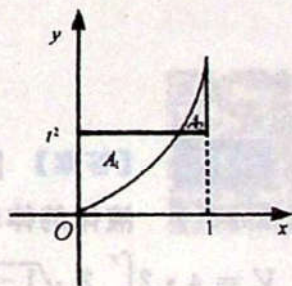
524 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $A_1 = \int_0^t (t^2 - x^2) dx, A_2 = \int_t^1 (x^2 - t^2) dx$

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) = 2 \int_0^t (t^2 - x^2) dx + \int_0^1 (x^2 - t^2) dx$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}, (0 < t < 1),$$

$$A'(t) = 2t(2t-1) \begin{cases} < 0, & (0 < t < \frac{1}{2}), \\ = 0, & (t = \frac{1}{2}), \\ > 0, & (\frac{1}{2} < t < 1), \end{cases}$$



因此, $t = \frac{1}{2}$ 时, $A = A_1 + A_2$ 取最小值.

525 【答案】 $\frac{1}{6}(11\sqrt{5}-1)\pi$

【分析】 设切点为 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$, 则过原点的切线方程为 $y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x$

把点 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$ 代入式得 $x_0 = 2, y_0 = 1$. 所以切线方程为 $y = \frac{1}{2}x$,

由切线 $y = \frac{1}{2}x (0 \leq x \leq 2)$ 绕 x 轴旋转一圈旋转体的侧面积为

$$S_1 = \int_0^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^2 2\pi \cdot \frac{1}{2}x \sqrt{1+\frac{1}{4}} dx = \sqrt{5}\pi$$

由曲线 $y = \sqrt{x-1} (1 \leq x \leq 2)$ 绕 x 轴旋转一圈旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^2 2\pi \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)^2} dx = \\ &= \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3} dx = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1). \end{aligned}$$

所以, 所求旋转体表面积为

$$S = S_1 + S_2 = \sqrt{5}\pi + \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\pi = \frac{1}{6}(11\sqrt{5}-1)\pi.$$

526 【答案】 $\frac{8}{5}\sqrt{3}, \left(\frac{9}{7}, 0\right)$

【分析】 (1) 由对称性, 上半平面部分 $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ 与 x 轴围成的面积的两倍即是 M 的面积. 于是

$$A = 2 \int_0^3 \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 3\sqrt{x} dx - \frac{2}{3} \int_0^3 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{8}{5}\sqrt{3}.$$

(2) 由对称性, $\bar{y} = 0$,

$$\bar{x} = \frac{2 \int_0^3 xy dx}{A} = \frac{\frac{2}{3} \int_0^3 x(3-x)\sqrt{x} dx}{\frac{8}{5}\sqrt{3}} = \frac{9}{7}.$$

527 【答案】 $[8(\arcsin y + y\sqrt{1-y^2}) + 4\pi](\text{m}^3); 0.01(\text{m}/\text{min}); 8000g\pi(\text{J})$

【分析】 液体的体积

$$V = 4 \cdot 2 \int_{-1}^y 2\sqrt{1-y^2} dy = 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} \cos^2 t dt$$

$$= [8(\arcsin y + y\sqrt{1-y^2}) + 4\pi](\text{m}^3)$$

设液面下降的速度 $\frac{dy}{dt}$,

$$\text{则 } \frac{dV}{dt} = 16\sqrt{1-y^2} \frac{dy}{dt}$$

$$\text{所以 } \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0}}{16 \sqrt{1-y^2}} \bigg|_{y=0} = \frac{0.16}{16} = 0.01 (\text{m/min})$$

抽出全部液体所作的功

$$\begin{aligned} W &= 4 \cdot 1000g \int_{-1}^1 4 \sqrt{1-y^2} \cdot (1-y) dy \\ &= 4000g \int_{-1}^1 4 \sqrt{1-y^2} dy = 8000g\pi (\text{J}). \end{aligned}$$

【评注】 因 $y \sqrt{1-y^2}$ 为奇函数, 所以 $\int_{-1}^1 y \sqrt{1-y^2} dy = 0$, 又因 $\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$ 表示 $\frac{1}{4}$ 单位圆面积, 所以 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{2} \pi$.

528 【答案】 $\frac{2k}{a}$

【分析】 取 L 为 x 轴, y 轴过 A 点, 如图所示. 在 L 上 $\forall$ 取小线段 $[x, x+dx]$, 它对点 A 的引力沿 y 轴方向分量为

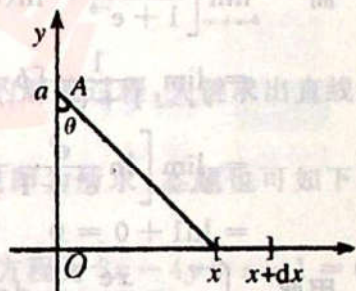
$$dF_y = \frac{k dx}{a^2 + x^2} \cos \theta$$

其中 $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, 所以

$$dF_y = \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

于是 L 对质点 A 的引力

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\stackrel{x = a \tan t}{=} 2ka \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{\cos^2 t}}{a^3 (1 + \tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \frac{2k}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{2k}{a}. \end{aligned}$$



529 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \text{【分析 1】 } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{2x^2 - 1}} &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{-d \frac{1}{\sqrt{2}x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}} = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}x} \bigg|_1^{+\infty} \\ &= \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



【分析 2】 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} \xrightarrow{x=\frac{1}{\sqrt{2}\cos t}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 t}}{\frac{1}{\sqrt{2}\cos t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{4}.$

530 【答案】 $\ln 2$

【分析 1】 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{1+e^{-x}} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{dx}{1+e^{-x}} \right]$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(1+e^x) \Big|_0^b \right]$
 $= \ln 2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right]$

而 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right]$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-b}} [b - (1+e^{-b})\ln(e^b + 1)]$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^b}{e^b + 1} - \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right]$
 $= \ln 1 + 0 = 0$

因此 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2.$

【分析 2】 作恒等变形后,对无穷积分作分部积分.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x de^x}{(e^x+1)^2} \\ &= - \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right) = - \frac{x}{e^x+1} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{de^{-x}}{1+e^{-x}} = - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

【评注】 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

但不可对它直接用分部积分公式,因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+e^{-x}} = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} \text{ 发散.}$$

因此【分析 1】上,先对 $\int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$ 用分部积分,然后再求

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right).$$

531 【答案】 3

【分析】 $a = b \times c \Rightarrow a \perp b, c; b = c \times a \Rightarrow b \perp a, c.$

$\Rightarrow$

$$|a| = |b \times c| = |b||c| \sin \langle b, c \rangle = |b||c| \quad (1)$$

$$|b| = |c \times a| = |c||a| \sin \langle c, a \rangle = |c||a| \quad (2)$$

$$|c| = |a \times b| = |a||b| \sin \langle a, b \rangle = |a||b| \quad (3)$$

由①,②式 $\Rightarrow |c| = 1, |a| = |b|$, 再由③ $\Rightarrow |a| = |b| = 1$.

因此, $|a| + |b| + |c| = 3$.

532 【答案】 $\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$

【分析 1】 过点 $P(-1, 0, 4)$ 且与平面 $3x - 4y + z + 10 = 0$ 平行的平面方程是

$$3(x+1) - 4(y-0) + (z-4) = 0$$

即 $3x - 4y + z - 1 = 0$

此平面与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 的交点为 $(15, 19, 32)$, 所求的直线过点 $P(-1, 0, 4)$ 和 $(15, 19, 32)$, 因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

【分析 2】 求空间直线方程一般有两种思路, 一种是像上面的解答过程, 关键求出直线的方向向量和直线上的一点坐标 $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

另一种思路是求出过所求直线的两个平面方程, 它们的交线即为所求, 本题也可如下解法:

过点 $P(-1, 0, 4)$ 且平行于平面 $3x - 4y + z + 10 = 0$ 的平面方程为 $3x - 4y + z - 1 = 0$

过直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 的平面束方程为

$$2x - z + 2 + \lambda(2y - z - 6) = 0$$

把 $P(-1, 0, 4)$ 的坐标代入上式得 $\lambda = -\frac{2}{5}$, 因此过 P 点和直线 L 的平面方程为

$$10x - 4y - 3z + 22 = 0$$

则 $\begin{cases} 3x - 4y + z - 1 = 0 \\ 10x - 4y - 3z + 22 = 0 \end{cases}$ 为所求.

533 【答案】 $\begin{cases} x - y + 3z + 8 = 0 \\ x - 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$

【分析 1】 先求出一平面 Π_1 , 使它过 L 且垂直于平面 Π , 设 L 的方向向量为 s , Π 的法向量为 n , 而 $n = (1, -1, 3)$.

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4i + 3j - 2k$$

在 L 的方程 $\begin{cases} 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$ 中令 $x = 0$ 得 $y = 4, z = -1$

则 Π_1 是过 $M_0(0, 4, -1)$ 与 s, n 平行的平面, 于是 Π_1 的方程为 $\begin{vmatrix} x & y-4 & z+1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

即: $\Pi_1: x - 2y - z + 7 = 0$

L 在 Π 上的投影既在平面 Π 上又在平面 Π_1 上, 即它们的交线, 因此 $\begin{cases} x - y + 3z + 8 = 0 \\ x - 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$ 为所求.

【分析 2】也可用平面束方程来求平面 Π_1 (过直线 L 且与平面 Π 垂直) 的方程.

L 是平面 $2y + 3z - 5 = 0$ 与 $x - 2y - z + 7 = 0$ 的交线, L 的平面束方程是

$$\lambda(2y + 3z - 5) + \mu(x - 2y - z + 7) = 0$$

即

$$\mu x + 2(\lambda - \mu)y + (3\lambda - \mu)z - 5\lambda + 7\mu = 0 \quad (*)$$

Π_1 含在此平面束中, 它与 Π 垂直, 于是它们的法向量点乘为零, 即

$$\mu - 2(\lambda - \mu) + 3(3\lambda - \mu) = 0.$$

取 $\mu = 1$, 得 $\lambda = 0$, 代入 $(*)$ 式得平面 Π_1 的方程

$$x - 2y - z + 7 = 0$$

因此 L 在平面 Π 的投影线方程是

$$\begin{cases} x - y + 3z + 8 = 0 \\ x - 2y - z + 7 = 0. \end{cases}$$

534 【答案】 $x^2 + y^2 - 13z^2 - 4x - 6y - 18z + 3 = 0$

【分析】设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 L 上的一点, 当 L 绕 L_1 旋转时, M_0 旋转到 $M(x, y, z)$, 此时有:

$$\begin{cases} z = z_0 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 3)^2 \end{cases} \quad (1)$$

又因 $\frac{x_0 - 3}{2} = \frac{y_0 - 1}{3} = z_0 + 1$

即 $\begin{cases} x_0 = 2z_0 + 5 \\ y_0 = 3z_0 + 4 \end{cases}$ 由此式得 $\begin{cases} (x_0 - 2)^2 = (2z_0 + 3)^2 \\ (y_0 - 3)^2 = (3z_0 + 1)^2 \end{cases} \quad (2)$

(2) 式代入 (1) 式中, 得

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (2z + 3)^2 + (3z + 1)^2$$

即 $x^2 + y^2 - 13z^2 - 4x - 6y - 18z + 3 = 0.$

535 【答案】 $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$

【分析】关键是求出球面的半径, 它就是点 M_0 与 Π 的距离

$$d = \frac{|x - 2y + 2z + 9|_{(2,0,-1)}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3$$

因此该球面的方程是

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9.$$

536 【答案】 $2dx - dy$

【分析】由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 0$,

则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} [f(x, y) - 2x + y - 2] = 0$, 又 $f(x, y)$ 连续, 则

$$f(0,1) - 0 + 1 - 2 = 0$$

$$f(0,1) = 1$$

$$\text{从而有 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x,y) - f(0,1) - 2x + (y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$$

$$\text{即 } f(x,y) - f(0,1) = 2x - (y-1) + o(\rho)$$

由微分定义知 $f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 处可微, 且

$$f'_x(0,1) = 2, f'_y(0,1) = -1$$

$$dz \Big|_{(0,1)} = 2dx - dy.$$

537 【答案】 5

【分析】 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x,y) - x + 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$ 知 $f(1,0) = -1$, 且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x,y) - x + 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{[f(x,y) - f(1,0)] - [(x-1) - 2y]}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$$

由此可知, $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 处可微, 且

$$f'_x(1,0) = 1, f'_y(1,0) = -2$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t,0) - f(1,2t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f(1+t,0) - f(1,0)] - [f(1,2t) - f(1,0)]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t,0) - f(1,0)}{t} - 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1,2t) - f(1,0)}{2t} \\ &= f'_x(1,0) - 2f'_y(1,0) = 1 + 4 = 5. \end{aligned}$$

538 【答案】 -2

【分析】 在 $z = (x-2y)^{y-2x}$ 中令 $y = 0$, 得

$$z = x^{-2x}$$

$$z'_x = (e^{-2x \ln x})' = x^{-2x}(-2 \ln x - 2)$$

$$\text{则 } z'_x \Big|_{x=1} = -2. \text{ 即 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = -2.$$

539 【答案】 1

【分析】 由 $f(x,y,z) = e^x + y^2 z$ 知

$$f'_x(x,y,z) = e^x + y^2 z'_x$$

等式 $x + y + z + xyz = 0$ 两端对 x 求偏导得

$$1 + z'_x + yz + xyz'_x = 0$$

令 $x = 0, y = 1, z = -1$ 得 $z'_x = 0$.

$$\text{则 } f'_x(0,1,-1) = e^0 = 1.$$

540 【答案】 $yf'_1 + 2xf'_2$

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + 2xf'_2$.

541 【答案】 0

【分析】 由于 $0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| |x| \leq |x| \rightarrow 0$

由夹逼原理知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

则 $a = 0$.

542 【答案】 $e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$

【分析】 在等式中 $z = e^x + y^2 + f(x+y)$ 令 $y = 0$, 得

$$x^3 = e^x + f(x)$$

则 $f(x) = x^3 - e^x$, 则 $z = e^x + y^2 + (x+y)^3 - e^{x+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}.$$

543 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{y}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{1}{2}.$$

544 【答案】 1

【分析】 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1.$$

545 【答案】 $\frac{1}{2}\sin x + C$

【分析】 由 $u(x, y) = f(2x+5y) + g(2x-5y)$ 及 $u(x, 0) = \sin 2x$ 知

$$f(2x) + g(2x) = \sin 2x$$

$$u'_y(x, y) = 5f'(2x+5y) - 5g'(2x-5y)$$

$$u'_y(x, 0) = 5f'(2x) - 5g'(2x) = 0$$

$$f'(2x) - g'(2x) = 0 \quad (1)$$

即

$$f(2x) + g(2x) = \sin 2x \text{ 知}$$

$$2f'(2x) + 2g'(2x) = 2\cos 2x \quad (2)$$

由以上(1)式和(2)式得

$$2f'(2x) = \cos 2x$$

$$f'(2x) = \frac{1}{2}\cos 2x$$

即 $f'(x) = \frac{1}{2} \cos x$

故 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + C$.

546 【答案】 2

【分析】 由 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{e^{xy} + xy \sqrt{x^2 + y^2}}$ 知

$$f(x, 0) = x^2$$

则 $f'_x(1, 0) = 2x|_{x=1} = 2$.

547 【答案】 $2dx + 3dy$

【分析】 由 $f(x, 0) = 2x$ 知

$$f'_x(0, 0) = 2$$

同理, 由 $f(0, y) = 3y$ 知

$$f'_y(0, 0) = 3$$

则 $df(0, 0) = 2dx + 3dy$.

548 【答案】 $-\frac{1}{3}(dx + 2dy)$

【分析 1】 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z = 0$
方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$$

将 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入上式得

$$dx + 2dy + 3dz = 0$$

则 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy)$.

【分析 2】 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z = 0$
由隐函数求导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+2y+3z} + yz}{3e^{x+2y+3z} + xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2e^{x+2y+3z} + xz}{3e^{x+2y+3z} + xy},$$

将 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入上式得 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}$.

则 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy)$.

【分析 3】 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$ 则 $z = 0$.
将 $y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{x+3z} = 1$, 该式两端对 x 求导得

$$e^{x+3z}(1 + 3z'_x) = 1,$$

将 $x = 0, z = 0$ 代入上式得 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}$, 同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}$.

则 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy)$.

【评注】 对于隐函数求具体点偏导数和全微分,仍然可采用先代后求的方法,即【分析 3】.如果本题改为:若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + \frac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = 1$ 确定,则

$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$. 此方法的优越性更加明显.

549 【答案】 $-dx + 2dy$

【分析】 等式 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 两端微分,得

$$(x+1)dz + zdx - 2ydy = x^2 df(x-z, y) + f(x-z, y)2xdx$$

当 $x=0, y=1$ 时,由 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 知 $z=1$, 所以

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,1)} + dx - 2dy = 0$$

即 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,1)} = -dx + 2dy$.

550 【答案】 $g'(x+y) + xg''(x+y) + 2y\varphi'(xy) + xy^2\varphi''(xy)$

【分析】 由 $z = xg(x+y) + y\varphi(xy)$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x+y) + xg'(x+y) + y^2\varphi'(xy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = g'(x+y) + xg''(x+y) + 2y\varphi'(xy) + xy^2\varphi''(xy).$$



551 【答案】 $2(x^2 + y^2)f(xy)$

【分析】 $z = \int_0^1 |xy - t| f(t) dt$

$$= \int_0^{xy} (xy - t)f(t) dt + \int_{xy}^1 (t - xy)f(t) dt$$

$$= xy \int_0^{xy} f(t) dt - \int_0^{xy} tf(t) dt + \int_{xy}^1 tf(t) dt - xy \int_{xy}^1 f(t) dt$$

$$\text{则 } z'_x = y \int_0^{xy} f(t) dt + xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - y \int_{xy}^1 f(t) dt + xy^2 f(xy)$$

$$= y \int_0^{xy} f(t) dt - y \int_{xy}^1 f(t) dt$$

$$z''_{xx} = y^2 f(xy) + y^2 f(xy) = 2y^2 f(xy)$$

由变量对称性知

$$z''_{yy} = 2x^2 f(xy)$$

$$\text{则 } z''_{xx} + z''_{yy} = 2(x^2 + y^2)f(xy).$$

552 【答案】 $yx^{y-1}f'_1 + 2\ln y \cdot y^{2x}f'_2$

【分析】 由 $z = f(x^y, y^{2x})$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}f'_1 + 2y^{2x}\ln y \cdot f'_2.$$

553 【答案】 $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

【分析】 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \arctan \frac{y}{x} + x^2 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2}) - y^2 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot (\frac{1}{y})$
 $= 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 2x \arctan \frac{y}{x} - y$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cdot \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot (\frac{1}{x}) - 1 = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$

554 【答案】 $-2e^{-x^2 y^2}$

【分析】 $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-x^2 y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-x^2 y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy^3 e^{-x^2 y^2},$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^3 ye^{-x^2 y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-x^2 y^2} - 2x^2 y^2 e^{-x^2 y^2}$

则 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{-x^2 y^2}.$

555 【答案】 $\sin y + 2x - \sin x^2 - 2x^2 \cos x^2$

【分析】 由题设可知线积分 $\int_C f(x, y) dx + x \cos y dy$ 与路径无关, 则

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y) = \cos y$$

则 $f(x, y) = \int \cos y dy = \sin y + C(x)$

又 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} [\sin y + C(x)] dx + x \cos y dy$

$$= \int_0^t [\sin 0 + C(x)] dx + \int_0^{t^2} t \cos y dy \quad (\text{走折线})$$

$$= \int_0^t C(x) dx + t \sin t^2 = t^2$$

上式两端对 t 求导得

$$C(t) + \sin t^2 + 2t^2 \cos t^2 = 2t$$

于是 $f(x, y) = \sin y + 2x - \sin x^2 - 2x^2 \cos x^2.$

556 【答案】 $e^{xy} + xye^{xy} + f_{11} + (x+y)f_{12} + xyf_{22} + f_2$

【分析】 由 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + f_1 + yf_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + f_{11} + xf_{12} + f_2 + yf_{21} + xyf_{22}$$

$$= e^{xy} + xye^{xy} + f_{11} + (x+y)f_{12} + xyf_{22} + f_2.$$

557 【答案】 $-\frac{1}{e}$

【分析】 $f'_x = 2x(2+y^2), f'_y = 2x^2y + \ln y + 1$

令 $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ 解得驻点 $(0, \frac{1}{e})$

$$A = f''_{xx}(0, \frac{1}{e}) = 2(2+y^2) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2(2 + \frac{1}{e^2})$$

$$B = f''_{xy}(0, \frac{1}{e}) = 4xy \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0$$

$$C = f''_{yy}(0, \frac{1}{e}) = (2x^2 + \frac{1}{y}) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e$$

所以 $B^2 - AC = -2e(2 + \frac{1}{e^2}) < 0$, 则 $A > 0$, 则 $f(0, \frac{1}{e})$ 是 $f(x, y)$ 的极小值, 极小值为 $f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

558 【答案】 -64

【分析】 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy(4-x-y) - x^2y = 0 \\ f'_y(x, y) = x^2(4-x-y) - x^2y = 0 \end{cases}$

得区域 D 内驻点 $(2, 1)$.

在边界 $y = 0$ ($0 \leq x \leq 6$) 上, $z = 0$.

在边界 $x = 0$ ($0 \leq y \leq 6$) 上, $z = 0$.

在边界 $x + y = 6$ ($0 \leq y \leq 6$) 上,

$$z = 2x^3 - 12x^2 \quad (0 \leq x \leq 6)$$

$$\frac{dz}{dx} = 6x^2 - 24x$$

令 $\frac{dz}{dx} = 0$, 得 $x = 4$, 此时 $y = 2$

$$f(4, 2) = -64, \quad f(2, 1) = 4, \quad f(0, 0) = 0,$$

则 $z = f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 $f(2, 1) = 4$, 最小值为 $f(4, 2) = -64$.

559 【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\text{grad } f = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$

$$\text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r})$$

$$= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)$$

$$= \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

$$\text{div}(\text{grad } f) \Big|_{(1, -2, 2)} = \frac{2}{3}.$$

560 【答案】 $j + (y-1)k$.

【分析】 将原式化为行列式形式

$$\text{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & z \end{vmatrix} = j + (y-1)k.$$
561 【答案】 $4x + 2y + (1 - \ln 2)z = 8$

【分析】 令 $F(x, y, z) = z - (xy)^2 + 2xy - 3$

则 $F_x = 2y - z(xy)^{-1}y, F_x(1, 2, 0) = 4$

$F_y = 2x - z(xy)^{-1}x, F_y(1, 2, 0) = 2$

$F_z = 1 - (xy)^2 \ln(xy), F_z(1, 2, 0) = 1 - \ln 2$

则所求切平面方程为

$$4(x-1) + 2(y-2) + (1 - \ln 2)z = 0$$

即 $4x + 2y + (1 - \ln 2)z = 8.$

562 【答案】 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$

【分析】 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的法向量为 $n_1 = (1, -2, 1)$

平面 $x + y + z = 0$ 的法向量为 $n_2 = (1, 1, 1)$.

曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切向量为

$$n_1 \times n_2 = (-3, 0, 3)$$

则所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}.$$

563 【答案】 $2\sqrt{2}$

【分析】 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的外法线向量为

$$n = (1, -1, 0)$$

其方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \cos \gamma = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \\ &= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-2) \times \frac{-1}{\sqrt{2}} + 0 \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

564 【答案】 -25

【分析】 函数 $f(x, y, z)$ 在点 $(1, 1, 0)$ 处方向导数的最大值和最小值分别为 $f(x, y, z)$ 在该点处梯度向量的模和梯度向量模的负值.



$$\text{grad } f \Big|_{(1,1,0)} = (3, 4, 0)$$

$$\|g\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

则函数 $f(x, y, z) = x^3 + y^4 + z^2$ 在点 $(1, 1, 0)$ 处方向导数的最大值与最小值之积为

$$\|g\|(-\|g\|) = -\|g\|^2 = -25.$$

565 【答案】 $\int_0^1 dy \int_0^{2\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$

【分析】 首先画出积分域的草图, 然后按照先 x 后 y 定限便得结果.

566 【答案】 $\int_0^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} f(x, y) dy$

567 【答案】 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x, y) dy$

568 【答案】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$

569 【答案】 $\frac{4}{3}$

【分析】 由于 $|x| + |y|$ 既是 x 的偶函数, 也是 y 的偶函数, 而积分域 $|x| + |y| \leq 1$ 关于两个坐标轴都对称, 则

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) d\sigma = 4 \iint_{D_1} (x+y) d\sigma = 8 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x dy = 8 \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{4}{3}.$$

570 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】 由于 $2y$ 是 y 的奇函数, 而积分域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 关于 x 轴对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2y d\sigma &= 0 \\ \iint_{x^2+y^2\leq 1} x^2 d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2) d\sigma \quad (\text{变量的对称性}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

571 【答案】 $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$

【分析】 交换积分次序得

$$\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 y e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

572 【答案】 $\frac{\pi a^3}{6}$

【分析】 将原积分化为极坐标下的累次积分

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{\pi a^3}{6}.$$

573 【答案】 $-\ln \cos 1$

【分析】 交换累次积分次序得

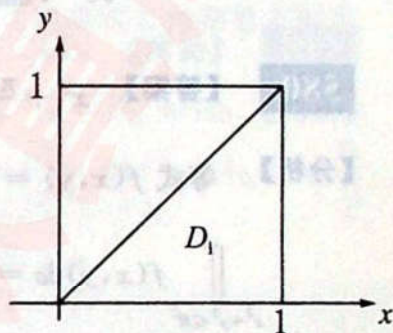
$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln \cos x \Big|_0^1 = -\ln \cos 1.$$

574 【答案】 $2\ln(1+\sqrt{2})$ 【分析】 由于区域 D 关于直线 $y=x$ 对称, 则

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

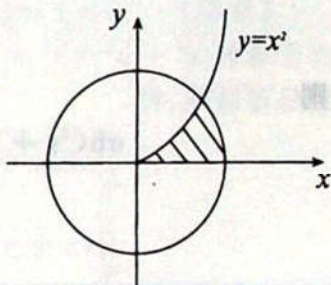
其中区域 D_1 如右图, 为下半三角形, 则

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos \theta} \\ &= 2 \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

**575** 【答案】 $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{6-y^2}} f(x,y) dx$

【分析】 由原题知积分域如右图, 则

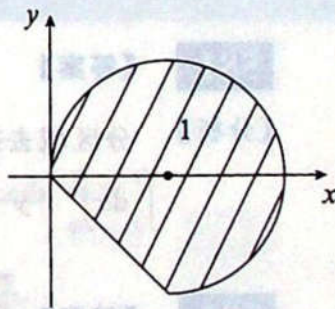
$$\text{原式} = \int_0^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{6-y^2}} f(x,y) dx.$$

**576** 【答案】 $\int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{\rho}{\sqrt{2}}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 \rho d\rho \int_{-\arccos \frac{\rho}{2}}^{\arccos \frac{\rho}{2}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta$

【分析】 由原题知积分域如右图, 则

$$\text{原式} = \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{\rho}{\sqrt{2}}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta +$$

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \rho d\rho \int_{-\arccos \frac{\rho}{2}}^{\arccos \frac{\rho}{2}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta$$

**577** 【答案】 $\frac{4}{3}$ 【分析】 $\iint_D \min(x,y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 y dx + \int_0^1 dy \int_0^y x dx = \frac{4}{3}.$

【分析】 由质心计算公式知

578 【答案】 $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

【分析】 交换积分次序得

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$



579 【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】 交换积分次序得

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx = \frac{2}{3}.$$

580 【答案】 $x^2 + \frac{\pi R^4}{4}(x+y)$

【分析】 等式 $f(x,y) = x^2 + (x+y) \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y) d\sigma$ 两端积分得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y) d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 d\sigma + \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (x+y) d\sigma \cdot \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y) d\sigma$$

由奇偶性和对称性知

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (x+y) d\sigma = 0$$

则

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y) d\sigma &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (x^2+y^2) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{4}\end{aligned}$$

$$f(x,y) = x^2 + \frac{\pi R^4}{4}(x+y).$$

581 【答案】 $\frac{4}{3}$

【分析】 分区域去掉被积函数中的绝对值然后计算

$$\int_0^2 dx \int_0^1 |y-x| dy = \int_0^1 dy \int_0^y (y-x) dx + \int_0^1 dy \int_y^2 (x-y) dx = \frac{4}{3}.$$

582 【答案】 $\frac{28}{45}\pi$

【分析】 利用直角坐标下先重积分后单积分的方法计算. 用平面 $Z=z(0 < z < 1)$ 去截积分域得一椭圆

$$\frac{x^2}{(1-\frac{z^2}{3^2})} + \frac{y^2}{2^2(1-\frac{z^2}{3^2})} = 1 + \frac{z^2}{3^2}$$

它所围的面积为

$$S(z) = \pi \sqrt{1-\frac{z^2}{3^2}} \cdot 2 \sqrt{1-\frac{z^2}{3^2}} = 2\pi(1-\frac{z^2}{3^2})$$

$$\text{故 } \iiint_{\Omega} z^2 dv = \int_0^1 z^2 \left[\iint_{D_z} dx dy \right] dz = \int_0^1 z^2 \cdot 2\pi(1-\frac{z^2}{3^2}) dz = \frac{28}{45}\pi.$$

583 【答案】 336π

【分析】 用直角坐标下先重积分后单积分的方法计算.

旋转面方程为: $2z = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \text{则 } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \int_2^8 \left[\iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\ &= \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = 336\pi. \end{aligned}$$

584 【答案】 $\frac{4\pi}{5}R^5$

【分析】 令 Ω_1 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, 则

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dv \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1+2+3) \cdot \frac{1}{3} \iiint_{\Omega_1} (x^2 + y^2 + z^2) dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^4 \sin\varphi dr = \frac{4\pi}{5}R^5. \end{aligned}$$

【评注】 本题中用到变量的对称性, 即 $\iiint_{\Omega_1} x^2 dv = \iiint_{\Omega_1} y^2 dv = \iiint_{\Omega_1} z^2 dv$.

585 【答案】 $\frac{\pi}{8}$

【分析】 x 是 x 的奇函数, 积分域 Ω 关于 yOz 坐标面对称, 则 $\iiint_{\Omega} x dv = 0$

$$I = \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{\pi}{8}.$$

586 【答案】 $\frac{5}{8}$

【分析】 由质心计算公式知

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r \cos\varphi \cdot r^4 dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 dr} = \frac{5}{8}.$$

587 【答案】 $8\pi a^4$

【分析】 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} 2ax dS = 2a \iint_{\Sigma} x dS = 2a \bar{x} S.$

其中 $\bar{x}$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ 的形心的 x 坐标, 则 $\bar{x} = a$

S 为该球面的面积, 则 $S = 4\pi a^2$

故 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = 8\pi a^4.$

588 【答案】 $\sqrt{2}\pi$

【分析】 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= \iint_D (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{2} dx dy \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

589 【答案】 $4\pi R^4$

【分析】 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

由于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 关于三个坐标面都对称, 而 $2xy, 2yz, 2zx$ 至少关于 x, y, z 某个变量是奇函数, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (2xy + 2yz + 2zx) dS &= 0 \\ \iint_{\Sigma} (x + y + z)^2 dS &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} R^2 dS = 4\pi R^4. \end{aligned}$$

590 【答案】 $2\pi R^3$

【分析】 $\oint_C 2xy ds = 0$ (奇偶性, 对称性)

$$\oint_C (x^2 + y^2 + 2xy) ds = \oint_C (x^2 + y^2) ds = \oint_C R^2 ds = R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi R^3.$$

591 【答案】 $\frac{13}{6}$

【分析】 $\int_L x ds = \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + (2x)^2} dx$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2) = \frac{13}{6}.$$

592 【答案】 $\frac{a^3}{2}$ 【分析】 圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = acost \\ y = asint \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_L xy ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} acost \cdot asint \sqrt{(-asint)^2 + (acost)^2} dt \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cost sint dt = \frac{a^3}{2}. \end{aligned}$$

593 【答案】 $\frac{\pi}{4}$ 【分析】 将 $x^2 + y^2 = 1$ 代入 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, 得 $z = 1$ 则曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = cost \\ y = sint \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\oint_L x^2 y^2 z^2 ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \sqrt{(-sint)^2 + (cost)^2 + 0^2} dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^2 t dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

594 【答案】 -1 【分析 1】 由曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在单连通区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关可知

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-ay}{x^2 + y^2 - 1} \right)$$

即

$$-\frac{2xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = \frac{2axy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$$

则 $a = -1$.【分析 2】 曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关等价于 $\frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 是某一函数的全微分, 而

$$\frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1} = \frac{1}{2} (dx^2 - ady^2)$$

$$\begin{aligned}\text{若 } a = -1, \text{ 则 } \frac{\frac{1}{2}(dx^2 - ady^2)}{x^2 + y^2 - 1} &= \frac{\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2)}{x^2 + y^2 - 1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - 1} = d \frac{1}{2} \ln |x^2 + y^2 - 1|\end{aligned}$$

则应填 $a = -1$.

595 【答案】 $\frac{3}{2}\pi$

【分析】 圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{则 } \int_L x dy - 2y dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 t + 4\sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\sin^2 t) dt \\ &= \pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

【评注】 也可补线用格林公式计算.

596 【答案】 4

【分析】 将 $|x| + |y| = 1$ 代入被积函数的分母得

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{x dy - y dx}{|x| + |y|} &= \oint_C x dy - y dx \\ &= \iint_D (1 + 1) d\sigma \quad (\text{格林公式}) \\ &= 2(\sqrt{2})^2 = 4.\end{aligned}$$

597 【答案】 2π

【分析】 设 Γ 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的正向, 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

$$\begin{aligned}\text{则 } \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \oint_{\Gamma} x dy - y dx \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (1 + 1) d\sigma \quad (\text{格林公式}) \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

598 【答案】 $2 - \pi$ 【分析】 补线段 $\overline{AO}$, 则

$$\begin{aligned}
 & \int_C (xe^{y^2} - 2y)dx + (x^2 - 1)ye^{y^2}dy \\
 &= \oint_{C+\overline{AO}} (xe^{y^2} - 2y)dx + (x^2 - 1)ye^{y^2}dy - \int_{\overline{AO}} (xe^{y^2} - 2y)dx + (x^2 - 1)ye^{y^2}dy \\
 &= -\iint_D 2d\sigma - \int_2^0 xdx = 2 - \pi.
 \end{aligned}$$

599 【答案】 -1 【分析 1】 由于 $\frac{\partial}{\partial y} \cos y^2 = \frac{\partial}{\partial x} (-2xysiny^2) = -2ysiny^2$ 则该线积分与路径无关, 又

$$\cos y^2 dx - 2xysiny^2 dy = d(x \cos y^2)$$

$$\text{则 } \int_C \cos y^2 dx - 2xysiny^2 dy = x \cos y^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,\sqrt{\pi})} = -1.$$

【分析 2】 由以上分析知该线积分与路径无关, 改换积分路径, 从 $(0,0)$ 到 $(0,\sqrt{\pi})$ 再到 $(1,\sqrt{\pi})$.

$$\text{则 } \int_C \cos y^2 dx - 2xysiny^2 dy = \int_0^1 (-1)dx = -1.$$

【评注】 以上两种方法是计算与路径无关的线积分常用的两种方法.

600 【答案】 -2π 【分析 1】 用斯托克斯公式计算, 取 Σ 为平面 $x - y + z = 2$ 上包含在 Γ 内的部分, 按右手法则 Σ 取下侧

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{\Gamma} (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz \\
 &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} 2dxdy \\
 &= -\iint_{D_{xy}} 2d\sigma = -2\pi.
 \end{aligned}$$

【分析 2】 写出曲线参数方程化为定积分计算, 由 $x - y + z = 2$ 知, $z = 2 - x + y$, 则原曲线参数方程为

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \cos t + \sin t$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{2\pi}^0 [(2 - \cos t)(-\sin t) + (2\cos t - 2 - \sin t)\cos t + (\cos t - \sin t)(\sin t + \cos t)]dt \\
 &= -2\pi.
 \end{aligned}$$

【分析 3】 将空间线积分化为平面线积分, 然后用格林公式.
设 C 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 顺时针方向, 由 $x - y + z = 2$ 知

$z = 2 - x + y$, 将其代入

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_r (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz \\
 \text{得} \quad I &= \oint_c (2 - x)dx + (2x - 2 - y)dy + (x - y)(dy - dx) \\
 &= \oint_c (2 + y - 2x)dx + (3x - 2 - 2y)dy \\
 &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (3 - 1)d\sigma \quad (\text{格林公式}) \\
 &= -2\pi.
 \end{aligned}$$

601 【答案】 $(2 - \sqrt{2})\pi R^3$

【分析】 由高斯公式得

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zxdy &= \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1)dv \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin\varphi dr = (2 - \sqrt{2})\pi R^3.
 \end{aligned}$$

602 【答案】 4π

【分析】 补平面 S 为 $x^2 + y^2 \leq 4$ 的下侧

$$\begin{aligned}
 \text{则} \quad \iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy &= \oiint_{\Sigma+S} xydydz + xdzdx + x^2dxdy - \iint_S xydydz + xdzdx + x^2dxdy \\
 &= \iiint_{\Omega} ydv + \iint_{x^2+y^2 \leq 4} x^2dxdy \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + y^2)dxdy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho = 4\pi.
 \end{aligned}$$

603 【答案】 $-\frac{1}{15}$

【分析】 $\iint_{\Sigma} xyzdxdy = - \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \\
 &= -\frac{1}{15}.
 \end{aligned}$$

604 【答案】 $\frac{4}{3\pi}a$

【分析】 分为两个区域分别考虑

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_0^\pi d\theta \int_0^a \rho^2 \sin\theta d\rho}{\frac{\pi}{2}a^2} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{\pi}{2}a^2} = \frac{4}{3\pi}a.$$
605 【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】 $\bar{z} = \frac{\iiint_V z dv}{\iiint_V dv} = \frac{\int_0^1 z \cdot \pi z dz}{\int_0^1 \pi z dz} = \frac{\frac{1}{3}\pi}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{3}.$

606 【答案】 $\frac{\pi}{2}\rho$

【分析】 $I_x = \int_V \rho y^2 ds = \rho \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = 2\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta$

$$= 2\rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\rho.$$
607 【答案】 $\alpha > 0$

【分析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}$

则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 当 $\alpha > 0$ 时收敛, 当 $\alpha < 0$ 时发散. 当 $\alpha = 0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散, 则原级数收敛的充要条件 $\alpha > 0$.

608 【答案】 收敛

【分析】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的部分和数列为

$$S_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)$$

$$= a_{n+1} - a_1$$

由于 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛.

609 【答案】 发散

【分析】 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 由级数性质知, 收敛级数加括号仍收敛, 则级数

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \cdots$$

收敛, 与题设矛盾.

610 【答案】 $\alpha > \frac{3}{2}$

【分析】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 \neq 0$

则原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 同敛散, 而当且仅当 $\alpha > \frac{3}{2}$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 才收敛.

611 【答案】 $[-1, 1)$

【分析】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(n+1)+1} = 1$, 则 $R = 1$.

当 $x = -1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛.

当 $x = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ 发散.

则收敛域为 $[-1, 1)$.

612 【答案】 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

【分析】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n + (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - (-\frac{1}{2})^n}{1 + (-\frac{1}{2})^n} = 2$

则 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (由于该幂级数缺奇次项)

故应填 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

613 【答案】 $(-2, 4)$

【分析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} \cdot \frac{2^n + (-3)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-\frac{2}{3})^n + 1}{2(-\frac{2}{3})^n - 3} \right| = \frac{1}{3}$.

则 $R = 3$ 收敛区间为 $(-2, 4)$.

614 【答案】 $(-3, 1)$

【分析】 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^n$ 可由幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 逐项求导和平移得到, 则其收敛半径不变 $R = 2$, 收敛区间为 $(-3, 1)$.

615 【答案】 $[-1, 1)$

【分析】 分为两个幂级数分别考虑

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1, 1)$.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ 的收敛域为 $(-2, 2)$.则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n})x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1)$.**616** 【答案】 1【分析】 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 则 $x=1$ 为该幂级数收敛区间的端点,则其收敛半径为 1, 而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛半径也为 1.**617** 【答案】 $(0, 2]$ 【分析】 利用阿贝尔定理, 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=2$ 处收敛, 则该幂级数在 $|x-1| < |2-1| = 1$ 处收敛.由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=0$ 处发散, 则该幂级数在 $|x-1| > |0-1| = 1$ 处发散. 故该幂级数的收敛域为 $(0, 2]$.**618** 【答案】 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 【分析】 由 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 条件收敛, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛,则 $x=-1$ 为该幂级数收敛区间的端点, 则该幂级数的收敛半径为 1,

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2x^2)^n$$

则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n}$ 当 $|2x^2| < 1$ 时收敛, 当 $|2x^2| > 1$ 时发散, 则其收敛半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 收敛区间为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.当 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n}$ 的收敛域为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

619 【答案】 $\frac{1}{(1+x)^2}$

【分析】 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n \right)'$
 $= \left(x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} \right)' = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2}.$

620 【答案】 $2e$

【分析】 由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
 而 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + e = 2e.$

621 【答案】 2018

【分析】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的部分和数列为

$S_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1 = a_{n+1} - 1$
 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - 1 = 2019 - 1 = 2018.$

622 【答案】 $e^2 - 1$

【分析】 由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 则
 $e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - 1.$

623 【答案】 $\frac{9}{4}$

【分析】 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, ($|x| < 1$)

$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}.$

624 【答案】 $-\frac{1}{4}$

【分析】 由题设可知, 本题是将 $f(x) = x^2 (0 \leq x \leq 1)$ 作奇延拓展开成周期为 2 的正弦级数, 则

$S\left(-\frac{1}{2}\right) = -S\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$

625 【答案】 $-\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n} + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n \quad (-2 < x < 0)$

【分析】 $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3} \frac{(x+2)+2(x-1)}{(x+2)(x-1)}$
 $= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{-2+(x+1)} + \frac{2}{1+(x+1)} \right]$
 $= -\frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} + \frac{2}{3} \frac{1}{1+(x+1)}$
 $= -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n} + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n \quad (-2 < x < 0).$

626 【答案】 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n} \frac{x^n}{n} \quad (-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3})$

【分析】 令 $f(x) = \ln[(1-x)(2+3x)] = \ln(1-x) + \ln(2+3x)$
 $= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{3}{2}x\right)$
 $= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n} \frac{x^n}{n} \quad (-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3})$

627 【答案】 $-\frac{1}{12}$

【分析】 $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}{x^2}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots$

则 $f''(0) = \left(-\frac{1}{4!}\right) \cdot (2!) = -\frac{1}{12}.$

628 【答案】 $\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$

【分析】 由题设可知 $\frac{dy}{dx} = x \ln(1+x^2)$, 且 $y(0) = -\frac{1}{2}$, 则

【分析】 由 $xy' + y = x \ln(1+x^2)$ 得
 $y = \int x \ln(1+x^2) dx$
 $= \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(1+x^2)$
 $= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2) \cdot 2x}{1+x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$

由于 $y(0) = -\frac{1}{2}$ 知 $C = -\frac{1}{2}$, 则

$f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1].$

629 【答案】 $y'' - 2y' + 2y = 0$

【分析】 由 $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ 为齐次方程通解知, 齐次方程的特征方程有一对共轭复根 $1 \pm i$

从而特征方程为 $r^2 - 2r + 2 = 0$

所求方程为 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

630 【答案】 $y^2 + 1 = C(x^2 - 1)$

【分析】 由 $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

得 $(y^2 + 1)xdx + (1 - x^2)ydy = 0$

则 $\frac{y}{y^2 + 1}dy = \frac{x}{x^2 - 1}dx$

$\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{2} \ln C$

$y^2 + 1 = C(x^2 - 1)$.

631 【答案】 $y = \tan\left[\frac{1}{2}(1+x)^2 + C\right]$

【分析】 由 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 知

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$$

则 $\frac{dy}{1+y^2} = (1+x)dx$

$\arctan y = \frac{1}{2}(1+x)^2 + C$

$y = \tan\left[\frac{1}{2}(1+x)^2 + C\right]$.

632 【答案】 $(1+x)(e^y - 2) = C$

【分析】 由 $(1+x)dy + (1 - 2e^{-y})dx = 0$ 知

$$\frac{dy}{1 - 2e^{-y}} = \frac{-1}{1+x}dx$$

$$\frac{e^y dy}{e^y - 2} = \frac{-1}{1+x}dx$$

$$\ln |e^y - 2| = -\ln |1+x| + \ln C$$

$$(1+x)(e^y - 2) = C.$$

633 【答案】 $\tan \frac{y}{2x} = Cx$

【分析】 由 $xy' - x \sin \frac{y}{x} - y = 0$ 知

$$y' - \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 0 \quad \text{即} \quad \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = xu$, $y' = u + xu'$

$$u + xu' - \sin u - u = 0$$

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{du}{2\sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d \tan \frac{u}{2}}{\tan \frac{u}{2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| = \ln |x| + \ln C, \quad \tan \frac{u}{2} = Cx, \quad \tan \frac{y}{2x} = Cx.$$

634 【答案】 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

【分析】 由 $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ 知

$$\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \right) - \frac{dy}{dx} = 0$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

则 $(u + \sqrt{1 + u^2}) - u - x \frac{du}{dx} = 0$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln x + \ln C$$

$$u + \sqrt{1 + u^2} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} = Cx, \text{ 即 } y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$$

由 $y|_{x=1} = 0$ 知 $C = 1$

则 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2, \quad y = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$

635 【答案】 $y = \frac{1}{x^2}(\sin x - x \cos x)$

【分析】 由 $xy' + 2y = \sin x$ 知

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

由通解公式知,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{x^2} \left(\int x \sin x dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x^2} (\sin x - x \cos x + C) \end{aligned}$$

由 $y|_{x=\pi} = \frac{1}{\pi}$ 知 $C = 0$.

636 【答案】 $x = y\left(\frac{1}{3}y^3 + C\right)$

【分析】 将方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^4}$ 变形得

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^4}{y}$$

即 $\frac{dx}{dy} - x \cdot \frac{1}{y} = y^3$.

这是一个线性方程,由线性方程通解公式得

$$x = e^{\int \frac{1}{y} dy} \left(\int y^3 \cdot e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right) = y \left(\int y^2 dy + C \right) = y \left(\frac{1}{3} y^3 + C \right).$$



637 【答案】 $-\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2$

【分析】 在方程 $y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0$ 中令 $y' = P$, 则 $y'' = \frac{dP}{dy} P$

$$P \frac{dP}{dy} + \frac{2}{1-y} P^2 = 0$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{2}{y-1} dy$$

$$\ln |P| = \ln(y-1)^2 + \ln C_1$$

$$P = C_1(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 dx$$

$$-\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2.$$

638 【答案】 $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

【分析】 方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$$

则原方程的通解 $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

639 【答案】 $y = 2 + e^{-x}$

【分析】 方程 $y''' - y' = 0$ 的特征方程为

$$r^3 - r = 0$$

即 $r(r^2 - 1) = 0$, $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -1$

则原方程通解为 $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$

由初始条件得

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2 + C_3 \\ -1 = C_2 - C_3 \\ 1 = C_2 + C_3 \end{cases}$$

解得 $C_2 = 0, C_3 = 1, C_1 = 2$

故 $y = 2 + e^{-x}$.

640 【答案】 $y = x(1 - e^x) + 2$

【分析】 由 $y = (C_1 + C_2x)e^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = 0$ 通解知, $r = 1$ 是齐次方程特征方程二重根, 则特征方程为

$$(r-1)^2 = 0$$

即 $r^2 - 2r + 1 = 0$

则 $a = -2, b = 1$

非齐次方程 $y'' - 2y' + y = x$ 有特解

$$y = x + 2$$

非齐次通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2$

由 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 知

$$\begin{cases} C_1 + 2 = 2 \\ C_1 + C_2 + 1 = 0 \\ C_1 = 0, C_2 = -1 \end{cases}$$

$$y = -xe^x + x + 2 = x(1 - e^x) + 2.$$

线性代数

641 【答案】 $abc f$

【分析】 按第 1 行直接展开, 有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix} = a(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = abc f.$$

642 【答案】 24

【分析】 在用按行(列)展开公式计算行列式的值时, 应先用行列式的性质作恒等变形, 以期减少计算量.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$

【评注】 逐行(列)相加(减)的技巧应当熟悉.

643 【答案】 $b^3(b + \sum_{i=1}^4 a_i)$

【分析】 每行元素都是 a_1, a_2, a_3, a_4, b . 把每列均加至第一列, 则第 1 列有公因数可提出.

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2+b & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3+b & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b + \sum_{i=1}^4 a_i & a_2 & a_3 & a_4 \\ b + \sum_{i=1}^4 a_i & a_2+b & a_3 & a_4 \\ b + \sum_{i=1}^4 a_i & a_2 & a_3+b & a_4 \\ b + \sum_{i=1}^4 a_i & a_2 & a_3 & a_4+b \end{vmatrix} \\ = (b + \sum_{i=1}^4 a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2+b & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3+b & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4+b \end{vmatrix}$$

$$= (b + \sum_{i=1}^4 a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b^3 (b + \sum_{i=1}^4 a_i).$$

【评注】 把各行(列)均加至某一行(列)是计算行列式值时的一个重要的构思.

644 【答案】 -120

【分析】 把第1行加到第4行, 提出公因数10, 再把第4行逐行互换到第1行, 由范德蒙行列式, 得

$$\begin{aligned} D &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} \\ &= -10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) \\ &= -120. \end{aligned}$$

645 【答案】 $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} [(-1)^{n+1} a^n + b^n]$

【分析】 按第 n 列展开, 有

$$D_n = a(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} & & b & a \\ & \ddots & \ddots & \\ b & a & 0 & \\ a & & & \end{vmatrix}_{n-1} + b(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 0 & b \\ & \ddots & a \\ b & \ddots & 0 \\ b & a & & \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{1+n} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} a^n + (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} b^n.$$

646 【答案】 20

【分析】 由行列式性质, 找出 $|A|$ 和 $|B|$ 的联系.

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3| \\ &= |\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, 5\alpha_3| \\ &= 5 |\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3| \\ &= 5 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 20 \end{aligned}$$

或者, 利用分块矩阵乘法

$$B = [\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3]$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{有 } |B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 20.$$

647 【答案】 -56

【分析】 因为

$$\begin{aligned} A-3B &= [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] - [3\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4] \\ &= [\alpha-3\beta, -2\gamma_2, -2\gamma_3, -2\gamma_4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故有 } |A-3B| &= |\alpha-3\beta, -2\gamma_2, -2\gamma_3, -2\gamma_4| \\ &= -8 |\alpha-3\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| \\ &= -8(|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| - 3|\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|) \\ &= -8(|A| - 3|B|) = -56. \end{aligned}$$

【评注】 矩阵行列式在考研中多次出现,当 A, B 均为 n 阶矩阵时,有

$$|AB| = |A| \cdot |B|, \text{ 但}$$

$$|A+B| \neq |A| + |B|, \text{ 而 } |\alpha+\beta, \gamma, \delta| = |\alpha, \gamma, \delta| + |\beta, \gamma, \delta|, \text{ 两者不要混;}$$

又若三阶矩阵 $A = [\alpha, \beta, \gamma]$ 则 $kA = [k\alpha, k\beta, k\gamma]$ 那么 $|kA| = k^3 |A|$ 而 $|k\alpha, \beta, \gamma| = k |A|$ 两者也不要混淆.

648 【答案】 -27

【分析】 由 $|A| = |A^T|$ 及 $|A| = \prod \lambda_i$ 知 $|A^T| = -6$, 再根据相似矩阵有相同的特征值, 知矩阵 B 的特征值为 $1, 3, -2$, 又知 $|B| = -6$. 从而

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{2} A \right)^T B \right| &= \left| \frac{1}{2} A^T B \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 |A^T| |B| \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^3 |A| |B|^2 = -27. \end{aligned}$$

649 【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -18 \\ 14 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{【分析】 } AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 10 & -6 \\ 7 & 16 & -9 \end{bmatrix}$$

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$AA - AA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -18 \\ 14 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

【评注】 由本题可引深到:

$$\text{设 } A = [a_{ij}] \text{ 是 } n \text{ 阶矩阵, } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ 则}$$

$$AA = [\lambda_j a_{ij}], \Lambda A = [\lambda_i a_{ij}].$$

650

【答案】

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 因为 $A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} (2, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

又因 $\beta^T \alpha = (2, 0, 0) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 2$

所以 $A^3 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha)(\beta^T \alpha)\beta^T$
 $= 4\alpha\beta^T = 4A.$

【评注】 矩阵的运算要正确熟练. 注意, 若 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则

$$A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \beta^T \alpha = (b_1, b_2, b_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

前者 $\alpha\beta^T$ 是秩为 1 的三阶矩阵, 而 $\beta^T \alpha$ 是一个数.

当秩 $r(A) = 1$ 时, $A^2 = lA$ 其中 $l = \beta^T \alpha = \alpha^T \beta = \sum a_{ii}$.

进而 $A^m = l^{m-1}A$.

651

【答案】 E

【分析】 因为矩阵 P 可逆, 由 $PA = BP$ 得 $A = P^{-1}BP$, 那么 $A^2 = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^2P$

归纳地 $A^{100} = P^{-1}B^{100}P = P^{-1}EP = E.$

注意 $\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}.$

652

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $CA - AB = C - B$ 得 $CA - C = AB - B$ 即有 $C(A - E) = (A - E)B$.

又 $A - E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆.

有 $C = (A - E)B(A - E)^{-1}$

故

$$C^5 = (A - E)B^5(A - E)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 2^4 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

【评注】 别忘 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是初等矩阵, 又如 $r(A) = 1$, 有 $A^2 = lA, l = \sum a_{ii}$.

653

【答案】

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

【分析】 按定义, 求出行列式 $|A|$ 的代数余子式, 有

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15, A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \dots$$

$$\text{所以 } A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{或者, 由 } A^* = |A| A^{-1}, \text{ 现在 } |A| = -10, A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

$$\text{而得 } A^* = -10 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

【评注】 用定义法求伴随矩阵时, 要防止两种错误: 求代数余子式不要丢掉正负号 $(-1)^{i+j}$; 组装伴随矩阵时不要排错位置.

本题 $A^{-1}, |A|$ 均好计算, 所以用 $A^* = |A| A^{-1}$ 求 A^* 是方便的.
求伴随矩阵的这两种方法都要掌握.

654

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【分析】 因为 $AA^* = |A| E$, 故 $A = |A| (A^*)^{-1}$, 由已知得 $|A^*| = -8$, 又 $|A^*| = |A|^3$, 得 $|A| = -2$.

$$\text{又 } (A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{所以 } A = |A| (A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

【评注】 由 A 可求 A^* , 由 A^* 也应会求 A . 本题求 $(A^*)^{-1}$ 时, 既可用初等行变换也可用分块矩阵求逆公式.

655 【答案】 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

【分析】 利用分块矩阵, 有

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

其中 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆. 上式两边右乘 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{那么 } A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【评注】 当 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 0$, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 不可逆时, 你能求出 A 来吗?

656 【答案】 $\frac{1}{6}(5E - A)$

【分析】 由 $(A + 2E)(A - 5E) + 6E = A^2 - 3A - 4E = O$

得 $(A + 2E) \cdot (A - 5E) = -6E$

$$(A + E) \cdot \frac{1}{6}(5E - A) = E$$

$$\therefore (A + E)^{-1} = \frac{1}{6}(5E - A).$$

657 【答案】 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

【分析】 记 $B = \alpha\beta^T$, 则

$$B^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2B$$

于是 $(A-E)^2 = 2(A-E)$

$$\Rightarrow A^2 - 4A + 3E = 0 \Rightarrow (A-2E)^2 = E$$

故 $(A-2E)^{-1} = A-2E = \alpha\beta^T - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

【评注】 本题直接求出 $A-2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 然后用行变换求其逆也是简捷的.

658 【答案】 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

【分析】 由 $AB = A+B$ 有 $AB-A-B+E = E$.

即 $A(B-E) - (B-E) = E$,

即 $(A-E)(B-E) = E$,

$$\therefore (A-E)^{-1} = B-E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

659 【答案】 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A$.

因为 $(A^{-1})^{-1} = A$, 求出 A^{-1} 的逆矩阵就是求出矩阵 A .

$$\begin{aligned} (A^{-1} | E) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

可知 $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

又因 $|A^{-1}| = 2$, 故 $(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

660 【答案】 $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

【分析】 A 经过两次列变换得到 B , 先把第 3 列的 -2 倍加至第 1 列, 再把第 2 列加至第 3 列, 故有

$$B = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么 $A^*B = A^*A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以 $(A^*B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

661 【答案】 $\begin{bmatrix} 2-t & 3-u \\ t & u \end{bmatrix}$, t, u 为任意实数

【分析】 由于矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 不可逆, 故可设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$, 于是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},$$

得方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 = 4, \\ y_1 + y_2 = 3, \\ 2y_1 + 2y_2 = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2-t, \\ x_2 = t, \\ y_1 = 3-u, \\ y_2 = u. \end{cases}$

所以 $X = \begin{bmatrix} 2-t & 3-u \\ t & u \end{bmatrix}$, t, u 是任意常数.

【评注】 由于方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 6 \end{cases}$ 的系数矩阵完全一样, 区别仅在常数项, 所以解这一类方程组可以合并在一起加减消元. 即

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

由 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ 可得 $\begin{cases} x_1 = 2-t \\ x_2 = t \end{cases}$ 由 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ 可得 $\begin{cases} y_1 = 3-u \\ y_2 = u \end{cases}$

请你用这种方法判断矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{bmatrix}$$

无解的条件.(答案 $a = -1$)

662

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

【分析】 每次初等行变换都相当于左乘相应的初等矩阵. 看清题设变换的过程, 并用初等阵表出即得

$$B = E_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{23}(-1)E_{12}(-2)E_{12}A.$$

$$\text{故 } P = E_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{23}(-1)E_{12}(-2)E_{12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

【评注】 为保证计算的正确, 应验算 PA 是否与 B 相等, 可逆阵可分解成若干个初等阵的积. 初等行变换化 A 为阶梯形, 实际上在左乘若干个初等阵, 即左乘可逆阵.

663

【答案】 3 或 4

【分析】 矩阵 A 和 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-3)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (a+1)(4-a)$$

当 $a = 3$ 时, $r(A) = 2, r(B) = 3$,

当 $a = 4$ 时, $r(A) = 3, r(B) = 2$,

所以 $a = 3$ 或 $a = 4$ 时, 矩阵 A 和 B 不等价.

664

【答案】 3

【分析】 本题没有必要去求出 A^2 , 由于 A 是可逆矩阵, 又

$$A^2 - 2A = A(A - 2E)$$

故 $r(A^2 - 2A) = r(A - 2E)$

$$\text{而 } A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

665 【答案】 0

【分析】 根据

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n, \\ 1 & r(A) = n-1, \\ 0 & r(A) < n-1. \end{cases}$$

现在 $n = 4, r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 1$,那么 $r(A^*) < n-1$. 再利用伴随矩阵秩的关系式, 就可看出 $r(A^*)^* = 0$.**666** 【答案】 0【分析】 因为 η_1 与 η_2 的坐标不成比例, 所以 η_1, η_2 线性无关. 因而齐次方程组 $Ax = 0$ 至少有两个线性无关的解, 于是 $n - r(A) \geq 2$, 即有 $r(A) \leq 3$.又因为 A 是五阶矩阵, 而 $r(A) \leq 3$, 故 $|A|$ 中 4 阶子式必全为 0, 因此, 代数余子式 A_{ij} 恒为零, 从而 $A^* = O$, 所以秩 $r(A^*) = 0$.【评注】 本题涉及伴随矩阵、线性无关、基础解系及矩阵的秩诸概念, 用的是定义法. 当分析出 $r(A) \leq 3$ 之后, 若熟悉关系式

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n, \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1, \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1, \end{cases}$$

亦可立即得出 $r(A^*) = 0$ 的结论. 显然, 用性质比用定义要简捷的多, 这两种方法都应当掌握.**667** 【答案】 5【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -7 & t-6 \end{vmatrix} = -7(t-5)$$

$$\therefore t = 5.$$

668 【答案】 $(-\infty, +\infty)$ 【分析】 由于本题向量的个数与维数不一样, 不能用行列式去分析, 而要用齐次方程组只有零解, 或矩阵的秩等于 n 来进行分析.

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & t+2 & 5 \\ 0 & -2 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-t \\ 0 & 0 & t+2 \end{bmatrix}$$

由于 $\forall t$, 恒有 $r(A) = 3$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关.

【评注】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$ 只有零解.

n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

669 【答案】 3 或 -1

【分析】 因为 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 - a\alpha_3$ 线性相关, 故有不全为 0 的 x_1, x_2, x_3 使

$$x_1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + x_2(\alpha_1 + a\alpha_2) + x_3(3\alpha_2 - a\alpha_3) = 0$$

$$\text{即 } (x_1 + x_2)\alpha_1 + (2x_1 + ax_2 + 3x_3)\alpha_2 + (x_1 - ax_3)\alpha_3 = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故必有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - ax_3 = 0 \end{cases}$$

因为 x_1, x_2, x_3 不全为 0, 所以上述齐次方程组有非零解. 系数行列式必为 0, 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 3 \\ 1 & -1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 2a + 3 = 0$$

从而 $a = 3$ 或 -1 .

【评注】 若看清行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}$ 的书写规律, 这一类填空题就很容易计算了.

例如, 若 $\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$ 线性相关, 求 a 时的行列式应当如何写?

670 【答案】 $-\frac{1}{3}$

【分析】 $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, a\beta + \alpha_3$ 线性相关, 存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + k_3(a\beta + \alpha_3) = 0$$

整理有

$$(k_1 + k_2 + k_3a)\beta + (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) = 0$$

因已知 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$, 且 β 是任意向量, 故上式成立, 只需取 $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 3$, 则

有 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$, 且令 β 的系数为 0, 即 $k_1 + k_2 + ak_3 = 2 - 1 + 3a = 0$, 即 $a = -\frac{1}{3}$.

671 【答案】 2

【分析】 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$ 有解, β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 即方程组 $y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 = \beta_2$ 无解. 由于这两个方程组的系数矩阵是一样的, 因此可联合起来加减消元.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \beta_1, \beta_2] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 & -5 \\ 3 & 3 & a+2 & 15 & a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & -2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & a-3 & 18 & a+5 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 18 & 4 \\ 0 & 3 & a-3 & 18 & a+5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

$$\forall a, \text{方程组} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix} \text{总有解, 即 } \beta_1 \text{ 必可由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表出.}$$

$$\text{而方程组} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a-2 & a+1 \end{bmatrix} \text{在 } a=2 \text{ 时无解, 即 } \beta_2 \text{ 在 } a=2 \text{ 时不能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线}$$

性表出. 故 $a=2$.

672 【答案】 $a \neq 1$

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可表示任一个三维向量

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 等价

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$

$\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$

$$\text{由} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0.$$

所以 $a \neq 1$.

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示任一个 n 维向量, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \varepsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$$

显然, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 亦可表示 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可互相线性表出. 从而它们有相同的秩. 故

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = n$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

反之, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 是 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

从而 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.

即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可表示任一个 n 维向量.

673 【答案】 3 或 4 或 -1

【分析】 向量组 (I) 和 (II) 等价即 (I) 和 (II) 可以互相线性表出, 秩 $r(I) = r(II)$ 是向量组等价的必要条件.

$$\text{由} |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-3)$$

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-4)$$

当 $a = 3$ 时, $r(I) = 2, r(II) = 3$,

当 $a = 4$ 时, $r(I) = 3, r(II) = 2$,

向量组(I)与(II)不等价.

当 $a = -1$ 时, 虽 $r(I) = r(II) = 2$, 但因为 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$ 不能由 $\beta_1 = (1, -1, 1)^T, \beta_2 = (1, -1, -1)^T, \beta_3 = (-1, 1, 2)^T$ 线性表出, 所以(I)与(II)仍不等价.

【注意】 方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 无解.

【评注】 请对照 663 题, 注意矩阵等价与向量组等价的区别.

674 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 说明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+1 & 2a+1 & 2a+1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} \\ = -(2a+1)(a-1)^2 = 0$$

如 $a = 1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ 不合题意

$\therefore a = -\frac{1}{2}$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 秩为 2.

或者, 经初等变换向量组的秩不变, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

如 $a = 1$, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$.

下设 $a \neq 1$, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

675 【答案】 8

【分析】 $\forall t$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任何两个向量都线性无关, 那么 α_1, α_3 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的极大线性无关组 $\Leftrightarrow \alpha_2$ 可由 α_1, α_3 线性表出.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & t & 6 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & t-4 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8-t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore t = 8$.

676 【答案】 $\frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 2, 3)^T, \frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 1, 5, -3)^T$

【分析】 先正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (-1, 1, 4, -1)^T - \frac{1}{3}(1, 1, 2, 3)^T = \frac{2}{3}(-2, 1, 5, -3)^T$$

再单位化, 有

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 2, 3)^T, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 1, 5, -3)^T.$$

677 【答案】 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)^T$

【分析】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是空间的基, 而 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 则称向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标是 $(x_1, x_2, x_3)^T$.

$$\text{对于方程组} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 = 4 \end{cases}$$

可解出 $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = 1$, 因此 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标是 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)^T$.

【评注】 本题的方程组用克拉默法则与范德蒙行列式较简捷.

678 【答案】 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

【分析】 按过渡矩阵定义

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]C$$

可见矩阵 C 的第 1 列就是 β_1 在基底 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标, 由于已知 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 所以矩阵 C

的第 1 列应当是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其余类同.

【评注】 设 n 维向量空间给定两组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 与 } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n,$$

$$\text{若} \begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{n2}\alpha_n, \\ \dots \dots \dots \dots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \dots + c_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

$$\text{即} [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C,$$

则矩阵 C 是由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

$$\text{若 } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

则因 $\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ 而知由基 α_1, α_2 到基 β_1, β_2 的过渡矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

或者由 $[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1, \alpha_2]C$ 知

$$C = [\alpha_1, \alpha_2]^{-1}[\beta_1, \beta_2] = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

要会用这两种求过渡矩阵的方法.

679 【答案】 1 或 5

【分析】 解空间是二维, 即 $Ax = 0$ 的基础解系由两个向量组成. 因此 $n - r(A) = 2$, 亦即 $r(A) = 2$, 对矩阵 A 作初等变换有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & a+5 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & a & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可见 $a = 5$ 或 $a = 1$ 时, $r(A) = 2$.

【评注】 空间、维数、基等内容仅数学一要求. 你能求出本题解空间的一组规范正交基吗? 例如

$$\text{当 } a = 5 \text{ 时, } \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{26}}(-3, 2, 2, 3)^T;$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1)^T. \text{ 请复习 Schmidt 正交化方法.}$$

680 【答案】 $(-1, -1, 1, 0)^T, (1, -1, 0, 1)^T$

【分析】 对系数矩阵加减消元, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n - r(A) = 4 - 2 = 2$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 得 $x_2 = -1, x_1 = -1$.

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $x_2 = -1, x_1 = 1$.

所以基础解系为 $(-1, -1, 1, 0)^T, (1, -1, 0, 1)^T$.

681 【答案】 $k_1(2, 2, -3, 1, 0)^T + k_2(-3, 4, -2, 0, 1)^T$ (k_1, k_2 是任意实数)

【分析】 由题设知 $n - r(A) = 2$, 即 $r(A) = 3$, 作初等行变换有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 & a-1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3a-6 & 0 \end{bmatrix}$$

可见 $a = 2$. 进而

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_4 = 1, x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = -3, x_2 = 2, x_1 = 2$.

令 $x_4 = 0, x_5 = 1 \Rightarrow x_3 = -2, x_2 = 4, x_1 = -3$.

682 【答案】 $k_1(1, 2, 0)^T + k_2(-2, 1, 1)^T$ (k_1, k_2 是任意实数)

【分析】 易见行列式 $|A| = 0$, 秩 $r(A) = 2$. 那么 $r(A^*) = 1$

从而 $n - r(A^*) = 2$, 齐次方程组 $A^*x = 0$ 通解形式为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$.

又 $A^*A = |A|E = O$

所以 A 的列向量是齐次方程组 $A^*x = 0$ 的解.

683 【答案】 $k_1(0, -1, 1, 0)^T + k_2(-1, 0, 0, 1)^T$ (k_1, k_2 为任意常数)

【分析】 对矩阵 A 分块, 记

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & G \\ G & E \end{bmatrix}$$

$$\text{由于 } G^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$\text{有 } A^2 = \begin{bmatrix} E & G \\ G & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & G \\ G & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E & 2G \\ 2G & 2E \end{bmatrix} = 2A$$

$$\Rightarrow A^n = 2^{n-1}A$$

所以 $A^n x = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解, 而

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故通解为: $k_1(0, -1, 1, 0)^T + k_2(-1, 0, 0, 1)^T$, k_1, k_2 为任意常数.

684 【答案】 -1

【分析】 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 无解的充分必要条件是 $r(A) \neq r(\bar{A})$. 对增广矩阵作初等行变换有

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & a & 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & a+1 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

可见 $a = -1$ 时, $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 线性方程组无解, 所以应当填 $a = -1$.

【评注】 本题涉及非齐次线性方程组解的理论, 矩阵的初等行变换, 及矩阵秩的计算.

根据本题的特点, 对 x_1 消元之后, 当然可以继续对 x_2 消元, 但计算量会稍大, 不如一次消去 x_3, x_4 简捷.

685 【答案】 $(6, -1, 1)^T + k(13, -5, -1)^T$ (k 为任意常数)

【分析】 一方面因为 α_1, α_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 故必有 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$. 另一方面由于在系数矩阵 A 中存在二阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

又必有 $r(A) \geq 2$, 因此, 必有 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$.

那么, $n - r(A) = 3 - 2 = 1$, 因此, 导出组 $Ax = 0$ 的基础解系由一个解向量所构成, 根据解的性质

$\alpha_1 - \alpha_2 = (6, -1, 1)^T - (-7, 4, 2)^T = (13, -5, -1)^T$ 是导出组 $Ax = 0$ 的非零解, 即基础解系, 那么再根据解的结构, 知 $(6, -1, 1)^T + k(13, -5, -1)^T$ (k 为任意常数) 是方程组的通解.

【评注】 本题考查线性方程组解的性质与解的结构, 以及矩阵秩的判定.

686 【答案】 $(-3, 1, 1)^T$

【分析】 由观察, 方程组(2)比方程组(1)减少了一个未知量. 若方程组(2)有解 $\xi = (a, b, c)^T$, 则 $\alpha = (0, a, b, c)$ 必是方程组(1)的解, 现已知方程组(1)有无穷多解 $k(1, 2, -1, 1)^T + (1, -1, 0, 2)^T$, 其中 k 是任意常数, 选择任意常数 k , 使(1)的解的第一个分量为 0, 即选 $k = -1$, 得(1)的一个特解为 $(0, -3, 1, 1)^T$, 则向量 $(-3, 1, 1)^T$ 满足方程组(2), 是方程组(2)的一个特解.

687 【答案】 $k(-3, -1, 1, 2)^T + (-2, 1, 4, 2)^T$ (其中 k 是任意常数)

【分析】 方程组(1) $Ax = b$ 有唯一解, 故 $r(A) = r(A|b) = 3$. 显然 $r(B) = r(B|b) = 3$, 且 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 0)^T$ 是方程组 $B_{3 \times 4}y = b$ 的另一个特解.

B 是 3×4 矩阵, 故对应齐次方程组 $Bx = 0$ 的基础解系只有一个线性无关向量组成, 且是 $\alpha - \alpha_1$ 故(2)的通解为

$$k(\alpha - \alpha_1) + \alpha = k(-3, -1, 1, 2)^T + (-2, 1, 4, 2)^T.$$

688 【答案】 $k(-5, 3, 1)^T$ (k 为任意常数)

【分析】 所谓方程组(I)与(II)的公共解, 即这两个方程组解集合的交集, 把(I)与(II)联立得到方程组(III), 那么方程组(III)的解就是(I)与(II)的公共解. 对方程组(III)的系数矩阵作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于秩 $r(A) = 2, n - r(A) = 1$, 取 x_3 为自由变量, 令 $x_3 = 1$, 代入求解得 $x_2 = 3, x_1 = -5$, 所以, 方程组 (III) 的基础解系是

$$\eta = [-5, 3, 1]^T$$

那么 (I) 与 (II) 的公共解是: $k\eta, k$ 为任意常数.

【评注】 本题也可先求出方程组 (I) 的通解, 且公共解应是 (I) 的通解中满足方程组 (II) 的那部分解.

本题 (I) 的通解是 $k[-5, 3, 1]^T$ 代入 (II), 不论 k 为何值 $k[-5, 3, 1]^T$ 均满足方程 (II), 故 $k[-5, 3, 1]^T$ 即是公共解.

本题还可分别求出方程组 (I) 与 (II) 的通解, 其中

(I) 的通解: $k[-5, 3, 1]^T$

(II) 的通解: $l_1[0, 1, 0]^T + l_2[-5, 0, 1]^T$

则两个通解中相同的部分的向量即是 (I) 与 (II) 的公共解,

令 $k[-5, 3, 1]^T = l_1[0, 1, 0]^T + l_2[-5, 0, 1]^T$ 即

$$\begin{cases} -5k = -5l_2 \\ 3k = l_1 \\ k = l_2 \end{cases}$$

得 $k = l_2, l_1 = 3l_2$. 故公共解是: $3l_2[0, 1, 0]^T + l_2[-5, 0, 1]^T$ 即 $l_2[-5, 3, 1]^T$.

求公共解的命题方式也有三种: 1° 给出二个方程组; 2° 给出一个方程组, 一个通解; 3° 给出二个通解. 求二个方程组的公共解, 三种解法也可以灵活应用.

689 【答案】 1

【分析】 所谓两个方程组 (I) 与 (II) 同解, 即 (I) 的解全是 (II) 的解, (II) 的解也全是 (I) 的解. 对 (I) 求出其通解

$$(3, 2, 0)^T + k(3, -1, 1)^T = (3k + 3, 2 - k, k)^T$$

把 $x_1 = 3 + 3k, x_2 = 2 - k, x_3 = k$ 代入方程组 (II), 有

$$\begin{cases} a(3 + 3k) + 4(2 - k) + k = 11 \\ 2(3 + 3k) + 5(2 - k) - ak = 16 \end{cases}$$

整理为

$$\begin{cases} (k + 1)(a - 1) = 0 \\ k(1 - a) = 0 \end{cases}$$

因为 k 为任意常数, 故 $a = 1$. 此时方程组 (I) 的解全是方程组 (II) 的解.

且当 $a = 1$ 时, 方程组 (II) 为

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$$

由 $r(A_2) = 2$, 从解的结构知 (II) 的通解形式为 $\alpha + k\eta$ 和 (I) 的相同, (I) 的通解已满足 (II), 也是 (II) 的通解, 故 (I) (II) 同解.

或者易于验算 $\alpha = (3, 2, 0)^T$ 是 $A_2x = b$ 的解, $\eta = (3, -1, 1)^T$ 是 $A_2x = 0$ 的解.

所以 (I) 与 (II) 同解.

690 【答案】 1, 7, 7【分析】 方法一:按伴随矩阵定义,求出 A^* 由代数余子式

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \dots$$

$$\text{知伴随矩阵 } A^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{那么 } |\lambda E - A^*| &= \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-7 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-7)^2 = 0 \end{aligned}$$

所以 A^* 的特征值是 1, 7, 7.方法二:由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-7)(\lambda-1)^2 = 0$$

知矩阵 A 的特征值是 7, 1, 1.由 $|A| = \prod \lambda_i$, 从而 $|A| = 7 \cdot 1 \cdot 1 = 7$.因为若 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则有 $A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$. 所以 A^* 的特征值是 $\frac{|A|}{\lambda}$, 即 A^* 的特征值为 1, 7, 7.

$$\text{方法三:因为 } A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = E + B$$

由秩 $r(B) = 1$, 知 B 的特征值是 $\sum_{i=1}^3 a_{ii} = 6, 0, 0$. 故 A 的特征值是 7, 1, 1.

下同方法二.

【评注】 方法一:用定义先求出伴随矩阵 A^* , 再用特征多项式 $|\lambda E - A^*|$ 求特征值, 思路直接, 但计算量大, 繁琐.方法二:利用 A 与 A^* 特征值之间的关系, 通过 A 的特征值间接推导出 A^* 的特征值, 计算量有所减少.方法三:利用本题 A 的特殊情况, 转换为求 B 的特征值, 再由秩为 1 矩阵特征值的公式就能简捷求出 A^* 的特征值.**691** 【答案】 6, 3, 2【分析】 由 $A^{-1}BA = 6A + BA \Rightarrow A^{-1}B = 6E + B \Rightarrow (A^{-1} - E)B = 6E$
知 $B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$ 因为 A 的特征值 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \Rightarrow A^{-1}$ 的特征值 2, 3, 4 $\Rightarrow A^{-1} - E$ 的特征值 1, 2, 3

$\Rightarrow (A^{-1} - E)^{-1}$ 的特征值 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

所以矩阵 B 的特征值: 6, 3, 2.

692 【答案】 1, -3, -3

【分析】 设 λ 是矩阵 A 的特征值, α 是相对应的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$.

那么根据 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$, 由 $A^2 + 2A - 3E = O$ 有 $(\lambda^2 + 2\lambda - 3)\alpha = 0$, 又因 $\alpha \neq 0$.

故 $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$. 知 λ 取值范围为 1 和 -3, 再由 $\sum \lambda_i = \sum a_{ii} = -5$, 知矩阵 A 的特征值是 1, -3, -3.

693 【答案】 -5

【分析】 设 α 是矩阵 A^{-1} 属于特征值 λ_0 的特征向量, 按定义有 $A^{-1}\alpha = \lambda_0\alpha$, 于是 $\alpha = \lambda_0 A\alpha$. 即

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+2+2) = a & (1) \\ \lambda_0(2a+a-2) = 1 & (2) \\ \lambda_0(2a-2-1) = 1 & (3) \end{cases}$$

由(2)或(3)知 $\lambda_0 \neq 0$, (2)-(3) 易见 $a = -1$, 那么 $\lambda_0 = -\frac{1}{5}$. 因为 A 和 A^{-1} 的同一个特征向量对应的特征值互为倒数, 故 α 是矩阵 A 中 $\lambda = -5$ 所对应的特征向量.

【评注】 若已知 A 的特征向量, 通常可用定义法, 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 建立方程组来求参数. 本题不要去求 A^{-1} , 而要通过转换.

694 【答案】 4

【分析】 记 $B = \alpha\beta^T$, 由于

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \quad -1 \quad 2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

所以 $|\lambda E - B| = \lambda^3 - 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)$

即矩阵 B 的特征值是 2, 0, 0, 那么矩阵 A 的特征值是 2, 0, 0.

从而 $A + 2E$ 的特征值是 4, 2, 2.

因而行列式 $|A + 2E| = 16$, 故 $(A + 2E)^*$ 特征值为: 4, 8, 8.

695 【答案】 0, 2, 3

【分析】 由题设条件知, A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量分别是 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 即有

$$A\xi_i = \lambda_i\xi_i = i\xi_i, i = 1, 2, 3$$

又 Q 是正交矩阵, ξ_1, ξ_2, ξ_3 满足条件

$$(\xi_i, \xi_j) = \xi_i^T \xi_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

故

$$B\xi_i = (A - \xi_1 \xi_1^T) \xi_i = A\xi_i - \xi_1 (\xi_1^T \xi_i) = \begin{cases} \xi_1 - \xi_1 (\xi_1^T \xi_1) = 0, & i=1, \\ i\xi_i - \xi_1 (\xi_1^T \xi_i) = i\xi_i, & i=2,3. \end{cases}$$

故 $A - \xi_1 \xi_1^T$ 有特征值 $0, 2, 3$.

696 【答案】 $k(1, 2, 1)^T, k \neq 0$

【分析】 因 $r(A) = 1$, 故矩阵 A 的特征值为: $6, 0, 0$.

$$6E - A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系: $(1, 2, 1)^T$.

所以 $\lambda = 6$ 的特征向量为: $k(1, 2, 1)^T, k \neq 0$.

697 【答案】 $k(1, 1, 1)^T, k \neq 0$.

【分析】 矩阵 A 各行元素之和均为 5, 即

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 5 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{即} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

698 【答案】 $k(1, -1, 1)^T, k \neq 0$

【分析】 令 $B = \alpha\beta^T$, 由于秩 $r(B) = 1$, 且 $\beta^T \alpha = a+1$ 知矩阵 B 的特征值为 $a+1, 0, 0$. 那么 $A = E + B$ 的特征值为 $a+2, 1, 1$.

因为 $\lambda = 3$ 是矩阵 A 的特征值, 故 $a+2 = 3$, 知 $a = 1$.

那么 $B\alpha = (\alpha\beta^T)\alpha = \alpha(\beta^T \alpha) = 2\alpha$

$\alpha = (1, -1, 1)^T$ 是矩阵 B 属于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量, 也就是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量.

【评注】 要会用定义法求特征向量. 注意 $\alpha\beta^T$ 是三阶矩阵而 $\beta^T \alpha$ 是一个数, 这些符号要仔细分清楚, 不要混淆; 再者特征向量有无穷多个, 求特征向量要写成通解.

699 【答案】 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(-2\alpha_1 + \alpha_3) (k_1, k_2 \text{ 不全为 } 0)$

【分析】 因为 A 和 B 相似, 由 $P^{-1}AP = B$ 及 $B\alpha = \lambda\alpha$ 有 $A(P\alpha) = \lambda(P\alpha)$ 故可先求出 B 的特征值. 特征向量. 再转换成 A 的特征向量.

$$\text{由于 } |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -2 & \lambda+2 & -4 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

$$\text{对于 } \lambda = 0, \text{ 由 } (0E - B) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\beta_1 = (1, 1, 0)^T, \beta_2 = (-2, 0, 1)^T$

所以矩阵 A 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量:

$$P\beta_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2, P\beta_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\alpha_1 + \alpha_3.$$

700 【答案】 $k(0, 1, 1)^T$ (k 是非零的任意常数)

【分析】 因为 A 是实对称矩阵, 不同特征值的特征向量相互正交, 设 $\lambda = -2$ 的特征向量是 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 那么

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = 4 - 2 - 2a = 0 \\ \alpha_2^T \alpha_3 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_3 = 4x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

可先求出 $a = 1$, 再由

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

得到基础解系 $(0, 1, 1)^T$, 所以 $\alpha_3 = (0, k, k)^T, k \neq 0$.

701 【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 据已知条件, 有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{记 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关的列向量知 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$, 故 P 是可逆矩阵, 于是由 $AP = PB \Rightarrow P^{-1}AP = B$

$$\text{故和矩阵 } A \text{ 相似的矩阵是 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

【评注】 希望你还能求出矩阵 A 的特征值和特征向量.

提示: 特征值为 $2, -1, -1$, 相应的特征向量: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$.

702 【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 ξ, α, β 线性无关, 都是非零向量, $Ax = 0$ 有解 ξ , 即 $A\xi = 0 = 0\xi$, 故 A 有 $\lambda_1 = 0$, (对应的特征向量为 ξ). 又 $Ax = \beta$ 有解 α , 即 $A\alpha = \beta; Ax = \alpha$ 有解 β , 即 $A\beta = \alpha$, 且 $A(-\beta) = -\alpha$. 从而有

$$A(\alpha + \beta) = \beta + \alpha = (\alpha + \beta)$$

$$A(\alpha - \beta) = \beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$$

故知 A 有 $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, ($\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 均是非零向量, 是对应的特征向量), 三阶矩阵 A 有三个不同的特征值, $0, 1, -1$. 故

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

703

【答案】

$$\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 设 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$. 由 $A^2 - 2A = 3E$ 有

$$(\lambda^2 - 2\lambda - 3)\alpha = 0 \quad \text{即} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

所以矩阵 A 的特征值为 3 或 -1.

因为 A 是实对称矩阵, 且 $r(A + E) = 2$.

所以 $A \sim \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$

704

【答案】

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

【分析】 因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交.

设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是矩阵 A 属于 $\lambda = -6$ 的特征向量. 则

$$\begin{cases} \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 - x_3 = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_2 = x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = (1, -1, 1)^T$$

由于 $\lambda = 3$ 的特征向量 α_1, α_2 不正交, 故需正交化处理

$$\text{令 } \beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再单位化得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

那么 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ 为所求.

705 【答案】 2

【分析】 由相似的性质: $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$ 及 $|A| = |B|$, 有

$$\begin{cases} 3+a+3=3+4+(-1) \\ 3(3a-2b)=-12 \end{cases}$$

可解出 $b=2$.

706 【答案】 -1

【分析】 α 是 A^* 的特征向量, 设对应的特征值为 λ_0 , 则有 $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$. 两边左乘 A , 得 $AA^* \alpha = |A| \alpha = \lambda_0 A \alpha$. 即

$$\lambda_0 \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases} \lambda_0(a-2+2a) = |A| & (1) \\ \lambda_0(2+1-2a) = -|A| & (2) \\ \lambda_0(2+2-a) = a|A| & (3) \end{cases}$$

因 $r(A^*) = 3$, $|A^*| \neq 0$, 故 $\lambda_0 \neq 0$, 由(1)(2)式解得 $a = -1$, ($\lambda_0 = -5$).

【评注】 这是利用 A^* 的特征向量确定 A 及 α 中的参数, 一般利用定义 $A^* \alpha = \lambda \alpha$ 再变形到 A 的关系式, 求出参数, 即可.

注意 本题无需求出 A^* .

707 【答案】 -2

【分析】 因为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)^2$

所以矩阵 A 的特征值为 2, 3, 3. 因为矩阵 A 的特征值有重根, 所以

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow \lambda = 3$ 有两个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow (3E - A)x = 0$ 有两个线性无关的解

$\Leftrightarrow r(3E - A) = 1$.

那么 $3E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可见 $a = -2$.

【评注】 A 是上三角阵, 可直接得出其对角元素即是其特征值.

708 【答案】 0 或 5

【分析】 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.

二次型的秩为 2, 即矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 10a.$$

$\therefore a = 0$ 或 $a = 5$ 时, 二次型的秩为 2.

709 【答案】 1

【分析】 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -5 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$, 由 $A\alpha = \lambda\alpha$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -5 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{得} \begin{cases} 2 + a + 2 = 2\lambda \\ 2a - 5 + 2b = \lambda \\ 2 + b + 2 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow a = b = 2, \lambda_1 = 3$$

再由秩 $r(A) = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

那么 $3 + 0 + \lambda_3 = 1 + (-5) + 1 \Rightarrow \lambda_3 = -6$

可见正惯性指数 $p = 1$.

在求出 $a = b = 2$ 后也可由配方法

$$\begin{aligned} x^T A x &= x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 - (2x_2 + x_3)^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2 \end{aligned}$$

而求出正惯性指数.

710 【答案】 2

【分析】 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$, 由于二次型的秩为 2, 即矩阵 A 的秩为 2. 那么

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (2a+1)(a-1)^2 = 0$$

显然 $a = 1$ 时 $r(A) = 1$, 故 $a = -\frac{1}{2}$

$$\text{因为 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda-1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \lambda-1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \frac{3}{2})^2$$

所以矩阵 A 的特征值为 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0$, 故 $p = 2$.

【评注】 利用 $r(A) = 2$, 用初等变换求参数也是可行的, 定出参数 $a = -\frac{1}{2}$ 后, 再用配方法求 f 的标准形, 也能确定正惯性指数.

711 【答案】 0

【分析】 二次型 $x^T A x$ 经正交变换化为标准形 $3y_1^2 - y_2^2$. 说明矩阵 A 的特征值为 3, -1, 0.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a(a-1)$$

得 $a = 0$ 或 $a = 1$

$$\text{又 } \sum a_{ii} = \sum \lambda_i = 3 + (-1) + 0 = 2.$$

故 $a = 1$ 舍去, 从而 $a = 0$.

712 【答案】 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

【分析】 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

由于 $|\lambda E - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 5\lambda)$

知矩阵 A 的特征值为: 1, 5, -1, 0. 故二次型正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 1$.

因此二次型的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

713 【答案】 $(-1, 1)$

【分析】 由配方法, 有

$$\begin{aligned} x^T A x &= x_1^2 + 2x_1(ax_2 + x_3) + (ax_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_2x_3 - (ax_2 + x_3)^2 \\ &= (x_1 + ax_2 + x_3)^2 + (1 - a^2)x_2^2 \end{aligned}$$

所以 $1 - a^2 > 0$ 解出 $a \in (-1, 1)$

或者, 由二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 得

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2a^2)$$

因为规范形是 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值为 +, +, 0, 那么 $2 - 2a^2 > 0$ 亦可求出 a 的取值范围.

714 【答案】 ± 1

【分析】 因为二次型 $x^T A x$ 经正交变换化为标准形时, 标准形中平方项的系数就是二次型矩阵 A 的特征值, 所以 1, 2, 7 是 A 的特征值.

又因经过正交变换二次型的矩阵不仅合同而且还相似, 因此有

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & t \\ 2 & t & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

根据相似矩阵的性质,有

$$\begin{cases} 2+2+a=1+2+7 \\ |E-A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -t \\ -2 & -t & 1-a \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

即: $a=6, t^2=1$, 所以应填 ± 1 .

【评注】 注意求正交变换下二次型 $x^T A x$ 的标准形就是求二次型矩阵 A 的特征值, 而告诉你正交变换下的标准形也就是告诉你特征值. 如果本题求行列式 $|A-3E|$ 的值, 你能立即说出答案是 8 吗?

715 【答案】 $a > \frac{5}{2}$

【分析】 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

因为 f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于零, 即

$$\Delta_1 = a > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4a - 9 > 0$$

$$\Delta_3 = |A| = 4a^2 - 10a > 0$$

故 f 正定 $\Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$.

【评注】 二次型 $x^T A x$ 正定 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0$, 恒有 $x^T A x > 0 \Leftrightarrow A$ 的特征值全大于 0 $\Leftrightarrow$ 二次型的正惯性指数 $p=n \Leftrightarrow A$ 与 E 合同, 即有可逆矩阵 C 使 $A = C^T C \Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于 0.

二次型 $x^T A x$ 正定的必要条件: $a_{ii} > 0$ 与 $|A| > 0$.

716 【答案】 $k \neq 0$ 且 $k \neq -2$

【分析】 由于 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 0, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{有 } |\lambda E - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)$$

即矩阵 A 的特征值是 2, 0, 0, 从而矩阵 $kE + A$ 的特征值是 $k+2, k, k$, 那么 $B = (kE + A)^2$ 的特征值是 $(k+2)^2, k^2, k^2$.

所以, B 正定的充要条件是: $k^2 > 0, (k+2)^2 > 0$.

717 【答案】 $k > 2$

【分析】 由题设条件 $A^3 = 2A^2 + 5A - 6E$, 即

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6E = O$$

设 A 有特征值 λ , 则 λ 满足

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

因式分解得 $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$

故 A 的特征值是 $1, -2, 3$. $kE + A$ 的特征值是 $k+1, k-2, k+3$, 当 $k > 2$ 时, $kE + A$ 的特征值均大于零, 故 $k > 2$.

718 【答案】 $a < 0$

【分析】 $B^T = (-aE + A^T A)^T = -aE + A^T A = B$. B 是对称阵.

B 正定 $\Leftrightarrow$ 对任给的 $x \neq 0$, 有

$$x^T B x = x^T (-aE + A^T A) x = -ax^T x + x^T A^T A x = -ax^T x + (Ax)^T A x > 0 \quad (*)$$

其中 $(Ax)^T (Ax) \geq 0, x^T x > 0$,

故 $(*)$ 式成立, a 的取值范围应 $-a > 0$, 即 $a < 0$.

719 【答案】 $a < 0$

【分析】 矩阵 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同的正、负惯性指数.

$$\text{由于} \quad |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda + 2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

可见 $p_A = 1, q_A = 1$. 因而 $x^T B x = 3x_1^2 + ax_2^2$ 的 $p_B = 1, q_B = 1$ 时, 矩阵 A 和 B 合同.

所以 $a < 0$ 即可.

【评注】 不要误以为 $a = -3$. 当 $a = -3$ 时, 矩阵 A 和 B 不仅合同而且相似.

720

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【分析】 二次型 $x^T A x$ 经坐标变换 $x = Cy$ 得 $x^T A x = y^T B y$ 就有 A 和 B 合同, 其中 $B = C^T A C$, 那么求矩阵 C 就是求所用坐标变换 (由于本题矩阵 A 和 B 不相似. 若先用正交变换过渡是可行的, 但比较麻烦).

对二次型 $x^T A x = 2x_1 x_3 + x_2^2$

用配方法, 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_1 - y_3 \end{cases}$

即有 $x^T A x = 2(y_1 + y_3)(y_1 - y_3) + y_2^2 = 2y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$

可见经坐标变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, 就有矩阵 A 和 B 合同, 所以 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

【评注】 本题也可用坐标变换 (配方法)

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_1 + y_3. \end{cases}$$

| 概率论与数理统计 |

721 【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】 将已知条件数量关系写出,应用概率性质,通过解方程即可求得 $P(A)$. 已知 A 与 B 独立,且 $P(A \cup B) = \frac{8}{9}$, $P(A - B) = P(B - A)$,

故 $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$, 即有 $P(A) = P(B)$, $P(\bar{A}) = P(\bar{B})$,
所以 $1 - P(A \cup B) = P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = P^2(\bar{A})$,

即 $1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} = P^2(\bar{A})$, 所以 $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{2}{3}$.

【评注】 在解答问题时,我们总是首先将题目中的已知条件、概念所蕴含的数量关系写出,这将有助于对题目的分析与求解. 这是解题首要一步,务必记住.

722 【答案】 $(1-a)(1-b)$

【分析】 所求的概率为 $P(\bar{A} \bar{B} \bar{C})$, 已知“事件 C 发生必导致 A, B 同时发生”,显然是用于化简 $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$ 的. 事实上已知 $C \subset AB$, 故 $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \subset \bar{C}$, 由吸收律知, $\bar{A} \bar{B} \bar{C} = \bar{A} \bar{B}$, 又 A 与 B 独立,故所求的概率为 $P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) = P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-a)(1-b)$.

723 【答案】 0.9

【分析】 由题设 $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = 0.3$, 又 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 互斥, 所以

$$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) \\ = P(A) + P(B) - 2P(AB) = 0.3,$$

又 $P(A) + P(B) = 0.5$, 于是 $P(AB) = 0.1$, 那么所求的概率为

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.1 = 0.9.$$

724 【答案】 $\frac{1}{20}$

【分析 1】 记 $A =$ “查完 5 个零件正好查出 3 个次品”, 现要求 $P(A)$ 值. 其实事件 A 由两件事合成: $B =$ “前 4 次检查, 查出 2 个次品”和 $C =$ “第 5 次检查, 查出的零件为次品”, 即 $A = BC$, 由乘法公式

$$P(A) = P(BC) = P(B)P(C|B)$$

事件 B 是前 4 次检查中有 2 个正品 2 个次品所组合, 故 $P(B) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{10}$.

已知 B 发生的条件下, 也就是已检查了 2 正 2 次, 剩下 6 个零件, 其中 5 正 1 次, 再要抽检一个恰是次品的概率 $P(C|B) = \frac{1}{6}$.

$$\text{总之 } P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}.$$

【分析 2】 本题也可以用古典概型计算 $P(A)$. 事实上, 将 10 个零件任意排成一行, 每一种排列视为 10 个零件的一种检查顺序, 总数为 $10!$. 事件 A 等价于在 3 个次品中选一个放在第 5 个位置上, 然后在 7 个正品中取 2 个与余下的 2 个次品排在前 4 个位置上, 最后将其余 5 个正

品随意排在后 5 个位置上, 所以 $P(A) = \frac{C_3^1 C_7^2 C_2^2 \cdot 4! \cdot 5!}{10!} = \frac{1}{20}$.

【分析 3】 本题可以更简化为只考虑 3 只次品在 10 次检查中的位置. 问题转化为前 4 个位中选 2 个放次品, 第 5 个位置也必须放次品, 故 $P(A) = \frac{C_4^2 \cdot 1}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}$.

【分析 4】 如果只考虑正品的的位置, 则前 4 位中选 2 个放正品, 最后 5 位也放正品, 则 $P(A) = \frac{C_4^2 C_5^5}{C_{10}^7} = \frac{C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}$.

【评注】 求解古典概型问题时, $P(A) = \frac{m}{n}$ 其中 n 是样本空间中样本点的总数, 在样本空间的选取上当然越简单越好, 分析 3 和分析 4 提供的方法就比较简单, 因而 m 也会相应地简单. C_{10}^3 要比 $10!$ 简单多了.

725 【答案】 $\frac{3}{4}$

【分析】 $P(A \cup B \cup C)$
 $= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$
 $= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(A)P(C) + P(\emptyset)$
 $= 3P(A) - 3[P(A)]^2 = \frac{3}{4} - 3[P(A) - \frac{1}{2}]^2$

故 $P(A \cup B \cup C)$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

【评注】 求得 $P(A \cup B \cup C) = 3P(A) - 3[P(A)]^2$ 后, 令 $P(A) = x$, 则 $P(A \cup B \cup C) = 3x - 3x^2 = f(x)$, 然后令 $f'(x) = 0$, 求最大值, 得 $\frac{3}{4}$.

726 【答案】 $\frac{8}{15}$

【分析】 记 $A =$ “经过两次交换, 甲袋中白球数不变”, $B =$ “从甲袋中取出的放入乙袋的球为白球”, $C =$ “从乙袋中取出放入甲袋的球为白球”, 则 $A = BC \cup \overline{BC}$,

那么, $P(A) = P(BC) + P(\overline{BC}) = P(B)P(C|B) + P(\overline{B})P(\overline{C}|\overline{B})$
 $= \frac{3}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{5}{10} = \frac{8}{15}$.

【评注】 (1) 如果题目有“随机试验”, 我们首先要分析该试验所对应的概型: 是古典概型, 还是几何概型、独立试验序列概型. 在此基础上应用相应公式、概率性质及其他有关公式计算所求的概率.

(2) 如果要计算某个结果——事件 A 的概率, 而当 A 的发生总是与某些前提条件或原因相联系, 这时我们总是将 A 对其前提条件作全集分解, 应用全概公式计算 $P(A)$.

727 【答案】 $\frac{37}{64}$

【分析】 首先将要计算的概率事件用符号表示, 然后分析事件间的关系, 最后应用相应的公式求解.

记事件 $A_i =$ “第 i 道题选对”, $i = 1, 2, 3$. 显然, A_1, A_2, A_3 是相互独立的, 且 $P(A_i) = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3$.

事件“三道题至少选对一道”可表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

所以 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3})$.

由于 A_1, A_2, A_3 相互独立, 则 $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ 也相互独立, 且 $P(\overline{A_i}) = \frac{3}{4}, i = 1, 2, 3$.

$$P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$\text{总之 } P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}.$$

【评注】 求 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ 也可以用加法公式:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$, 再用 A_1, A_2, A_3 相互独立的性质计算, 这样计算量稍大些.

一般在计算独立事件概率时, 将 $A \cup B, A - B$ 用 $\overline{A} \overline{B}, A \overline{B}$ 来计算会方便些.

728 【答案】 $\frac{5}{8}$

【分析】 我们的试验是独立重复试验序列概型, 如果记 $A =$ “正、反面都至少出现二次”, X 为将硬币掷五次正面出现的次数, 则 $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$, 而 $Y = 5 - X$ 为 5 次投掷中反面出现的次数, 那么, 事件 $A = \{2 \leq X \leq 5, 2 \leq Y \leq 5\} = \{2 \leq X \leq 5, 2 \leq 5 - X \leq 5\}$
 $= \{2 \leq X \leq 5, 0 \leq X \leq 3\} = \{X = 2\} \cup \{X = 3\},$

$$\text{所以 } P(A) = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{8}.$$

729 【答案】 $1 - \frac{np(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^n}$

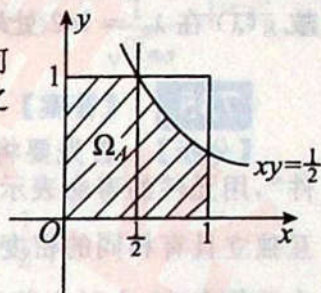
【分析】 试验是“独立重复试验”. 为求概率, 首先要将事件“在没有全部失败的条件下, 成功不止一次”用符号表示. 如果记 $A =$ “成功”, n 次独立试验 A 发生的次数为 X , 则 $P(A) = p, X \sim B(n, p)$, 所求的概率为

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2 | X \geq 1\} &= \frac{P\{X \geq 2, X \geq 1\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{X \geq 2\}}{P\{X \geq 1\}} \\ &= \frac{1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}}{1 - P\{X = 0\}} = 1 - \frac{P\{X = 1\}}{1 - P\{X = 0\}} \\ &= 1 - \frac{C_n^1 p(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^n} = 1 - \frac{np(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^n}. \end{aligned}$$

【评注】 只要题目中有“将试验进行 n 次”, “对 X 重复观察 n 次”, 或隐含着(或可视为)同样含义的试验等等, 我们都要考虑独立试验序列概型. 应用这种概型的前提是 ① 每次试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$; ② 每次试验事件 A 发生的概率不变; ③ 各次试验相互独立, 共进行 n 次试验.

730 【答案】 $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$

【分析】 记 $(0, 1)$ 中任取的两个数为 X, Y , 则 $(X, Y) \in \Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Ω 为基本事件全体, 并且取 Ω 中任何一点的可能性都一样, 因此我们的试验是几何概型, 事件 $A =$ “两数之积小于 $\frac{1}{2}$ ” $= \{XY < \frac{1}{2}\}$ 等价于 $(X, Y) \in \Omega_A =$



$\{(x, y) | xy < \frac{1}{2}, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 由几何概型得

$$P(A) = P\left\{XY < \frac{1}{2}\right\} = \frac{\text{区域 } \Omega_A \text{ 面积}}{\text{区域 } \Omega \text{ 面积}} \\ = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}(1 + \ln 2).$$

731 【答案】 0.81

【分析】 如果用 X 表示两次调整之间生产的产品件数, 则 $P\{X = k\} = P\{\text{前 } k-1 \text{ 个产品合格, 第 } k \text{ 个产品不合格}\} = 0.9^{k-1} \times 0.1$ ($p = 0.1$ 的几何分布), $k = 1, 2, \dots$ 所求概率为 $P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\} = 1 - P\{X = 1\} - P\{X = 2\} = 1 - 0.1 - 0.9 \times 0.1 = 0.9 - 0.9 \times 0.1 = 0.81$.

【评注】 若记 $A =$ “两次调整之间至少生产 3 件产品”. 将 A 用简单事件运算表示, 从而用概率性质计算 $P(A)$. 事实上, 令 $A_i =$ “第 i 次生产的产品为合格品”, 则 A_i 独立. $A = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + \dots$, $P(A) = 0.9^2 \times 0.1 + 0.9^3 \times 0.1 + 0.9^4 \times 0.1 + \dots = 0.81$.

732 【答案】 $\left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} \frac{3}{7}$

【分析】 若记 $A_i =$ “第 i 次取出 4 个球为 2 白 2 黑”, 由于是有放回取球, 因而 A_i 相互独立, 根据超几何分布知 $P(A_i) = \frac{C_3^2 C_2^2}{C_5^4} = \frac{3}{7}$, 所以

$$P\{X = k\} = P(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1} A_k) = \left(1 - \frac{3}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{7} (k = 1, 2, \dots).$$

733 【答案】 $\frac{1}{2} \ln 2$

【分析】 应用独立试验序列概型, 可求得结果. 事实上已知

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \text{ 记 } A = \{X > 2\}, Y \text{ 为对 } X \text{ 作三次独立重复观察事件 } A \text{ 发}$$

生的次数, 则 $Y \sim B(3, p)$, 其中 $p = P\{X > 2\} = \int_2^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-2\lambda}$,

依题意 $P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - p)^3 = \frac{7}{8}$, 故 $1 - p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, 又

$p = e^{-2\lambda}$, 由 $\frac{1}{2} = e^{-2\lambda}$ 解得 $\lambda = \frac{1}{2} \ln 2$.

734 【答案】 $\ln 2$

【分析】 已知 $X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ λ 应使概率 $P\{1 < X < 2\}$ 达到最大,

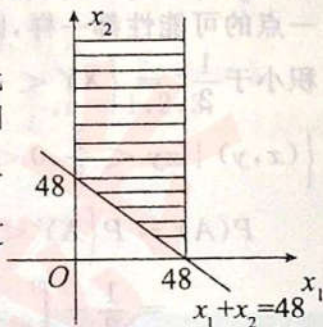
由于 $P\{1 < X < 2\} = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} \stackrel{\text{记}}{=} g(\lambda)$.

令 $g'(\lambda) = e^{-\lambda}(2e^{-\lambda} - 1) = 0$. 解得 $\lambda_0 = \ln 2$, 又 $g''(\lambda)|_{\lambda_0} = e^{-\lambda}(1 - 4e^{-\lambda})|_{\lambda_0} = -\frac{1}{2} < 0$, 故 $g(\lambda)$ 在 $\lambda_0 = \ln 2$ 处取最大值, 所以 $\lambda = \ln 2$.

735 【答案】 $48\lambda e^{-48\lambda}$

【分析】 首先要将事件 $A =$ “到 48 小时为止, 系统仅更换一个元件”, 用元件的寿命表示. 如果用 X_i 表示第 i 个元件的寿命, 依题设 X_i 相互独立且有相同的密度函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 事件 $A =$ “第一个元件在 48 小时之前已经损坏, 第一个、第二个元件寿命之和要超过 48 小时” = “ $0 \leq X_1 < 48, X_1 + X_2 > 48$ ” 所以

$$\begin{aligned} P(A) &= P\{0 \leq X_1 < 48, X_1 + X_2 > 48\} \\ &= \iint_{0 \leq x_1 < 48, x_1 + x_2 > 48} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{0 \leq x_1 < 48, x_1 + x_2 > 48} f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{48} dx_1 \int_{48-x_1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 \\ &= \int_0^{48} \lambda e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda(48-x_1)} dx_1 = 48\lambda e^{-48\lambda}. \end{aligned}$$



736 【答案】 $\frac{1}{4}$

【分析】 本题为古典概型, 用掷率公式 $P(A) = \frac{m}{n}$.

n 计算: 恰好取 3 次停止, 每次有 2 种不同颜色, 又有放回的, 所以总的情况 $n = 2^3 = 8$.

m 计算: 第 3 次取得颜色一定不同前 2 种颜色, 这样第 3 次颜色有 2 种可能, 而前 2 次必同色且与第 3 次不同色, 共有 2 种.

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

737 【答案】 $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

【分析】 $f(x) = Ae^{-(\frac{x+1}{2})^2} = Ae^{-(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2}$, 对比正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度 $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 不难发现 $f(x)$ 就是正态分布 $N(-1, 2)$.

$$\text{所以 } A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

【评注】 求常数 A 也可以利用概率密度函数的性质:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 即 $A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2} dx = 1$, 来求, 但求积分要麻烦得多.

至于为什么 X 一定服从正态分布? 因为我们定义: 凡是具有密度函数形如 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, ($\sigma > 0$) 的随机变量 X 称为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $f(x)$ 的系数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 不是本质的, 只要 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 就必有 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

738 【答案】 0.9544

【分析】 由题设 $f(x)$ 的形式知, X 是服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 即 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 且当 $x = \mu$ 时, $f(x)$ 取最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

已知 $x = 1$ 时 $f(x)$ 取最大值 $f(1)$,

所以 $x = \mu = 1, f_{\text{最大}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, 所以 $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $X \sim N(1, \frac{1}{2})$.

所求的概率为 $P\{1 - \sqrt{2} < X < 1 + \sqrt{2}\} = \Phi\left[\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] - \Phi\left[\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]$
 $= 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$.

739 【答案】 $\frac{1}{4\sqrt{y}}$

【分析】 先求出在 $(0, 4)$ 上 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 当 $0 < y < 4$ 时,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \frac{\sqrt{y}}{2}$$

故 $f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

740 【答案】 $\frac{(N-k)(k-1)}{C_N^3}, k = 2, \dots, (N-1)$

【分析】 中间数 $X = k$, 则大的一个数只能在 $k+1, k+2, \dots, N$ 中取. 而小的一个数只能在 $1, 2, \dots, k-1$ 中取, $(2 \leq k \leq N-1)$ 总共有 $(N-k)(k-1)$ 种取法.

741 【答案】 $3 \leq b < 4$

【分析】 先确定 $a, \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k(k+1)} = a \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1$,

解得 $a = 1$.

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k \leq x} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

$$\text{当 } i \leq x < i+1 \text{ 时, } F(x) = \sum_{k \leq i} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{i+1}.$$

$$\text{现 } F(b) = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}, 3 \leq b < 4.$$

742 【答案】

$$\begin{cases} 2e^{-2y-1}, & y > -\frac{1}{2} \\ 0, & y \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

【分析】 $X \sim E(2)$, 所以其概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{现 } Y = X - \frac{1}{2}, \text{ 所以 } F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\left\{X - \frac{1}{2} \leq y\right\} = P\left\{X \leq y + \frac{1}{2}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{y+\frac{1}{2}} f_X(x) dx = F_X\left(y + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

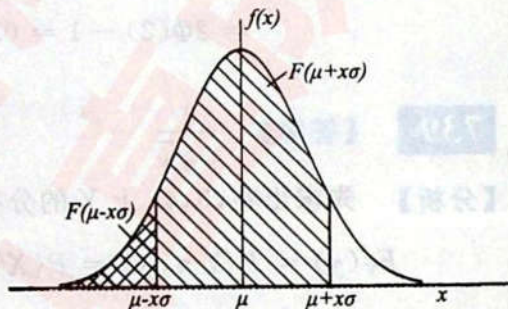
$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X\left(y + \frac{1}{2}\right) = f_X\left(y + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2e^{-2y-1}, & y > -\frac{1}{2}, \\ 0, & y \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

743 【答案】 1

【分析】 方法一:

$$\begin{aligned} &F(\mu + x\sigma) + F(\mu - x\sigma) \\ &= P\{X \leq \mu + x\sigma\} + P\{X \leq \mu - x\sigma\} \\ &= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq x\right\} + P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq -x\right\} \\ &= \Phi(x) + \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) + [1 - \Phi(x)] = 1. \end{aligned}$$

方法二: 由正态分布密度对称性, 如图显示,
 $F(\mu + x\sigma) + F(\mu - x\sigma) = 1$.



744 【答案】 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } F_Y\left(\frac{1}{2}\right) &= P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\} = P\left\{1 - e^{-X} \leq \frac{1}{2}\right\} \\ &= P\left\{e^{-X} \geq \frac{1}{2}\right\} = P\{e^X \leq 2\} \\ &= P\{X \leq \ln 2\} = \int_{-\infty}^{\ln 2} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

745 【答案】 a

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P\{\max(X, Y) > \mu\} &= P\{(X > \mu) \cup (Y > \mu)\} \\ &= P\{X > \mu\} + P\{Y > \mu\} - P\{X > \mu, Y > \mu\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P\{\min(X, Y) > \mu\} \\ &= P\{\min(X, Y) \leq \mu\} = a \end{aligned}$$

我们也可以这样考虑, 由于

$$P\{\max(X, Y) > \mu\} = 1 - P\{\max(X, Y) \leq \mu\} = 1 - P\{X \leq \mu, Y \leq \mu\} \stackrel{\text{记}}{=} 1 - P(AB),$$

其中 $A = \{X \leq \mu\}$, $B = \{Y \leq \mu\}$, 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$\text{所以 } P(A) = P(B) = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} P\{\min(X, Y) \leq \mu\} &= 1 - P\{\min(X, Y) > \mu\} \\ &= 1 - P\{X > \mu, Y > \mu\} = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) \\ &= 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

$$= 1 - P(AB) = a,$$

【说明】 本题可以有如下的变式: 已知随机变量 X 与 Y 都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 且 $P\{X > 0, Y > 2\mu\} = a$, 则 $P\{X \leq 0, Y \leq 2\mu\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 记 $A = \{X > 0\}$, $B = \{Y > 2\mu\}$, 由题设知

$$P(AB) = a,$$

$$P(A) = P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right),$$

$$P(B) = P(Y > 2\mu) = 1 - P(Y \leq 2\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right),$$

$$\text{故 } P\{X \leq 0, Y \leq 2\mu\} = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + a = a.$$

746 【答案】 -1

【分析】 由题设 X 与 Y 独立得 $X - Y \sim N(-\mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, 即随机变量 $X - Y$ 的密度的对称中心 $x = -\mu$.

现 $P\{X - Y \geq 1\} = \frac{1}{2}$, 即对称中心在 $x = 1$ 处, $-\mu = 1$, 就有 $\mu = -1$.

747 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】 记 $\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix} = X_1X_4 - X_2X_3$,

则 p 应使 $P\{\Delta > 0\} = P\{X_1X_4 - X_2X_3 > 0\} = P\{X_1X_4 > X_2X_3\} = \frac{1}{4}$, 由于 X_i 仅能取 1 或 0, 且相互独立, 故事件 $\{X_1X_4 > X_2X_3\} = \{X_1X_4 = 1, X_2X_3 = 0\}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{4} &= P\{X_1 = 1, X_4 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0\} + P\{X_1 = 1, X_4 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1\} \\ &\quad + P\{X_1 = 1, X_4 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\} \\ &= p^2(1-p)^2 + p^3(1-p) + p^3(1-p) = p^2(1-p^2) = p^2 - p^4, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p^4 - p^2 + \frac{1}{4} = \left(p^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

$$\text{故 } p = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

748 【答案】 $1 - e^{-\frac{1}{2}} + e^{-1}$

【分析】 指数分布的随机变量 X 的概率密度:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

因为 Y 是由 $|X| \leq 1$ 和 $|X| > 1$ 定义而来, 只要找出 Y 与 X 的关系就不难求出

$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

$$\begin{aligned} P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\} &= P\left\{Y \leq \frac{1}{2}, |X| \leq 1\right\} + P\left\{Y \leq \frac{1}{2}, |X| > 1\right\} \\ &= P\left\{X \leq \frac{1}{2}, |X| \leq 1\right\} + P\left\{-X \leq \frac{1}{2}, |X| > 1\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left\{X \leq \frac{1}{2}, -1 \leq X \leq 1\right\} + P\left\{X \geq -\frac{1}{2}, X > 1\right\} \\
 &= P\left\{-1 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} + P\{X > 1\} = 1 - P\left\{\frac{1}{2} < X \leq 1\right\} \\
 &= 1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}} + e^{-\lambda}.
 \end{aligned}$$

【评注】 在计算指数分布的概率时,

$$P\{|X| \leq 1\} = P\{-1 \leq X \leq 1\} = P\{X \leq 1\}.$$

$$P\{|X| > 1\} = P\{X > 1\} + P\{X < -1\} = P\{X > 1\}.$$

$$P\{X > a\} = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a}. (a > 0)$$

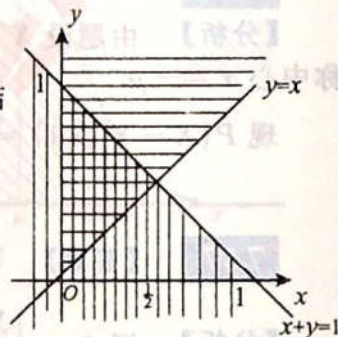
记住这些公式, 会很方便计算.

749 【答案】 $1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}$

【分析】 应用公式 $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$ 即可求得结果.

事实上,

$$\begin{aligned}
 P\{X + Y \leq 1\} &= \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{-x} - e^{-1}) dx \\
 &= 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$



【评注】 在应用公式 $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$ 计算概率时, 实际上就是求积分

$\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中积分区域 $D: x + y \leq 1$ 就是由随机变量的范围 $X + Y \leq 1$ 而来的. 由于被积函数 $f(x, y) \neq 0$ 的范围是 $0 < x < y$, 因此实际要积分的区域应该是 $0 < x < y$ 与 $x + y \leq 1$ 的公共部分, 即图中水平阴线与垂直阴线的交集, 这种计算方法在计算概率和求随机变量函数分布时是经常要遇到的.

750 【答案】 $C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8$

【分析】 “方程 $t^2 + Xt + Y = 0$ 有重根” = “ $X^2 - 4Y = 0$ ” = “ $X^2 = 4Y$ ”

其中 $X \sim B\left(8, \frac{1}{2}\right)$, $Y = 8 - X$, 故所求的概率为

$$\begin{aligned}
 P\{X^2 = 4Y\} &= P\{X^2 = 4(8 - X)\} = P\{X^2 + 4X - 32 = 0\} \\
 &= P\{(X + 8)(X - 4) = 0\} = P\{X = 4\} = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8.
 \end{aligned}$$

751 【答案】 $\frac{3}{4}$

【分析】 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以“ $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, X\alpha_3 + Y\alpha_1$ 线性相关”就有“ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ Y & 0 & X \end{vmatrix} = X + 2Y = 0$ ”, 故所求的概率为

$$\begin{aligned} P\{X + 2Y = 0\} &= P\left\{X + 2Y = 0, Y = -\frac{1}{2}\right\} + P\left\{X + 2Y = 0, Y \neq -\frac{1}{2}\right\} \\ &= P\left\{X = 1, Y = -\frac{1}{2}\right\} = P\{X = 1\} \text{ (为什么? 见评注)} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

【评注】 (1) 在解答概率论中与线性代数有关的问题时, 我们总是先应用线性代数中的基本概念或充要条件, 将所关心的事件表示出来, 而后再应用概率论的方法去求解.

(2) 如果 $P(A) = 1$, 则对任意事件 B 都有 $P(AB) = P(B)$ 即 A 与 B 独立. 这是因为 $P(\bar{A}) = 0, B = AB + \bar{A}B$. 在本题计算过程中我们两次应用了这个结论.

752 【答案】 $\frac{17}{18}$

【分析】 由题设知 $\sum_{k=1}^3 P\{X = k\} = 1, P\{X = k\} = \frac{1}{3}$, 根据全概公式得

$$\begin{aligned} P\{Y \leq 2.5\} &= \sum_{k=1}^3 P\{Y \leq 2.5, X = k\} \\ &= \sum_{k=1}^3 P\{X = k\} P\{Y \leq 2.5 | X = k\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + 1 + \frac{2.5}{3}\right) = \frac{8.5}{9} = \frac{17}{18}. \end{aligned}$$

753 【答案】 $\frac{1}{4}F_2(x) + \frac{3}{4}F_2(x-1)$

【分析】 X_1 的分布 $F_1(x)$, 不难看出 $X_1 \sim B\left(1, \frac{3}{4}\right)$, 即

$$P\{X_1 = 0\} = \frac{1}{4}, P\{X_1 = 1\} = \frac{3}{4}.$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X_1 + X_2 \leq x\} \\ &= P\{X_1 = 0\}P\{X_1 + X_2 \leq x | X_1 = 0\} + P\{X_1 = 1\}P\{X_1 + X_2 \leq x | X_1 = 1\} \\ &= \frac{1}{4}P\{X_2 \leq x | X_1 = 0\} + \frac{3}{4}P\{1 + X_2 \leq x | X_1 = 1\} \\ &= \frac{1}{4}P\{X_2 \leq x\} + \frac{3}{4}P\{X_2 \leq x-1\} \\ &= \frac{1}{4}F_2(x) + \frac{3}{4}F_2(x-1). \end{aligned}$$

【评注】 一般地说, 如果 $X_1 + X_2$ 中有一个是离散型的, 则一般对离散型的可能取值用全概率公式来求解, 就如本题的方法.

754 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 由分布函数定义得

$$F\left(\frac{1}{2}, 1\right) = P\left\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq 1\right\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

755 【答案】 $F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ 或 } y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \leq y \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 < y \leq x \end{cases}$

【分析】 已知 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$

所以 $P\{X > 0\} = 1$,

$$F(x, y) = P\{X \leq x, |X| \leq y\}$$

$$= P\{X \leq x, |X| \leq y, X > 0\} = P\{X \leq x, X \leq y, X > 0\}$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ 或 } y \leq 0 \\ P\{0 < X \leq x\}, & 0 < x \leq y \\ P\{0 < X \leq y\}, & 0 < y \leq x \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ 或 } y \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \leq y, \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 < y \leq x. \end{cases}$$

756 【答案】 0.3

【分析】 由于 $0.1 + 0.2 + \alpha + \beta + 0.1 + 0.2 = 0.6 + \alpha + \beta = 1$, 即 $\alpha + \beta = 0.4$,

$$\text{又 } 0.5 = P\{X^2 + Y^2 = 1\} = P\{X^2 = 0, Y^2 = 1\} + P\{X^2 = 1, Y^2 = 0\}$$

$$= P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 0\}$$

$$= \alpha + 0.1 + 0.1 = \alpha + 0.2.$$

故 $\alpha = 0.3$ 也就有 $\beta = 0.1$;

$$P\{X^2 Y^2 = 1\} = P\{X^2 = 1, Y^2 = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\}$$

$$= 0.2 + \beta = 0.3.$$

本题所给条件 X^2, Y^2 , 所以也可以转换成

		Y^2	
		0	1
已知 X^2	0	0.2 $\alpha + 0.1$	且 $P\{X^2 + Y^2 = 1\} = 0.5$, 求 $P\{X^2 Y^2 = 1\}$.
	1	0.1 $\beta + 0.2$	

显然 $\alpha + 0.1 + \beta + 0.2 = 0.7$, $\alpha + \beta = 0.4$ 又 $P\{X^2 + Y^2 = 1\} = \alpha + 0.1 + 0.1 = 0.5$, 即 $\alpha = 0$, 则 $P\{X^2 Y^2 = 1\} = \beta + 0.2 = 0.3$.

757 【答案】 0

$$\begin{aligned} \text{【分析 1】 } & P\{\max(X, Y) > \mu\} - P\{\min(X, Y) < \mu\} \\ &= 1 - P\{\max(X, Y) \leq \mu\} - [1 - P\{\min(x, y) \geq \mu\}] \\ &= -P\{\max(X, Y) \leq \mu\} + P\{\min(X, Y) \geq \mu\} \\ &= -P\{X \leq \mu, Y \leq \mu\} + P\{X \geq \mu, Y \geq \mu\} \\ &= -P\{X \leq \mu\} + P\{X \leq \mu, Y > \mu\} + P\{X > \mu, Y > \mu\} \\ &= -P\{X \leq \mu\} + P\{Y > \mu\} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

【分析 2】 记“ $X \leq \mu$ ” = A , “ $Y \leq \mu$ ” = B , 显然 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
& P\{\max(X, Y) > \mu\} - P\{\min(X, Y) < \mu\} \\
&= 1 - P\{\max(X, Y) \leq \mu\} - [1 - P\{\min(x, y) \geq \mu\}] \\
&= -P\{\max(X, Y) \leq \mu\} + P\{\min(X, Y) \geq \mu\} \\
&= -P\{X \leq \mu, Y \leq \mu\} + P\{X \geq \mu, Y \geq \mu\} \\
&= -P(AB) + P\{X > \mu, Y > \mu\} = -P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) \\
&= -P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = -P(AB) + 1 - P(A \cup B) \\
&= -P(AB) + 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

【评注】 本题中没有给出 X, Y 相互独立的条件, 在上述计算中也没有用到相互独立的性质. 不过在填空题计算中既然没说独立, 显然对 X, Y 相互独立也是对的. 不妨就用独立性质来计算, 结果应该是一致的.

$$\begin{aligned}
& P\{\max(X, Y) > \mu\} - P\{\min(X, Y) < \mu\} \\
&= 1 - P\{\max(X, Y) \leq \mu\} - [1 - P\{\min(x, y) \geq \mu\}] \\
&= -P\{\max(X, Y) \leq \mu\} + P\{\min(X, Y) \geq \mu\} \\
&= -P\{X \leq \mu, Y \leq \mu\} + P\{X \geq \mu, Y \geq \mu\} \\
&= -P\{X \leq \mu\}P\{Y \leq \mu\} + P\{X \geq \mu\}P\{Y \geq \mu\} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

758 【答案】 $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

【分析】 $X - Y \sim N(0, 2)$, 其概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}, -\infty < x < +\infty,$$

$f(x)$ 的最大值在 $x = 0$ 处, 最大值为 $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

759 【答案】 μ_2

【分析】 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; 0)$, 所以 X, Y 相互独立.

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

由正态分布密度函数对称性, $F_X(\mu_1) = P\{X \leq \mu_1\} = \frac{1}{2}$.

$$F(\mu_1, y) = F_X(\mu_1)F_Y(y) = \frac{1}{2}F_Y(y) = \frac{1}{4}, \text{ 就有 } F_Y(y) = \frac{1}{2}, \text{ 即 } y = \mu_2.$$

760 【答案】 $N\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 0\right)$

【分析】 (X, Y) 的分布函数为 $\Phi(2x+1)\Phi(2y-1)$ 可知 X, Y 必独立.

$$\Phi(2x+1)\Phi(2y-1) = \Phi\left[\frac{x - (-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}\right]\Phi\left[\frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right] = F_X(x)F_Y(y)$$

由正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的标准化可知

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

$$\text{现 } F_X(x) = \Phi\left[\frac{x - (-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}\right], \text{ 所以 } X \sim N\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{同理 } Y \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ 总之 } (X, Y) \sim N\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 0\right).$$

761 【答案】 $\Phi(x)$

【分析】 将事件“ $Y = -1$ ”和“ $Y = 1$ ”看成一完备事件组,则由全概率公式

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{Z \leq x\} = P\{XY \leq x\} = P\{Y = -1\}P\{XY \leq x | Y = -1\} + \\ &\quad P\{Y = 1\}P\{XY \leq x | Y = 1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{-X \leq x | Y = -1\} + \frac{1}{2}P\{X \leq x | Y = 1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{-X \leq x\} + \frac{1}{2}P\{X \leq x\} = \frac{1}{2}P\{X \geq -x\} + \frac{1}{2}\Phi(x) \\ &= \frac{1}{2}[1 - P\{X < -x\}] + \frac{1}{2}\Phi(x) = \frac{1}{2}[1 - P\{X \leq -x\}] + \frac{1}{2}\Phi(x) \\ &= \frac{1}{2}[1 - \Phi(-x)] + \frac{1}{2}\Phi(x) \\ &= \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(x) = \Phi(x). \end{aligned}$$

【评注】 本题解法常用于两独立随机变量其中一个为离散型的情况,一般先处理离散用全概率公式.

762 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 首先要求出 $f(x)$ 中的未知参数 a, b ; 而后由 $P\{|X| < \sqrt{2}\} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)dx$ 求得概率.

$$\text{因为 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad \text{①}$$

$$\text{又 } 2 = EX^2 = \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{b^2 + a^2}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b^2 + a^2}{2} \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①② 求得 } a = 1, b = \sqrt{3}. \text{ 所以 } f(x) = \begin{cases} x, & 1 < x < \sqrt{3}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$P\{|X| < \sqrt{2}\} = P\{-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}\} = \int_1^{\sqrt{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

763 【答案】 2

【分析】 已知 $X_i \sim P(\lambda_i)$ 且 X_1 与 X_2 相互独立, 所以 $EX_i = DX_i = \lambda_i (i = 1, 2)$, $E(X_1 + X_2)^2 = E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) = EX_1^2 + 2EX_1EX_2 + EX_2^2 = \lambda_1 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_2^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2$. 为求得最终结果我们需要由已知条件计算出 $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } P\{X_1 + X_2 > 0\} &= 1 - P\{X_1 + X_2 \leq 0\} = 1 - P\{X_1 + X_2 = 0\} \\ &= 1 - P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = 1 - P\{X_1 = 0\}P\{X_2 = 0\} \\ &= 1 - e^{-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} = 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

故 $E(X_1 + X_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 2$.

764 【答案】 $\frac{10}{19}$

【分析 1】 记 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 堆两只鞋恰成一双,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, 10)$

则 $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$.

将 10 双鞋 (20 只鞋) 随意排成一行, 1、2 为第一堆, 3、4 为第二堆, 如此下去, 19、20 为第 10 堆. 我们将任意一种排列作为一个基本事件, 其总数为 $20!$. 事件 $A_i =$ “第 i 堆两只鞋恰成一双” 等价于 “从 10 双鞋中任选一双随意放在第 $2i-1, 2i$ 位置上 (共有 $C_{10}^1 \times 2!$ 种不同放法)”, 余下的 18 只鞋随意排放在其他位置上 (共有 $18!$ 种放法), 由乘法原理知对事件 A_i 的基本事件数为 $C_{10}^1 \times 2 \times 18!$, 所以

$$P\{X_i = 1\} = P(A_i) = \frac{C_{10}^1 \times 2 \times 18!}{20!} = \frac{1}{19},$$

$$EX_i = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{19}, EX = \sum_{i=1}^{10} EX_i = \frac{10}{19}.$$

【分析 2】 记 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 堆两只鞋恰成一双,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, 10)$

则 $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$.

将第 i 堆的第一只鞋固定, 第二只鞋要与第一只鞋配对, 只有在不同于第一只鞋剩下的 19 只中惟一的一只才有可能, 故 $P\{X_i = 1\} = \frac{1}{19}$, 也就有 $EX_i = 1 \cdot \frac{1}{19} + 0 \cdot \frac{18}{19} = \frac{1}{19}$, $EX = \sum_{i=1}^{10} EX_i = \frac{10}{19}$.

【评注】 计算随机变量数字特征常用的方法是定义法与性质法. 无论用什么方法, 都需要知道相应随机变量的分布 (或应用已知结果). 如果随机变量 X 是某个事件发生的次数, 例如 “配对数”, “停车次数” 等, 我们常常是想办法将 X 分解为若干个较为简单的随机变量 X_i 的和: $X = \sum_i X_i$, 而后应用性质计算 EX, DX .

765 【答案】 0

【分析】 已知 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} EX = 0$, 依题意 $Y = |X - a|$, a 应使

$EXY = EXEY = 0$, 其中

$$\begin{aligned} EXY &= EX|X - a| = \int_{-1}^1 x|x - a| \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^a x(a - x) dx + \int_a^1 x(x - a) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_a^1 \right] = \frac{a}{6} (a^2 - 3). \end{aligned}$$

令 $EXY = \frac{a}{6} (a^2 - 3) = 0$, 解得 $a = 0$, ($a = \pm\sqrt{3}$ 舍去).

接用公式:

766 【答案】 $\frac{24}{5}$

【分析】 由于 1, 2, 3 袋中的白球数和黑球数相同, 从各袋中取到白球的可能均为 $\frac{3}{5}$, 如果用 Y 表示放入 4 号袋的白球数, 可以把三次分别取球看成是三次独立重复试验, 取白球看成试验成功. 所以 $Y \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$, 4 号袋原有白球 3 个, 现又加入 Y 个白球, 4 号袋中的白球数 $X = 3 + Y$, $EX = 3 + EY = 3 + 3 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$.

767 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 显然, 我们要通过计算 $DY = D(X_1 X_2 X_3) = \frac{1}{8}$, 求得 σ^2 .

由于 X_1, X_2, X_3 相互独立, 所以 X_1^2, X_2^2, X_3^2 相互独立, 又 $EX_i = 0, EX_i^2 = DX_i = \sigma^2$.

故 $DY = D(X_1 X_2 X_3) = E(X_1 X_2 X_3)^2 - (EX_1 X_2 X_3)^2$

$$= (EX_1^2 X_2^2 X_3^2) - (EX_1 EX_2 EX_3)^2 = EX_1^2 EX_2^2 EX_3^2 = (\sigma^2)^3 = \frac{1}{8},$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

【评注】 设 X 与 Y 独立, 则 $EXY = EXEY$, 而 $D(XY) \neq DXDY$, 需要通过 $D(XY) = E(XY)^2 - (EXY)^2 = E(X^2 Y^2) - (EXEY)^2 = EX^2 EY^2 - (EX)^2 (EY)^2$ 来计算.

768 【答案】 5

【分析】 由题知 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

记 $A = "X + Y \leq 1"$, 则 Z 是 4 次独立重复试验事件 A 发生的次数, 故

$Z \sim B(4, p), p = P(A) = P\{X + Y \leq 1\} = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2}$, 所以

$$EZ^2 = DZ + (EZ)^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (4 \times \frac{1}{2})^2 = 5.$$

769 【答案】 $\frac{n-1}{n} \sigma^2$

【分析】 $D(X_1 - \bar{X}) = D\left(X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = D\left(\frac{n-1}{n} X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right)$
 $= \frac{(n-1)^2}{n^2} DX_1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n DX_i = \frac{(n-1)^2}{n^2} \sigma^2 + (n-1) \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$

【评注】 本题计算 $D(X_1 - \bar{X})$ 充分利用 $X_1, \dots, X_n$ 的相互独立性, 计算量较小, 如果用其他方法会加大计算量, 例如:

$$D(X_1 - \bar{X}) = DX_1 + D\bar{X} - 2\text{Cov}(X_1, \bar{X}) = \dots;$$

$$D(X_1 - \bar{X}) = E(X_1 - \bar{X})^2 - [E(X_1 - \bar{X})]^2 = \dots.$$

所以本题的方法应作为基本方法加以掌握.

770 【答案】 1

【分析】 由题设条件 $X \sim U(1, 2)$, 即 $f'_x(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

而在 $X = x (1 < x < 2)$ 条件下 Y 服从 $E(x)$, 即

$$\text{在 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

已知: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ 当 $f_X(x) > 0$ 成立.

所以, 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

现在得到 $f(x, y) = \begin{cases} xe^{-xy}, & 1 < x < 2, y > 0, \\ 0, & 1 < x < 2, y \leq 0. \end{cases}$

为了求出 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ 上的 $f(x, y)$, 考查

$$\int_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_1^2 dx \int_0^{+\infty} xe^{-xy} dy = \int_1^2 1 dx = 1.$$

我们知道 $f(x, y)$ 是密度, 有性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ 和 $f(x, y) \geq 0$

因此推出 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$ 时 $f(x, y) = 0$.

总之 $f(x, y) = \begin{cases} xe^{-xy}, & 1 < x < 2, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

有了 $f(x, y)$ 就可以求 $E(XY)$.

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \int_1^2 dx \int_0^{+\infty} xy e^{-xy} dy \\ &= \int_1^2 dx \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \int_1^2 dx = 1. \end{aligned}$$

【评注】 在求 $f(x, y)$ 的过程中, 我们不能直接表示为:

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy}, & 1 < x < 2, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因为 $f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$ 只有在 $f_X(x) > 0$ 即 $1 < x < 2$ 成立. 去除条件 $1 < x < 2, f_{Y|X}(y|x)$ 没有定义, 而 $f(x, y)$ 去除条件 $1 < x < 2$, 也是有意义的.

771 【答案】 1

【分析】 $DX = DY = \frac{1}{4}$,

$$1 = D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{解得 } \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4}, \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}}} = 1.$$

772 【答案】 $1 - e^{-1}$

【分析】 如果把 Y 看成 X 的函数, 先求出 Y 的概率密度, 然后求 $E(Y)$ 会较麻烦. 可以直接用公式:

$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$, 其中 $f(x)$ 为 X 的密度函数.

$$\begin{aligned} \text{现 } E(Y) &= E(\min\{|X|, 1\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(|x|, 1)f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \min(x, 1)e^{-x}dx = \int_0^1 xe^{-x}dx + \int_1^{+\infty} 1 \cdot e^{-x}dx \\ &= 1 - 2e^{-1} + e^{-1} = 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

773 【答案】 1

【分析】 $F(x) = \begin{cases} a - e^{-bx}, & x > 0, \\ c, & x \leq 0. \end{cases}$ 则 $f(x) = F'(x) = \begin{cases} be^{-bx}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

对比指数分布的密度 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

得 $\lambda = 1 = b$. $D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$.

774 【答案】 $1 - \frac{2}{\pi}$

【分析】 X_1 与 X_2 独立均服从 $N(0, \frac{1}{2})$, 记 $Z = X_1 - X_2$, 则 $Z \sim N(0, 1)$, 有概率密度 $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$.

$$\begin{aligned} D(|X_1 - X_2|) &= D(|Z|) = E(|Z|^2) - (E|Z|)^2 = E(Z^2) - (E|Z|)^2 \\ &= D(Z) + [E(Z)]^2 - (E|Z|)^2 \end{aligned}$$

显然, $D(Z) = 1, E(Z) = 0$,

$$\begin{aligned} E|Z| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}d(\frac{z^2}{2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

因此, $D(|X_1 - X_2|) = 1 + 0 - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$.

775 【答案】 $N(0, \mu_2; 1, \sigma_2^2; \rho)$

【分析】 显然 $(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y)$ 也服从二维正态.

由于 $E(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}) = 0, D(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}) = 1$. 故 $(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y) \sim N(0, \mu_2, 1, \sigma_2^2; \rho_1)$,

其中 ρ_1 是 $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}$ 与 Y 的相关系数.

$$\rho_1 = \frac{\text{cov}(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y)}{\sqrt{D(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1})} \sqrt{DY}} = \frac{\text{cov}(X - \mu_1, Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = \rho.$$

776 【答案】 -0.1

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	-1	0	1	
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.2	0.2	0.1	0.5
	0.3	0.4	0.3	

【分析】

显然, $EX = 0.5, EY = (-1) \cdot (0.3) + 1 \cdot (0.3) = 0$.

$$E(XY) = -P\{XY = -1\} + P\{XY = 1\} = -0.2 + 0.1 = -0.1.$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = -0.1 - 0 = -0.1.$$

777 【答案】 $(n-2)\sigma^2$

$$\begin{aligned} \text{【分析】} \quad \text{Cov}(Y_1, Y_n) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=2}^n X_i, \sum_{j=1}^{n-1} X_j\right) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_n, X_j) + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_j) + \sum_{i=2}^n \text{Cov}(X_i, X_1) \\ &= 0 + \sum_{k=2}^{n-1} \text{Cov}(X_k, X_k) + 0 = (n-2)\sigma^2. \end{aligned}$$

778 【答案】 2【分析】 切比雪夫不等式为 $P\{|X - EX| \geq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2}$, 现 $EX = \frac{b-1}{2} = 1$, 即 $b = 3$ 所以 $X \sim U[-1, 3]$. 故 $DX = \frac{(3+1)^2}{12} = \frac{4}{3}$. 现 $\frac{DX}{\epsilon^2} = \frac{1}{3}$. 即 $\frac{4}{3\epsilon^2} = \frac{1}{3}, \epsilon = 2$.**779** 【答案】 $\frac{7}{2}$ 【分析】 题目要求我们计算 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} ?$ 为此我们需要应用大数定律或依概率收敛的定义与性质来计算. 由题设知 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

且 $EX_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.根据辛钦大数定律: $\bar{X} \xrightarrow{P} \frac{7}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$.**780** 【答案】 期望存在【分析】 辛钦大数定律的条件是 X_i 独立同分布, 且期望存在. 而切比雪夫大数定律的条件是 X_i 不相关且方差有界.

781 【答案】 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

【分析】 记 $Z_i = X_{2i} - X_{2i-1}$, 则 $Z_i (1 \leq i \leq n)$ 独立同分布且 $EZ_i = 0, DZ_i = 2$. 由独立同分布中心极限定理知, 当 n 充分大, $\frac{\sum_{i=1}^n Z_i - E(\sum_{i=1}^n Z_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n Z_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - X_{2i-1})}{\sqrt{2n}}$ 近似服从标准正态分布, 所以 $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

782 【答案】 $N(0, \frac{n-1}{n})$

【分析】 $X_1 - \bar{X} = X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = X_1 - \frac{1}{n} X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n DX_i = \frac{n-1}{n} X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$

所以 $X_1 - \bar{X}$ 是相互独立的 n 个标准正态分布随机变量的线性组合, $X_1 - \bar{X}$ 必服从正态分布, $N(*, *)$

$$E(X_1 - \bar{X}) = \frac{n-1}{n} EX_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n EX_i = 0;$$

$$D(X_1 - \bar{X}) = \frac{(n-1)^2}{n^2} DX_1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n DX_i = \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2 - n}{n^2}$$

$$\text{所以 } (X_1 - \bar{X}) \sim N(0, \frac{n-1}{n}).$$

783 【答案】 $1 - [1 - F(y)]^n$

【分析】 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y\}$

$$= 1 - P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > y\}$$

$$= 1 - P\{X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y\}$$

$$= 1 - P\{X_1 > y\}P\{X_2 > y\} \cdots P\{X_n > y\}$$

$$= 1 - [1 - P\{X_1 \leq y\}][1 - P\{X_2 \leq y\}] \cdots [1 - P\{X_n \leq y\}]$$

$$= 1 - [1 - F(y)]^n.$$

784 【答案】 $F(1, 2n-2)$

【分析】 由于两个总体都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 且样本又相互独立, 因此容易求得 $\bar{X} - \bar{Y}$ 与 $S_X^2 + S_Y^2$ 的分布, 再应用典型模式确定 F 的分布.

由于 $X \sim N(0, \sigma^2), Y \sim N(0, \sigma^2)$, 所以 $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n}), \bar{Y} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n}), \bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 相互独立,

$$\text{故 } \bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, \frac{2\sigma^2}{n}), \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1), \frac{n(\bar{X} - \bar{Y})^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1).$$

又 $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), S_X^2$ 与 S_Y^2 相互独立, 根据 χ^2 分布可加性, 得

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)(S_X^2 + S_Y^2)}{\sigma^2} \sim \chi^2(2n-2)$$

又 $\bar{X}, \bar{Y}, S_x^2, S_y^2$ 相互独立, 从而推出 $\bar{X} - \bar{Y}$ 与 $S_x^2 + S_y^2$ 相互独立, 由 F 分布的典型模式, 得

$$\frac{\frac{n(\bar{X} - \bar{Y})^2}{2\sigma^2}/1}{\frac{(n-1)(S_x^2 + S_y^2)/2(n-1)}{\sigma^2}} = \frac{n(\bar{X} - \bar{Y})^2}{S_x^2 + S_y^2} \sim F(1, 2(n-1)).$$

785 【答案】 $F(1, 1)$

【分析】 由题设知 (X, Y) 服从二维正态分布, 且

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \times 2 \times 3} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{2}{9}xy + \frac{1}{9})} = \frac{1}{2\pi \times 2 \times 3} e^{-\frac{1}{2}[(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y-1}{3})^2]}$$

故 $X \sim N(0, 2^2), Y \sim N(1, 3^2)$, 且 $\rho = 0$, 所以 X 与 Y 独立, $\frac{X}{2} \sim N(0, 1), \frac{Y-1}{3} \sim N(0, 1)$,

根据 F 分布典型模式知 $\frac{(\frac{X}{2})^2/1}{(\frac{Y-1}{3})^2/1} = \frac{9X^2}{4(Y-1)^2} \sim F(1, 1).$

786 【答案】 $C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$

【分析】 $X_i \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, X_i 为一次伯努利试验的结果, X_i 相互独立.

所以 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 可以看成 n 次独立重复试验. 即 $\sum_{i=1}^n X_i \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

$$P\left\{\bar{X} = \frac{k}{n}\right\} = P\{n\bar{X} = k\} = P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = k\right\} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

787 【答案】 2

【分析】 显然 $E(S^2) = D(X)$, 而 $DX = E(X - EX)^2$.

$$\text{现求 } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\mu} x \cdot e^{-\mu-x} dx + \int_{\mu}^{+\infty} x e^{-x+\mu} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{-\mu} (xe^x - e^x) \Big|_{-\infty}^{\mu} + e^{-\mu} (-xe^{-x} - e^{-x}) \Big|_{\mu}^{+\infty} \right] = \mu.$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} dx = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 2.$$

788 【答案】 0.8

【分析】 $X \sim t(n)$. 所以根据 $t(n)$ 分布随机变量的典型模式, 可以表示

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}} \sim t(n) \text{ 其中 } ① X_1 \sim N(0, 1); ② Y_1 \sim \chi^2(n); ③ X_1, Y_1 \text{ 相互独立.}$$

现来考虑 $X^2 = \frac{X_1^2}{Y_1/n} = \frac{X_1^2/1}{Y_1/n} \sim F(1, n)$, 其中 ① $X_1^2 \sim \chi^2(1)$; ② $Y_1 \sim \chi^2(n)$; ③ X_1^2, Y_1 相互独立.

由于 $t(n)$ 的概率密度是偶函数, 故 $P\{X > C\} = 0.6$, 可知 $C < 0$.

$$\begin{aligned} P\{Y > C^2\} &= P\{X^2 > C^2\} = P\{X > -C\} + P\{X < C\} = 2P\{X < C\} \\ &= 2[1 - P\{X \geq C\}] = 2[1 - P\{X > C\}] = 2[1 - 0.6] = 0.8. \end{aligned}$$

789 【答案】 $\frac{2\sigma^4}{n-1}$

【分析】 由性质: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 和 $D(\chi^2(n-1)) = 2(n-1)$,

可知 $D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} D(S^2) = D[\chi^2(n-1)] = 2(n-1)$,

所以 $D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

790 【答案】 2 和 4

【分析】 $\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(2)$, $\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(4)$,

且它们是相互独立的.

故 $\frac{\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2}{2} \bigg/ \frac{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2}{4} = 2 \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2} \sim F(2, 4).$

791 【答案】 1

【分析】 $(X_1 + X_2 + X_3) \sim N(0, 3\sigma^2)$, 所以 $\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma} \sim N(0, 1)$.

$\left(\frac{X_4^2}{\sigma^2} + \frac{X_5^2}{\sigma^2} + \frac{X_6^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}(X_4^2 + X_5^2 + X_6^2) \sim \chi^2(3)$, 且与 $\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma}$ 相互独立,

因此 $\frac{\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}(X_4^2 + X_5^2 + X_6^2)}/3} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}} \sim t(3)$, 所以 $a = 1$.

792 【答案】 $\frac{1}{2n}$

【分析】 $EY = E\left[c \sum_{i=1}^n (X_{2i} - X_{2i-1})^2\right] = c \sum_{i=1}^n E[(X_{2i} - X_{2i-1})^2]$

$$= c \sum_{i=1}^n \{D(X_{2i} - X_{2i-1}) + [E(X_{2i} - X_{2i-1})]^2\}$$

$$= c \sum_{i=1}^n \{[DX_{2i} + D(X_{2i-1})] + [EX_{2i} - EX_{2i-1}]^2\}$$

$$= c \sum_{i=1}^n (2\sigma^2 + 0) = c2n\sigma^2 = \sigma^2$$

$c = \frac{1}{2n}$.

793 【答案】 $\frac{9}{20}$ 【分析】 就有一个参数 θ , 估矩估计量用 $EX = \bar{X}$.

$$EX = 0 \cdot \theta^2 + 1 \cdot 2\theta(1-\theta) + 2 \cdot (1-\theta)^2 = 2(1-\theta).$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10} (5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = \frac{11}{10}$$

$$\text{总之, } 2(1-\theta) = \frac{11}{10}, \hat{\theta} = \frac{9}{20}.$$

794 【答案】 -0.4383 【分析】 要由 $P\{\bar{X} > \mu + aS\} = P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S} > a\right\} = 0.95$ 求 a , 必须知道 $\frac{\bar{X}-\mu}{S}$ 的分布.由于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 故 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{16}\right)$, $\frac{4(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$, $\bar{X}$ 与 S^2 独

$$\text{立, 所以} \quad \frac{4(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{15S^2/\sigma^2}} = \frac{4(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(15),$$

因此, 由 $0.95 = P\{\bar{X} > \mu + aS\} = P\left\{\frac{4(\bar{X}-\mu)}{S} > 4a\right\}$ 知, $4a$ 是 $t(15)$ 分布上 $\alpha = 0.95$ 的分位点 $t_{0.95}(15)$, 即 $4a = t_{0.95}(15)$, 由于 t 分布密度函数是关于 $x = 0$ 对称的, 所以有 $-t_\alpha = t_{1-\alpha}$, $4a = t_{0.95}(15) = -t_{0.05}(15) = -1.7531, \Rightarrow a = -0.4383$.

795 【答案】 10.2

【分析】 由于 μ 的双侧置信区间的上, 下限, 无论 σ^2 已知或者 σ^2 未知, 都关于样本均值 $\bar{x}$ 是对称的, 现置信下限为 0.78 , 则置信上限应为 $\bar{x} + (\bar{x} - 7.8) = 9.0 + (9.0 - 7.8) = 10.2$. 故置信上限应填 10.2 .

796 【答案】 $\sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$ 【分析】 由于 $EX = 0$, 不能用一阶矩来估计.

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{a^2}{3}, \text{ 样本二阶矩为 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

$$EX^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \text{ 即 } \frac{a^2}{3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, a = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

797 【答案】 $\bar{X} - 1$ 【分析】 $EX = \frac{\theta + (\theta + 2)}{2} = \theta + 1$, 矩估计有 $EX = \bar{X}$, 故 $\theta + 1 = \bar{X}, \hat{\theta} = \bar{X} - 1$.**798** 【答案】 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$ 【分析】 似然函数 $L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^n e^{-\frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|}$

两端取对数 $\ln L = -n \ln 2 - n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|$,

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0,$$

解得 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$, 所以 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$.

799 【答案】 $\frac{Q^2}{\sigma_0^2}$

【分析】 $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} = \frac{Q^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$.

800 【答案】 0.5548

【分析】 当 H_0 成立时, $X \sim N(0.5, 0.04)$

$$\bar{X} \sim N\left(0.5, \frac{0.04}{36}\right) = N\left(0.5, \left(\frac{0.1}{3}\right)^2\right)$$

$$\alpha = 0.05 = P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 成立}\} = P\{\bar{X} > C\}$$

$$= 1 - P\{\bar{X} \leq c\} = 1 - \Phi\left(\frac{c - 0.5}{\frac{0.1}{3}}\right) = 1 - \Phi(30C - 15).$$

所以 $\Phi(30C - 15) = 0.95 = \Phi(1.645)$, 即 $30C - 15 = 1.645$

$$C = \frac{16.645}{30} = 0.5548.$$