

从来不是让你把一次考试当成人生成败的赌注  
只是想让你在足够年轻的时候体会一次全力以赴

from 《请回答1988》

给自己的话：

---

---

---



准备考研的宝宝们，别想着玩儿，快来学习吧~  
今天开始做作业，别担心，我们先来点简单的练习，活动活动热热身。  
预备，开始！



# 高等数学



## 作业 1

1 请将下列的数字、字母、符号分别抄写 5 遍. 注意书写规范, 要求写出的记号容易辨认不与其他记号混淆, 其他常用记号可自行练习.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 a b c d i j x y z  
 $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\eta$   $\sigma$   $\delta$   $\theta$   $\mu$   $\nu$   $\xi$   $\upsilon$   $\zeta$   $\chi$   $\pi$   $\lambda$   $\rho$   $\omega$   $\int$   $\Sigma$

2 请在 3 分钟内完成下列计算. 别大意, 在保证全正确的前提下尽可能的快.

- (1)  $37 + 51 - 23 =$  \_\_\_\_\_
- (2)  $45 - 16 + 21 =$  \_\_\_\_\_
- (3)  $3 \times 23 - (3 \times 4) =$  \_\_\_\_\_
- (4)  $(33 - 8) \times 3 + 7 =$  \_\_\_\_\_
- (5)  $3^2 - 2^2 + 2 =$  \_\_\_\_\_
- (6)  $5^3 + 4^3 + 3^3 =$  \_\_\_\_\_
- (7)  $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{2} =$  \_\_\_\_\_
- (8)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$  \_\_\_\_\_
- (9)  $0.99 \times 0.05 + 0.25 \times 0.95 =$  \_\_\_\_\_
- (10)  $\frac{0.75 \times 0.5}{0.05 + 0.85 \times 0.5} =$  \_\_\_\_\_

**3** 写出下列无理数的近似值.

(1)  $\pi \approx$  \_\_\_\_\_

(2)  $e \approx$  \_\_\_\_\_

(3)  $\sqrt{2} \approx$  \_\_\_\_\_

(4)  $\sqrt{3} \approx$  \_\_\_\_\_

**4** 乘法和因式分解

(1)  $(a \pm b)^2 =$  \_\_\_\_\_

(2)  $(a \pm b)^3 =$  \_\_\_\_\_

(3)  $a^2 - b^2 =$  \_\_\_\_\_

(4)  $a^3 \pm b^3 =$  \_\_\_\_\_

(5)  $a^n - b^n$  ( $n$  为正整数)  $=$  \_\_\_\_\_

(6)  $a^n - b^n$  ( $n$  为偶数)  $=$  \_\_\_\_\_

(7)  $a^n + b^n$  ( $n$  为奇数)  $=$  \_\_\_\_\_

(8)  $(a + b + c)^2 =$  \_\_\_\_\_

(9)  $(a + b + c)^3 =$  \_\_\_\_\_

(10)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$  \_\_\_\_\_

(11)  $a^4 + a^2b^2 + b^4 =$  \_\_\_\_\_

(12)  $x^2 + (a + b)x + ab =$  \_\_\_\_\_

**5** 特殊角的三角函数值. (请填满空格)

| $\theta$        | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$ | $\cot\theta$ | $\sec\theta$ |
|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0               | 0            | 1            | 0            | 不存在          | 1            |
| $\frac{\pi}{6}$ |              |              |              |              |              |
| $\frac{\pi}{4}$ |              |              |              |              |              |
| $\frac{\pi}{3}$ |              |              |              |              |              |
| $\frac{\pi}{2}$ |              |              |              |              |              |
| $\pi$           |              |              |              |              |              |



## 作业 2

### 1 函数的定义

设  $X, Y$  是两个\_\_\_\_\_, 如果对于  $X$  中的任意一个数  $x$ , 按照对应法则  $f$ , 在  $Y$  中存在唯一的数  $y$ , 则称  $f$  为数集  $X$  到数集  $Y$  的\_\_\_\_\_, 记作  $f: X \rightarrow Y$ . 数  $x$  对应的数  $y$  称为  $f$  的\_\_\_\_\_, 记作  $y = f(x)$ . 数集  $X$  称为函数的\_\_\_\_\_ (或记作  $D(f)$ ), 函数值  $y$  的集合称为  $f$  的\_\_\_\_\_, 记作  $R(f)$ , 即  $R(f) = \{y \mid y = f(x) \text{ 且 } x \in D(f)\}$ .

注意:  $R(f) \subseteq Y$ .

函数定义的两个要素: \_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_.

### 2 请解释下列名词.

邻域、有心邻域、去心邻域、半邻域

函数的单调性

奇偶性

周期性

有界性

### 3 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2, 2]$ , 求 $f(x+1) + f(x-1)$ 的定义域.

### 4 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$ , 求 $f(-x)$ 的表达式.



5

通常把\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_六种函数称为基本初等函数.

由基本初等函数经过\_\_\_\_\_的\_\_\_\_\_所构成并可用\_\_\_\_\_表示的函数,称为初等函数.初等函数以外的函数,称为非初等函数,最常见的是分段函数.

6

请画出下列基本函数的图像,并写出对应的定义域、值域,单调性、有界性、奇偶性、周期性、连续性、可导性等性质.

(1) 幂函数:  $y = x^u$  ( $u \in \mathbf{R}$  是常数)

(2) 指数函数:  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ );



## 作业 3

(3) 对数函数:  $y = \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ );

(4) 三角函数:

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x.$$



(5) 反三角函数:

$\arcsin x, \arccos x,$

$\arctan x, \operatorname{arccot} x.$



反三角函数的规律

$$\sin(\arcsin x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \underline{\hspace{2cm}}. \quad \arcsin x + \arccos x = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\cos(\arccos x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \underline{\hspace{2cm}}. \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\arcsin(\sin x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \underline{\hspace{2cm}}. \quad \arcsin(-x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\arccos(\cos x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \underline{\hspace{2cm}}. \quad \arccos(-x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \underline{\hspace{2cm}}.$$



## 作业 4

1 请写出分段函数的概念,并举出四个分段函数的例子.

2 设函数  $y = f(u)$  的定义域是  $D_f$ , 函数  $u = \varphi(x)$  的定义域是  $D_\varphi$ , 值域是  $R_\varphi$ . 若  $D_f \cap R_\varphi \neq \emptyset$  ( $\emptyset$  表示空集), 则称函数  $y = f(\varphi(x))$  为\_\_\_\_\_, 它的定义域是\_\_\_\_\_.  $u$  称为\_\_\_\_\_,  $x$  称为\_\_\_\_\_.

3 设  $f(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1$ , 则  $f[f(f(x))] \cdot f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$  表达式为

(A)  $\frac{x-1}{x}$ .

(B)  $x$ .

(C) 1.

(D)  $\frac{1}{1-x}$ .



4

设函数  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ ,  $\varphi(x) = x^2 - 1$ , 求  $f[\varphi(x)]$ .

5

将复合函数分解成几个基本初等函数或简单函数(分解不唯一).

(1)  $y = \sqrt[5]{2-x^3}$ .

(2)  $y = 2\ln^2 \ln x^2$ .

(3)  $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}}$ .

(4)  $y = \frac{2\sin^4 x - x^5}{x^4}$ .



## 作业 5

1 求下列函数在  $x_0 = 1$  点的左右极限, 并判断函数在该点极限是否存在.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \arctan \frac{1}{x-1}.$$

$$(3) f(x) = \frac{1 - e^{\frac{1}{x-1}}}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}.$$

$$(4) f(x) = |x-1|.$$



## 2 极限的性质

**唯一性** 如果数列或函数的极限存在,则\_\_\_\_\_.

**数列的有界性** 如果数列的极限存在,则\_\_\_\_\_.

**函数的局部有界性**

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则\_\_\_\_\_.

若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , 则\_\_\_\_\_.

**保号性**

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  且  $A > 0 (A < 0)$ , 则\_\_\_\_\_.

**函数的局部保号性**

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则\_\_\_\_\_.

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则\_\_\_\_\_.

**(四则运算)** 设  $\lim u = A, \lim v = B$ , 则

$\lim(u \pm v) =$  \_\_\_\_\_,

$\lim(u \cdot v) =$  \_\_\_\_\_,

$\lim \frac{u}{v} =$  \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_).

设  $\lim v = B \neq 0$ , 则  $\lim(u \cdot v) =$  \_\_\_\_\_.

**(复合运算)** 设  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b, \lim_{u \rightarrow b} f(u) = A$ , 且当  $x \in \mathring{U}(a, \delta)$  时,  $\varphi(x) \neq b$ , 则

$\lim_{x \rightarrow a} f[\varphi(x)] =$  \_\_\_\_\_.

## 3

计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$ .



## 作业 6

1 两个重要极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

设  $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$ , 则  $\lim [f(x)]^{g(x)} = \lim [\text{_____}]^{g(x)} = e^{\text{_____}}$ .

2 计算  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$ .

3 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$ .

4 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$ .



5 叙述两个极限准则的内容.

6 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1 + a_n}$ . 证明数列  $\{a_n\}$  的极限存在.

7 利用单调有界准则证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$ .

8 证明数列  $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$  极限存在.

9 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + 10^n}$ .



## 作业 7

1 写出等价无穷小量的概念,并给出至少 6 个常用的等价无穷小量.

2 设  $\lim \alpha = 0 (\alpha \neq 0), \lim \beta = 0$ .

若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \text{_____}$ , 则称  $\beta$  为  $\alpha$  的高阶无穷小, 记作  $\text{_____}$ ;

若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \text{_____}$ , 则称  $\beta$  为  $\alpha$  的同阶无穷小.

3 计算下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right).$



#### 4 函数连续的概念

#### 5 函数间断点的类型

左右极限均存在且相等的间断点称\_\_\_\_\_，此时可补充定义使函数连续；

\_\_\_\_\_的间断点称为跳跃间断点；

\_\_\_\_\_，则称为无穷间断点；

如果左右极限都\_\_\_\_\_，则称为振荡间断点。

左右极限均存在的间断点称为\_\_\_\_\_，包括可去间断点和跳跃间断点；

其余间断点称为第二类间断点。

#### 6 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

#### 7 函数 $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

#### 8 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{2}, & x \leq 0, \\ 1 + x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 4 - x, & x > 1, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处的连续性.



## 作业 8

### 1 闭区间连续函数的性质

(最值定理)

(介值定理)

(零值定理)

2 函数  $f(x)$  在  $U(x_0, \delta)$  内有定义, 当自变量在  $x_0$  处有增量  $\Delta x$  时, 相应的函数增量为  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

存在, 则称此极限值为函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的导数, 记作  $f'(x_0)$ .

导数也可记作  $y' \Big|_{x=x_0}$ ,  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ ,  $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$ .

如果  $\underline{\hspace{2cm}}$  存在, 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处的左导数存在, 记作  $f'_-(x_0)$ .

如果  $\underline{\hspace{2cm}}$  存在, 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处的右导数存在, 记作  $f'_+(x_0)$ .

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导的充分必要条件是  $f(x)$  在点  $x_0$  处的  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

导数的几何意义  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 3 求导公式

(1)  $(c)' = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $c$  为常数);

(2)  $(x^\mu)' = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $\mu$  为实数);

(3)  $(a^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $a > 0, a \neq 1$ );

(4)  $(e^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(5)  $(\log_a x)' = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $a > 0, a \neq 1$ );

(6)  $(\ln x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(7)  $(\sin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(8)  $(\cos x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(9)  $(\tan x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(10)  $(\cot x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(11)  $(\sec x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(12)  $(\csc x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;



(13)  $(\arcsin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(14)  $(\arccos x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(15)  $(\arctan x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(16)  $(\operatorname{arccot} x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**4** 设函数  $u(x), v(x)$  在  $x$  处可导, 则

(1)  $[u(x) \pm v(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2)  $[u(x) \cdot v(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(3)  $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \underline{\hspace{2cm}}$  (此时假设  $v(x) \neq 0$ ).

特别地,  $[c \cdot u(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $c$  为常数;  $\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $v(x) \neq 0$ );

$[u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**5** 利用导数定义证明上题的(2)(3).

**6** 复合函数的导数运算法则

设  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , 如果  $\varphi(x)$  在  $x$  处可导,  $f(u)$  在  $u$  处可导, 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在  $x$  处可导, 且有

$\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**7** 高阶导数

$(e^{2x+1})^{(n)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$(\ln(2x+1))^{(n)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$\sin(2x+1)^{(n)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$\cos(2x+1)^{(n)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .



## 作业 9

1 可导一定连续,连续不一定可导.举例说明函数连续但不可导.

2 设函数  $y = \sin(x^2)$ , 求导数  $y'$ .

3 设函数  $y = \ln \tan \sqrt{x}$ , 求导数  $y'$ .

4 已知摆线的参数方程为 
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$
 求  $\frac{dy}{dx}$ .

5 设  $x = f(y)$  是严格单调的可导函数, 且  $f'(y) \neq 0$ , 求反函数  $y = f^{-1}(x)$  在对应点  $x$  处的二阶导数.



6

洛必达(L'Hospital) 法则

1. 未定式“ $\frac{0}{0}$ ”

设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  的某个去心邻域  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内有定义, 且满足条件:

- (1) \_\_\_\_\_ ;
- (2) \_\_\_\_\_ ;
- (3) \_\_\_\_\_ ,

则有  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$  \_\_\_\_\_.

未定式“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”

设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  的某个去心邻域  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内有定义, 且满足条件:

- (1) \_\_\_\_\_ ;
- (2) \_\_\_\_\_ ;
- (3) \_\_\_\_\_ ,

则有  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$  \_\_\_\_\_.

洛必达法则只适用于求  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  型的未定式极限.

若 \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ 必须转化成  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型.

7

计算下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$



## 作业 10

1 (费马引理) 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义, 且在内点  $c(a < c < b)$  处取得最大值(或最小值), 且  $f'(c)$  存在, 则  $f'(c) = 0$ .

证明:

2 写出罗尔(Rolle) 定理, 并证明.

3 写出拉格朗日(Lagrange) 中值定理, 并证明.



4

写出柯西(Cauchy)中值定理,并证明.

5

泰勒(Taylor)定理

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的邻域内有定义,且在  $x_0$  处有\_\_\_\_\_阶导数,则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underline{\hspace{2cm}} + \cdots + \underline{\hspace{2cm}} + R_n(x) \quad (1)$$

其中  $R_n(x) = \underline{\hspace{2cm}}$  称为佩亚诺(Peano)型余项,式(1)称为  $n$  阶带佩亚诺型余项的泰勒公式.

设函数  $f(x)$  在包含点  $x_0$  的区间  $(a, b)$  内有\_\_\_\_\_阶导数,则对  $\forall x \in (a, b) (x \neq x_0)$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underline{\hspace{2cm}} + \cdots + \underline{\hspace{2cm}} + R_n(x) \quad (2)$$

其中  $R_n(x) = \underline{\hspace{2cm}}$  称为拉格朗日(Lagrange)型余项,式(2)称为  $n$  阶带拉格朗日型余项的泰勒公式.



## 作业 11

1 当  $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $n$  阶泰勒公式又称为  $n$  阶麦克劳林(Maclaurin) 公式.

2 将函数  $f(x) = \sin x$  展开为  $2n$  阶麦克劳林公式.

3 简单函数的麦克劳林公式

$$e^x$$

$$\cos x$$

$$\frac{1}{1+x}$$

$$\ln(1+x)$$

4 利用泰勒公式求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} - \cos x}{x^4}$ .



5

设函数  $f(x)$  在  $U(x_0, \delta)$  内有定义, 若  $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  有  $f(x)$  \_\_\_\_\_  $f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  为函数  $f(x)$  的 \_\_\_\_\_,  $x_0$  点称为函数的 \_\_\_\_\_ 点. 若  $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  有  $f(x)$  \_\_\_\_\_  $f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  为函数  $f(x)$  的 \_\_\_\_\_,  $x_0$  点称为函数的 \_\_\_\_\_ 点.

6

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极值, 且在点  $x_0$  处可导, 则 \_\_\_\_\_.

7

如果  $f'(x_0) = 0$ , 称  $x_0$  为函数  $f(x)$  的 \_\_\_\_\_.

注意: 对于可导函数, 极值点一定是 \_\_\_\_\_, 但 \_\_\_\_\_ 不一定是极值点.

8

函数取得极值的第一充分条件

9

函数取得极值的第二充分条件

10

设函数  $y = f(x)$  由方程  $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$  确定, 求  $f(x)$  的极值.



## 作业 12

**1** 如果存在直线  $L$ , 当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 曲线  $y = f(x)$  上的点与直线  $L$  的距离趋于零, 则称直线  $L$  为曲线  $y = f(x)$  的渐近线.

如果 \_\_\_\_\_, 则称  $x = x_0$  为曲线  $y = f(x)$  的铅直渐近线.

如果 \_\_\_\_\_, 则称  $y = b$  为曲线  $y = f(x)$  的 \_\_\_\_\_.

如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$  (或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$ ), 则称  $y = ax + b$  为曲线  $y = f(x)$  的 \_\_\_\_\_.

**2** 当曲线的方程为  $y = y(x)$  时, 曲线在点  $x$  处的曲率为  $K =$  \_\_\_\_\_, 曲率圆的半径为  $R =$  \_\_\_\_\_.

当曲线的方程为参数方程  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$  时, 曲线在点  $x$  处的曲率为  $K =$  \_\_\_\_\_, 曲率圆的半径为  $R =$  \_\_\_\_\_.

当曲线的方程为极坐标方程  $r = r(\theta)$  时, 曲线在点  $x$  处的曲率为  $K =$  \_\_\_\_\_, 曲率圆的半径为  $R =$  \_\_\_\_\_.

**3** 曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$  是否存在渐近线, 存在求出所有渐近线, 不存在说明理由.

**4** 曲线  $y = x + \sin x$  是否存在渐近线, 存在求出所有渐近线, 不存在说明理由.



5 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导,

如果 \_\_\_\_\_, 那么函数在  $(a, b)$  内是凹的.

如果 \_\_\_\_\_, 那么函数在  $(a, b)$  内是凸的.

6 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导.

当 \_\_\_\_\_ 时, 函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是凹的;

当 \_\_\_\_\_ 时, 函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是凸的.

7 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续,  $f(x)$  凹与凸的分界点  $x_0$  称为函数的 \_\_\_\_\_, 把点  $(x_0, f(x_0))$  称为曲线  $y = f(x)$  的 \_\_\_\_\_.

8 曲线  $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$  的拐点.

9 求  $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$  的拐点和凹凸区间.



## 作业 13

### 1 基本积分公式

$$(1) \int x^\mu dx = \underline{\hspace{2cm}} (\mu \neq -1);$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \int a^x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \int e^x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \int \sin x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(6) \int \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(7) \int \sec^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(8) \int \csc^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(9) \int \sec x \cdot \tan x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(10) \int \csc x \cdot \cot x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(11) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(12) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

### 2 不定积分的基本性质

$$(1) \int kf(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}, \text{其中 } k \text{ 为常数};$$

$$(2) \int [f(x) + g(x)] dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \left[ \int f(x) dx \right]' = \underline{\hspace{2cm}}, d \int f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \int f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}, \int df(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$



**3** 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 取  $b > a$ , 若极限  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  存在, 则称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  \_\_\_\_\_, 即  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ , 反之称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  \_\_\_\_\_.

设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, b]$  上连续, 取  $a < b$ , 若 \_\_\_\_\_ 存在, 则称反常积分  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  收敛, 即 \_\_\_\_\_, 反之称反常积分  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  \_\_\_\_\_.

设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 如果反常积分 \_\_\_\_\_ 与 \_\_\_\_\_ 均收敛, 则称反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 反之称反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  \_\_\_\_\_.

#### **4** 无界函数的反常积分

设函数  $f(x)$  在  $(a, b]$  上连续,  $f(a^+) = \infty$ , 若极限 \_\_\_\_\_ 存在, 则称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  \_\_\_\_\_, 反之称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  \_\_\_\_\_.

设函数  $f(x)$  在  $[a, b)$  上连续,  $f(b^-) = \infty$ , 若极限 \_\_\_\_\_ 存在, 则称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  \_\_\_\_\_, 反之称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  \_\_\_\_\_.

设函数  $f(x)$  在  $[a, c)$ ,  $(c, b]$  上连续,  $f(c) = \infty$ , 如果反常积分 \_\_\_\_\_ 与 \_\_\_\_\_ 均收敛, 则称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛, 反之称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

**5** 计算  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ), 并利用结果判别  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  是否收敛.

**6** 计算  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ ,  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q}$ , 并利用结果判别  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$  是否收敛.



## 作业 14

1

第一类换元积分法. 如果  $\int f(u)du = F(u) + C$ , 则

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第二类换元积分法. 设函数  $x = \varphi(t)$  单调且连续可导, 且  $\varphi'(t) \neq 0$ , 如果  $\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ , 则  $\int f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ , 其中  $t = \varphi^{-1}(x)$  是  $x = \varphi(t)$  的反函数.

2

计算下列积分, 记住结果今后可以直接用.

$$(1) \int \tan x dx$$

$$(2) \int \cot x dx$$

$$(3) \int \sec x dx$$

$$(4) \int \csc x dx$$

$$(5) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$(6) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$$

$$(7) \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$$



3

设函数  $u(x), v(x)$  在区间  $I$  上可导, 如果积分  $\int v du$  存在, 则  $\int u dv =$  \_\_\_\_\_, 这种利用  $\int v du$  来计算  $\int u dv$  的积分方法称为分部积分法.

$$\int u(x) v'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

证明这个结论.

4

计算不定积分

$$\int \ln x dx.$$

$$\int x^3 \ln^2 x dx.$$

$$\int \arctan x dx.$$

$$\int x \arctan x dx.$$



## 作业 15

**1** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上\_\_\_\_\_, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上定积分存在, 又称函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上\_\_\_\_\_, 且\_\_\_\_\_, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**2** 定积分的几何意义并说明下列积分的值.

(1)  $\int_0^2 x dx.$

(2)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

**3** 定积分的性质

(1) 定积分与积分变量\_\_\_\_\_, 即  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$

(2) 当  $a > b$  时,  $\int_a^b f(x) dx =$  \_\_\_\_\_,  $\int_a^a f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

(3)  $\int_a^b k f(x) dx =$  \_\_\_\_\_,  $k$  为常数.

(4)  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx =$  \_\_\_\_\_.

(5) 设  $a < c < b$ , 则  $\int_a^b f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

如果上述积分都存在, 无论  $c$  取任何值上式都成立.

(6) 设  $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ , 则\_\_\_\_\_.

特别地,  $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$  \_\_\_\_\_  $\int_a^b |f(x)| dx.$

(7) 设  $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ , 则

$$\text{_____} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \text{_____}.$$

(8) (定积分中值定理) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = \text{_____}.$$



4

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 称函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt (x \in [a, b])$  为积分上限函数. 积分上限函数又称为变上限函数. 变上限函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $\Phi'(x) = f(x) (x \in [a, b])$ .

变上限函数求导的一般公式

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = \underline{\hspace{10cm}}.$$

5

变上限函数求导的条件, 下列要先适当变换后才可以.

设  $y = \int_a^x x f(t) dt$ , 求  $y'$ .

设  $y = \int_a^b |x - t| f(t) dt (a \leq x \leq b)$ , 求  $y'$ .

设  $y = \int_a^x f(x - t) dt$ , 求  $y'$ .

6

设可导函数  $y = y(x)$  由方程  $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$  确定, 则  $\frac{dy}{dx}$ .



## 作业 16

1 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $F(x)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 则有:

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}},$$

上式称为牛顿—莱布尼茨公式.

2 利用定积分的定义求  $n$  项和式的极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left[a + \frac{k(b-a)}{n}\right] \cdot \frac{b-a}{n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right).$

4 计算下列定积分.

$$(1) \int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx.$$

$$(2) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta.$$

$$(4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx.$$

$$(6) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx.$$

**5** 定积分的换元积分法

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 函数  $x = \varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上为单值函数, 且具有连续导数, 当  $t$  在  $[\alpha, \beta]$  上变化时,  $x = \varphi(t)$  的值在  $[a, b]$  上变化, 且  $\varphi(\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\varphi(\beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ , 则定积分的换元积分公式为  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$ .

注意: 定积分的换元积分法要求积分上下限同时变化, 但不必代回原变量.

**6** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ .**7**

证明:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

**8**

设  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 证明  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx$ .



## 作业 17

### 1 平面图形的面积

#### (1) 直角坐标系：“X”型区域

设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$ , 则由曲线  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  及直线  $x = a, x = b$  所围成的面积(图 1) 可由元素法求得:

$$S = \underline{\hspace{2cm}}.$$

#### (2) 直角坐标系：“Y”型区域

设函数  $\varphi(y), \psi(y)$  在  $[c, d]$  上连续, 且  $\forall y \in [c, d], \varphi(y) \geq \psi(y)$ , 则曲线  $x = \varphi(y), x = \psi(y)$  及直线  $y = c, y = d$  所围的图形(图 2) 面积可由元素法求得:

$$S = \underline{\hspace{2cm}}.$$

#### (3) 极坐标系：“ $\theta$ ”型区域

设极坐标方程  $r = r(\theta)$  表示的函数在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 则由曲线  $r = r(\theta)$  及射线  $\theta = \alpha, \theta = \beta$  所围成的曲边扇形的面积可由元素法求得:

$$S = \underline{\hspace{2cm}}.$$

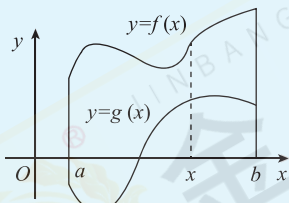


图 1

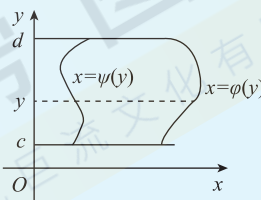


图 2

### 2 旋转体的体积

#### (1) 绕 $x$ 轴旋转

设函数  $f(x)(\geq 0)$  在  $[a, b]$  上连续, 则由曲线  $y = f(x)$ , 直线  $x = a, x = b$  及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体(图 3) 的体积为

$$V_x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

#### (2) 绕 $y$ 轴旋转

设函数  $f(x)(\geq 0)$  在  $[a, b]$  上连续, 则由曲线  $y = f(x)$ , 直线  $x = a, x = b$  及  $x$  轴所围的平面图形绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体(图 4) 的体积为

$$V_y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

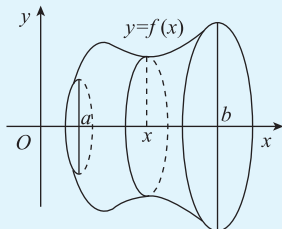


图 3

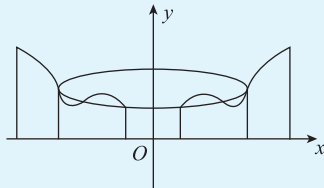


图 4



3

计算心脏线  $r = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$  所围成的图形的面积.

4

计算曲线  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ , 直线  $x = 2$  及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

5

过点  $(0, 1)$  作曲线  $L: y = \ln x$  的切线, 切点为  $A$ , 又  $L$  与  $x$  轴交于  $B$  点, 区域  $D$  由  $L$  与直线  $AB$  围成, 求区域  $D$  的面积及绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.



## 作业 18

**1** 设  $D$  是平面上的一个点集, 如果对于每一个点  $M(x, y) \in D$ , 按照对应法则  $f$  有唯一确定的值  $z$  与之对应, 则称  $f$  为二元函数,  $D$  为  $f$  的定义域. 通常用  $z = f(x, y)$  表示  $f$  在点  $(x, y)$  的取值.

二元函数  $f$  表示为  $z = f(x, y)$ ,  $x, y$  称为自变量,  $z$  称为因变量. 数集  $Z = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$  称为  $f$  的值域.

类似地, 给出三元函数  $u = f(x, y, z)$  与  $n$  元函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的定义.

**2** 设  $f(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , 问  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时  $f(x, y)$  的极限是否存在?

**3** 设  $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ , 求  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ .

**4** 二元函数  $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的极小值点.

**5** 抛物线  $y^2 = 4x$  上求点, 使得该点到定点  $(2, 8)$  的距离最短.



## 6 二重积分的性质

(1)  $\iint_D k f(x, y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2)  $\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3)  $\iint_{D_1 + D_2} f(x, y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 设  $\forall (x, y) \in D$ , 有  $f(x, y) < g(x, y)$ , 则  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则  $\underline{\hspace{2cm}} \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) (二重积分的中值定理) 设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $\sigma$  是  $D$  的面积, 则  $\exists (\xi, \eta) \in D$ , 使得  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$

(7) 二重积分的几何意义:  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(8) 二重积分的物理意义:  $\underline{\hspace{2cm}}.$

## 7

计算  $\iint_D |y - x^2| dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$

## 8

$\iint_D f(x, y) dx dy$  化为极坐标系下的累次积分, 其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}.$

## 9

$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}.$



## 作业 19

1 含有 \_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_ 及 \_\_\_\_\_ 的方程  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  称为微分方程. 其中 \_\_\_\_\_ 称为微分方程的阶, 满足 \_\_\_\_\_ 称为微分方程的解, \_\_\_\_\_ 称为微分方程的通解, 确定了通解中的任意常数的解称为微分方程的 \_\_\_\_\_, 确定任意常数的条件称为微分方程的 \_\_\_\_\_.

如果微分方程中函数及函数的各阶导数都是一次的, 则称微分方程为 \_\_\_\_\_.

2 形如: \_\_\_\_\_ 的微分方程称为可分离变量的微分方程. 可分离变量的微分方程分离变量后, 两边积分可得通解 \_\_\_\_\_.

3 形如: \_\_\_\_\_ 的微分方程称为齐次微分方程, 简称齐次方程. 令 \_\_\_\_\_, 则齐次方程可以化为可分离变量的微分方程.

4 形如  $y' + p(x)y = q(x)$  的方程称为 \_\_\_\_\_. 当  $q(x) = 0$  时, 微分方程  $y' + p(x)y = 0$  称为 \_\_\_\_\_. 此时微分方程是可分离变量的, 变形得  $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ , 两边积分得齐次线性微分方程的通解为  $y =$  \_\_\_\_\_. 当  $q(x) \neq 0$  时, 微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  又称为 \_\_\_\_\_. 常数变易法: 设  $y =$  \_\_\_\_\_ 是  $y' + p(x)y = q(x)$  的解, 则  $y' =$  \_\_\_\_\_, 代入方程求得通解为  $y =$  \_\_\_\_\_.

5 形如  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的微分方程称为 \_\_\_\_\_. 设  $y_1, y_2$  均为  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的解, 则  $Y =$  \_\_\_\_\_ 也为微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的解. 设  $y_1, y_2$  为微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的两个线性无关的解, 则  $Y =$  \_\_\_\_\_ 为微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的通解.

6 形如  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的微分方程称为 \_\_\_\_\_. 设  $y^*$  为  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的一个特解, 而  $Y = c_1y_1 + c_2y_2$  为对应微分方程  $y''$



$+p(x)y'+q(x)y=0$  的通解, 则  $y=$  \_\_\_\_\_ 是非齐次微分方程的通解.

设  $y_1^*, y_2^*$  分别是微分方程  $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$  和  $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$  的特解, 则  $y=$  \_\_\_\_\_ 是微分方程  $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$  的一个特解.

设  $y_1^*, y_2^*$  都是微分方程  $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$  的特解, 则  $y=$  \_\_\_\_\_ 是对应微分方程  $y''+p(x)y'+q(x)y=0$  的一个解.

7

已知  $y_1^* = e^{3x} - xe^{2x}$ ,  $y_2^* = e^x - xe^{2x}$ ,  $y_3^* = -xe^{2x}$  是某个常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该微分方程满足条件  $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$  的解为  $y=$  \_\_\_\_\_.

8

求下列微分方程的通解.

(1)  $\sqrt{1-x^2}y' = \sqrt{1-y^2}.$

(2)  $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0.$

9

求微分方程  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  满足所给初始条件  $y(1) = 2$  的特解.



## 作业 20

(数学 2 不要求)

1 设一个数列  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ , 则和式 \_\_\_\_\_ 称为无穷级数, 简称级数.  $u_n$  称为级数的通项或一般项, \_\_\_\_\_ 称为级数的前  $n$  项部分和, 简称部分和. 当  $n \rightarrow +\infty$  时, 若 \_\_\_\_\_ 存在, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,  $s$  称为级数的和, 记作  $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . 若 \_\_\_\_\_ 不存在, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  \_\_\_\_\_. 当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛于  $s$  时,  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = s - s_n$  称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的余和, 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ .

2 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  的敛散性.

3 讨论几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  ( $a \neq 0$ ) 的敛散性.

4 级数的每一项乘上同一个不为零的常数后, 与原级数有 \_\_\_\_\_.

设两个级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  均收敛, 那么级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  \_\_\_\_\_, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) =$  \_\_\_\_\_.

在级数的前面添加、去掉或改变有限项, 不改变级数的 \_\_\_\_\_.

收敛级数加括号后所组成的新级数仍收敛. 如果加括号后所组成的新级数发散, 则原级数 \_\_\_\_\_.



5

(级数收敛的必要条件) 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则\_\_\_\_\_.

6

当  $u_n$  为常数时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  称为常数项级数. 如果  $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  称为\_\_\_\_\_.

正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充分必要条件是部分和数列  $\{s_n\}$  \_\_\_\_\_.

设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  是两个正项级数, 且  $a_n \leq b_n (n = 1, 2, \dots)$ , 则:

(1) 当\_\_\_\_\_收敛时, \_\_\_\_\_也收敛; (2) 当\_\_\_\_\_发散时, \_\_\_\_\_也发散.

7

设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , 则

当\_\_\_\_\_时, 级数收敛;

当\_\_\_\_\_时, 级数发散;

当\_\_\_\_\_时, 级数的敛散性不确定.

8

如果级数的各项是正负相间的, 如  $u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$ , 其中  $u_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 则称之为\_\_\_\_\_.

(莱布尼茨判别法) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  (其中  $u_n > 0$ ) 满足条件:

(1) \_\_\_\_\_;

(2) \_\_\_\_\_,

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛, 且其和  $s \leq u_1$ , 其余和的绝对值小于等于  $u_{n+1}$ , 即  $|r_n| \leq u_{n+1}$ .

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  \_\_\_\_\_; 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  \_\_\_\_\_, 而级

数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  \_\_\_\_\_.

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

9

讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} (p > 0)$  的敛散性.

# 线性代数



## 作业 21

1 二阶行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三阶行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

$n$  阶行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2 (1)  $n$  阶行列式的值是  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(2)  $n$  阶行列式的展开式中共有  $\underline{\hspace{2cm}}$  项, 正项和负项各有一半.

(3) 在  $n$  阶行列式的展开式中, 每一项都是取自  $\underline{\hspace{2cm}}$  的乘积.

(4) 在  $n$  阶行列式的展开式中, 在行下标按自然顺序排列的前提下, 每项前面的正负号取决于该项  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  列下标所组成的排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的奇偶性.

一阶行列式  $|-1| = \underline{\hspace{2cm}},$  而绝对值  $|-1| = \underline{\hspace{2cm}}.$

3 在  $n$  阶行列式中, 把  $(i, j)$  元  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列划去后, 留下来的  $n-1$  阶行列式称为  $(i, j)$  元  $a_{ij}$  的  $\underline{\hspace{2cm}},$  记作  $M_{ij};$  记  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, A_{ij}$  称为  $(i, j)$  元  $a_{ij}$  的  $\underline{\hspace{2cm}}.$

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$D = \underline{\hspace{2cm}}$

或  $\underline{\hspace{2cm}}$



4 将行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$  的行与列互换后得到的新的行列式,称为  $D$

的 \_\_\_\_\_, 记为  $D^T$  或  $D'$ , 即  $D^T =$  \_\_\_\_\_.

$D^T$  是  $D$  的转置行列式, 同样地,  $D$  也是  $D^T$  的 \_\_\_\_\_.

行列式与它的转置行列式相等, 即  $D =$  \_\_\_\_\_.

5 交换行列式的两行(列), 则行列式值 \_\_\_\_\_.

行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数  $k$ , 等于用数  $k$  乘此行列式, 即行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面, 如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} =$$

如果行列式中有两行(列)的元素成比例, 则此行列式值 \_\_\_\_\_.

如果行列式中有两行(列)完全相同, 则此行列式值 \_\_\_\_\_.

如果行列式某行(列)的元素全为零, 则此行列式值 \_\_\_\_\_.

若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和, 如第  $i$  列的元素都是两数之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} =$$

把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数然后加到另一行(列)对应的元素上去, 行列式不变. 如, 将数  $k$  乘行列式的第  $j$  列加到第  $i$  列上, 有

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} (i \neq j).$$



## 作业 22

1

$$(1) \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (未写出的元素都是 0).}$$

$$(2) \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (未写出的元素都是 0).}$$

$$(3) \text{ 上三角形行列式 (当 } i > j \text{ 时, } a_{ij} = 0) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) \text{ 下三角形行列式 (当 } i < j \text{ 时, } a_{ij} = 0) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(5) n \text{ 阶行列式 } \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{nm} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} & d_{n1} & \cdots & d_{nm} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3

试用不同的方法计算行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$



## 作业 23

1 解释下列矩阵的特点,并写出一个 3 阶的例子。

单位矩阵

数量矩阵

零矩阵

对角矩阵

三角矩阵

对称矩阵

反对称矩阵

正交矩阵

2 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , 则称  $A^T = \begin{pmatrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & \cdots & \phantom{a_{1n}} \\ \phantom{a_{21}} & \phantom{a_{22}} & \cdots & \phantom{a_{2n}} \\ \phantom{a_{31}} & \phantom{a_{32}} & \cdots & \phantom{a_{3n}} \\ \phantom{a_{m1}} & \phantom{a_{m2}} & \cdots & \phantom{a_{mn}} \end{pmatrix}$  为  $A$  的转置矩阵.

如果两个矩阵的行数相等且列数也相等,则称它们是\_\_\_\_\_.

3 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  与  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  是同型矩阵,如果它们的对应元素相等,即  $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ , 则称矩阵  $A$  与  $B$  \_\_\_\_\_, 记为\_\_\_\_\_.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  是两个同型矩阵,则矩阵  $C =$  \_\_\_\_\_ 称为  $A$  和  $B$  的和,记为  $C =$  \_\_\_\_\_.

规定矩阵  $A$  与  $B$  的减法为  $A - B =$  \_\_\_\_\_, 即  $C = A - B = (c_{ij})_{m \times n} =$  \_\_\_\_\_.

4 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $k$  是一个数,则称矩阵  $C = kA = (c_{ij})_{m \times n}$  为数  $k$  与矩阵  $A$  的数量乘积,简称数乘,记为  $kA$ , 其中  $c_{ij} =$  \_\_\_\_\_.

5 设  $A = (a_{ij})$  是一个  $m \times s$  矩阵,  $B = (b_{ij})$  是一个  $s \times n$  矩阵,那么规定矩阵  $A$  与矩阵  $B$  的乘积是一个  $m \times n$  矩阵  $C = (c_{ij})$ , 其中  $c_{ij} =$  \_\_\_\_\_, 并把此乘积记作  $C =$  \_\_\_\_\_.

矩阵相乘必须:左边矩阵  $A$  的\_\_\_\_\_等于右边矩阵  $B$  的\_\_\_\_\_.

在矩阵乘积  $C = AB$  中,乘积  $C$  的行数\_\_\_\_\_相等, $C$  的列数与\_\_\_\_\_相等.



在矩阵的乘法中  $AB$  是矩阵  $A$  左乘  $B$  的乘积,  $BA$  是矩阵  $A$  右乘  $B$  的乘积. 当  $AB$  有意义时,  $BA$  不一定有意义. 当  $AB$  和  $BA$  都有意义时, 一般  $AB$            $BA$ .

**6** 设  $A, B, C$  都是  $m \times n$  矩阵, 则有

- (1) 加法交换律:  $A + B =$                  ;
- (2) 加法结合律:  $A + (B + C) =$                  ;
- (3) 零矩阵的作用:  $A + O = O + A =$                  ;
- (4) 负矩阵的作用:  $A + (-A) = (-A) + A =$                  ;
- (5) 数乘结合律:  $k(lA) = l(kA) =$                  ;
- (6) 数乘分配律:  $(k + l)A =$                  ,  $k(A + B) =$                  .
- (7) 乘法结合律:  $(AB)C =$                  ;
- (8) 乘法分配律:  $A(B + C) =$                  ,  $(B + C)A =$                  ;
- (9) 数乘结合律:  $\lambda(AB) = (\lambda A)B =$                   (其中  $\lambda$  为常数);
- (10) 单位矩阵的作用:  $E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n =$                  ;
- (11) 零矩阵的作用:  $OA = AO =$                  .

**7** 一个由  $n$  阶方阵  $A$  的元素按原来排列的形式构成的  $n$  阶行列式称为方阵  $A$  的行列式, 记作  $|A|$ .

设  $A, B$  为  $n$  阶方阵,  $\lambda$  为常数, 则由方阵  $A$  所确定的行列式  $|A|$  满足下述运算规律:

- (1)  $|A^T| =$                  ,  $|A^T + B^T| =$                   =                 ;
- (2)  $|\lambda A| =$                  ;
- (3)  $|AB| =$                  ;
- (4)  $|A^k| =$                  ;
- (5)  $|A^{-1}| =$                   (当  $A$  可逆时);
- (6) 设  $\alpha_i$  为三维列向量,  $\beta_i$  为三维行向量 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 则

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4| = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 + \beta_4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**8** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $k$  为正整数, 则定义  $A$  的  $k$  次幂为  $A^k =$                  .

当  $A$  可逆时,  $A^0 =$                  ,  $A^{-k} =$                  .



## 作业 24

1 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  是  $n$  阶方阵, 则由行列式  $|A|$  中各元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij}$  所构成的  $n$  阶矩阵  $A^* =$  \_\_\_\_\_ 称为矩阵  $A$  的伴随矩阵.

设  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 则  $A^* =$  \_\_\_\_\_.

2 (1) 任意  $n$  阶方阵  $A$  与它的伴随矩阵  $A^*$  之间有如下的关系:

$$AA^* = \text{_____} = \text{_____}.$$

(2)  $(kA)^* =$  \_\_\_\_\_ ( $k$  为常数,  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ ).

(3) 若  $|A| = 0$ , 则  $|A^*|$  \_\_\_\_\_, 若  $A$  是不可逆的矩阵, 则  $A^*$  也是不可逆的矩阵.

(4)  $|A^*| =$  \_\_\_\_\_ ( $A$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ ).

(5)  $(A^*)^* =$  \_\_\_\_\_ ( $A$  为任一  $n$  阶矩阵,  $n \geq 3$ ).

3 对于一个  $n$  阶方阵  $A$ , 如果有一个  $n$  阶方阵  $B$ , 使得 \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_  $= E$ , 则称矩阵  $A$  是 **可逆矩阵**, 并把  $B$  称为  $A$  的 **逆矩阵**,  $A$  的逆矩阵记为  $A^{-1}$ , 即  $B = A^{-1}$ .

方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$  (此时称方阵  $A$  为非奇异矩阵). 若  $|A| = 0$ , 则称方阵  $A$  为奇异矩阵.

4 (1) 若  $A$  可逆, 则  $A^{-1}$  也可逆, 且  $(A^{-1})^{-1} =$  \_\_\_\_\_;

(2) 若  $A$  可逆, 则  $|A^{-1}| =$  \_\_\_\_\_;

(3) 若  $A$  可逆, 数  $\lambda \neq 0$ , 则  $\lambda A$  可逆, 且  $(\lambda A)^{-1} =$  \_\_\_\_\_;

(4) 若  $A, B$  为  $n$  阶矩阵且均可逆, 则  $AB$  也可逆, 且  $(AB)^{-1} =$  \_\_\_\_\_.

5 计算下列矩阵的逆矩阵和伴随矩阵.

(1)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$



6

判断下列结论是否正确.

- (1) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 则  $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$ .
- (2)  $r(A) = r \Leftrightarrow A$  中至少存在一个  $r$  阶子式  $D_r(A) \neq 0$ , 且  $A$  中所有  $r+1$  阶子式全为 0.
- (3)  $A = O \Leftrightarrow r(A) = 0$ .
- (4) 由于非零矩阵至少有一个 1 阶子式不为零, 所以矩阵  $A \neq O \Leftrightarrow r(A) \geq 1$ .
- (5) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A$  为  $n$  阶满秩矩阵  $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$  为可逆矩阵.
- (6) 对于矩阵  $A \neq O, r(A) = 1 \Leftrightarrow A$  的各行元素对应成比例  $\Leftrightarrow A$  的各列元素对应成比例.
- (7)  $r(A) = r(A^T)$ .
- (8) 设  $A, B$  均为  $m \times n$  矩阵, 则  $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$ .
- (9)  $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) = r \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ .
- (10) 若  $P$  可逆, 则  $r(PB) = r(B)$ ; 若  $P$  可逆, 则  $r(AP) = r(A)$ .
- (11) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times p$  矩阵, 若  $AB = O$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$ .
- (12) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times p$  矩阵, 则  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ .
- (13) 设  $A$  是  $n(n \geq 2)$  阶矩阵, 则  $r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n, \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1, \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1. \end{cases}$



## 作业 25

1 设  $\alpha = (-1, 2, 4), \beta = (3, -6, -12)$ , 向量  $\beta$  是否可以由  $\alpha$  线性表出?

2 (1)  $n$  维向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示  $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \quad r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$ .

(2)  $n$  维向量  $\beta$  不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示  $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) \quad r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ .

(3)  $n$  维向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且表示式唯一  $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \quad r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = s$ .

(4)  $n$  维向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且表示式不唯一  $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \quad r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) < s$ .

3 若矩阵的列向量的维数  $m$  等于列向量的个数  $m$ , 则

行列式  $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m| \quad \Leftrightarrow$  向量组一定线性相关;

行列式  $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m| \quad \Leftrightarrow$  向量组一定线性无关.

当  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad$  时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关;

当  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad$  时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

4 当  $a$  为何值时, 向量组  $\alpha_1 = (2, -1, 5), \alpha_2 = (1, -3, a), \alpha_3 = (4, 7, -2)$  线性无关?



5 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 则向量组

- (A)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$  线性无关.  
(B)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关.  
(C)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关.  
(D)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关.

6 求向量组  $\alpha_1 = (3, 0, -1), \alpha_2 = (-2, 5, 4), \alpha_3 = (6, 15, 8)$  的一个极大线性无关组和它的秩.

7 求向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-1, -1, -4), \alpha_3 = (-3, 2, 3), \alpha_4 = (1, -1, 2)$  的一个极大线性无关组和它的秩.

8 判断向量组  $\alpha_1 = (3, 0, 2, -1), \alpha_2 = (-4, 2, 1, 3), \alpha_3 = (2, 5, 0, 1)$  是线性相关还是线性无关. 如果相关, 找出一个向量使得它可以由其余向量线性表出, 写出它的一种表达式.



## 作业 26

### 1 线性方程组的克拉默法则

若含有  $n$  个未知量、 $n$  个方程的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$  \_\_\_\_\_,

则方程组有唯一解: \_\_\_\_\_.

2 (1) 若系数行列式  $D = |A| = 0$ , 则方程组 \_\_\_\_\_.

(2) 如果线性方程组无解或有两个不同的解, 则它的系数行列式 \_\_\_\_\_.

3 设齐次线性方程组  $Ax = 0$  的系数矩阵  $A_{m \times n}$  的秩  $r(A) = r < n$ . 如果:

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$  是  $Ax = 0$  的解向量;

(2) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$  线性无关;

(3)  $Ax = 0$  的任何一个解都可由  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$  线性表示, 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$  称为  $Ax = 0$  的 \_\_\_\_\_, 且  $s =$  \_\_\_\_\_.

4 (1) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 则齐次线性方程组  $Ax = 0$  仅有零解的充分必要条件是  $r(A)$  \_\_\_\_\_.

(2) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 则齐次线性方程组  $Ax = 0$  有非零解的充分必要条件是  $r(A)$  \_\_\_\_\_.

特别地, 若  $m < n$ , 则  $Ax = 0$  必有 \_\_\_\_\_.

5 (1) 如果  $\xi_1, \xi_2$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的两个解向量, 则 \_\_\_\_\_ 也是  $Ax = 0$  的解向量.

(2) 如果  $\xi$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解向量, 则  $k\xi$  也是 \_\_\_\_\_ 的解向量, 其中  $k$  是任意常数.



(3) 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  都是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解向量, 则其线性组合  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_s\xi_s$  也是 \_\_\_\_\_ 解向量, 其中  $k_1, k_2, \dots, k_s$  是任意常数.

**6** 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解向量组的一个极大无关组, 则称  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系,  $Ax = 0$  的通解为  $x =$  \_\_\_\_\_.

- 7** (1) 若  $\xi_1, \xi_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 则  $\xi_1 - \xi_2$  是 \_\_\_\_\_ 的解.  
 (2) 若  $\xi$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 而  $\eta$  是对应的齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解, 则  $\xi + \eta$  是 \_\_\_\_\_ 的解.  
 (3) 若  $\xi_1, \xi_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 则  $\xi_1 + \xi_2$  是方程组 \_\_\_\_\_ 的解.  
 (4) 若  $\xi$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解,  $k$  为任意实数, 则  $k\xi$  是方程组 \_\_\_\_\_ 的解.

**8** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 其秩  $r(A) = r$ ,  $\beta$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的一个特解,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  是对应的齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 则方程组  $Ax = b$  的通解可表示为  $x =$  \_\_\_\_\_.

**9**  $a$  为何值时, 方程组 
$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases}$$
 有唯一解? 有无穷多个解?



## 作业 27

1 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$ . 若线性方程组  $Ax = \beta$  无解, 则

(A)  $a = 1, b \neq -6$ .

(B)  $a \neq 1, b \neq -6$ .

(C)  $a = 1, b = -6$ .

(D)  $a \neq 1, b = -6$ .

2 设  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

已知线性方程组  $Ax = \beta$  有 2 个不同的解, 求  $a$  的值和方程组  $Ax = \beta$  的通解.

3 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 = b \end{cases}$$

讨论  $a, b$  取何值时, 方程组无解、有唯一解和无穷多解, 并在方程组有无穷多解时, 求出通解.

4 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix}$ , 若存在 3 阶非零矩阵  $B$ , 使得  $AB = O$ .

(I) 求  $a$  的值;

(II) 求方程组  $Ax = 0$  的通解.



5

求方程组 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$
 的基础解系和通解.

6

已知  $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 2)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 4)^T$ ,  $\beta = (1, 0, a)^T$ , 问  $a$  为何值时,

(I)  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示;

(II)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 并写出一般表达式.

7

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

(I) 求方程组的通解;

(II) 求方程组满足条件  $x_1 = x_2$  的全部解.



## 作业 28

1

- (1) 上三角形矩阵、下三角形矩阵和对角形矩阵的特征值都是\_\_\_\_\_.
- (2)  $n$  阶数量矩阵  $aE$  的特征值全为\_\_\_\_\_, 且\_\_\_\_\_均为对应的特征向量.

2

设  $n$  阶方阵  $A$  的特征值为  $\lambda$ ,  $A$  的对应于特征值  $\lambda$  的特征向量为  $\alpha$ , 则

- (1)  $A^T$  的特征值为\_\_\_\_\_.
- (2) 对任意常数  $k$ , 矩阵  $kA$  的特征值为\_\_\_\_\_.
- (3) 若  $A$  可逆, 则  $A^{-1}$  的特征值为\_\_\_\_\_ ( $\lambda \neq 0$ ).
- (4) 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  的特征值为\_\_\_\_\_ ( $\lambda \neq 0$ ).
- (5) 对任意自然数  $k$ ,  $A^k$  的特征值为\_\_\_\_\_.
- (6) 设多项式  $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$ , 矩阵多项式  $\varphi(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m$ , 则矩阵多项式  $\varphi(A)$  的特征值为\_\_\_\_\_.
- (7)  $B = P^{-1}AP$  的特征值为\_\_\_\_\_.

3

设  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  是  $n$  阶方阵  $A$  的  $n$  个特征值 (有可能有相同的), 则

- (1)  $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n =$ \_\_\_\_\_.
- (2)  $\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n =$ \_\_\_\_\_.
- (3) 矩阵  $A$  的对应于不同的特征值的特征向量是\_\_\_\_\_, 特别地, 当矩阵  $A$  有  $n$  个不同的特征值时 (没有重根时),  $A$  有\_\_\_\_\_特征向量.

4

设  $n$  阶方阵  $A$  的特征值为  $\lambda$ ,  $A$  的对应于特征值  $\lambda$  的线性无关的特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ , 则  $A$  的对应于特征值  $\lambda$  的全部特征向量为  $\alpha =$ \_\_\_\_\_.

5

相似矩阵的性质: 若  $n$  阶方阵  $A$  与  $B$  相似, 则

- (1)  $|A| =$ \_\_\_\_\_;
- (2)  $r(A) =$ \_\_\_\_\_;
- (3)  $A$  与  $B$  有相同的\_\_\_\_\_;

6

设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 则

- (1)  $A$  必可对角化.



- (2)  $\mathbf{A}$  的特征值全是\_\_\_\_\_, 特征向量都是\_\_\_\_\_.
- (3)  $\mathbf{A}$  的对应于\_\_\_\_\_的特征向量必正交(也线性无关).
- (4)  $k$  重特征值必有  $k$  个线性无关的特征向量, 即  $r(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) =$  \_\_\_\_\_.

(5) 存在正交矩阵, 使\_\_\_\_\_ = 
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

7

设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & a \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ , 6 是  $\mathbf{A}$  的一个特征值.

- (I) 求  $a$  的值;
- (II) 求  $\mathbf{A}$  的全部特征值和特征向量.

8

设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- (I) 求可逆矩阵  $\mathbf{P}$  和对角矩阵  $\mathbf{\Lambda}$ , 使得  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ ;
- (II) 求  $\mathbf{A}^{101}$ .



## 作业 29

1 设  $A, B$  都是  $n$  阶方阵, 如果存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得 \_\_\_\_\_, 则称方阵  $A$  与  $B$  相似.

设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 如果存在可逆矩阵  $Q$ , 使得 \_\_\_\_\_, 则称  $A$  与  $B$  合同.

2 对比相似与合同的性质区别。

3 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 求正交矩阵  $Q$ , 使  $Q^T A Q$  为对角矩阵.

4 证明若  $A$  可逆, 那么  $AB \sim BA$ .



5

已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$  相似于对角矩阵.

(I) 求  $a$  的值;

(II) 求可逆矩阵  $P$  和对角矩阵  $\Lambda$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ .

6

已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  相似.

求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .

7

施密特正交化  $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 0, -1)$ .



## 作业 30

1 若二次型中只含有变量的平方项,即  $f = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2$ , 其中  $k_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  为实数, 则此二次型称为标准形, 它的矩阵形式为  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 其中  $\mathbf{A} =$  \_\_\_\_\_,  $\mathbf{x} =$  \_\_\_\_\_.

2 若标准形中系数  $k_i (1 \leq i \leq n)$  的取值为  $-1$  或  $0$  或  $1$ , 即  $f = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 (r \leq n)$ , 称此二次型为 \_\_\_\_\_.

3 把二次型  $f = 3x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$  表示为矩阵形式.

4 二次型  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ , 写出其标准形和规范形.

5 用配方法将二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$  化为标准形.



6

用正交变换法将二次型  $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$  化成标准形.

7

$n$  元实二次型正定的充分必要条件是:它的标准形的  $n$  个系数\_\_\_\_\_.

$n$  元实二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  正定的充分必要条件是  $\mathbf{A}$  的特征值\_\_\_\_\_.

8

判断下列二次型是否正定.

(1)  $f = 10x_1^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 2x_2^2 - 28x_2x_3 + x_3^2.$

(2)  $f = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$

9

证明矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  合同但不相似.

# 概率论与数理统计 (数学2不要求)



## 作业 31

**1** 乘法原理 完成某事要  $k$  个步骤, 每一步分别有  $n_1, n_2, \dots, n_k$  种方法, 则完成此事共有 \_\_\_\_\_ 种方法.

加法原理 完成某事有  $k$  类途径, 每一类分别有  $n_1, n_2, \dots, n_k$  种方法, 则完成此事共有 \_\_\_\_\_ 种方法.

排列  $n$  个不同元素按一定顺序排成一列, 称其为这  $n$  个元素的一个排列, 排列的全部个数记为 \_\_\_\_\_.

组合 从  $n$  个不同元素中任取  $m$  个元素 ( $0 < m \leq n$ ), 称其为一个组合, 组合的全部个数记为 \_\_\_\_\_.

**2** 假设样本空间  $\Omega$  已经给定, 而  $A, B$  等均表示  $\Omega$  中的一些事件. 请叙述下列表述的含义.

(1)  $A$  包含  $B$

(2)  $A, B$  相等

(3)  $A, B$  交(积)

(4)  $A, B$  互不相容(互斥)

(5)  $A, B$  并(和)

(6)  $A, B$  对立(互逆)

**3** 事件运算的法则

- (1) 交换律:  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_;
- (2) 结合律:  $(A \cup B) \cup C =$  \_\_\_\_\_,  $(A \cap B) \cap C =$  \_\_\_\_\_;
- (3) 分配律:  $(A \cup B) \cap C =$  \_\_\_\_\_,  $(A \cap B) \cup C =$  \_\_\_\_\_;
- (4) 对偶律(德摩根定理):  $\overline{A \cup B} =$  \_\_\_\_\_,  $\overline{A \cap B} =$  \_\_\_\_\_.
- $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} =$  \_\_\_\_\_;  $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} =$  \_\_\_\_\_.

- 4** 某单位有 90 人,其中有 65 人参加外语培训,72 人参加计算机培训,已知参加外语培训而没参加计算机培训的有 8 人,求参加计算机培训而没参加外语培训的人数.

- 5** 有两排座位,前排 6 个座位,后排 7 个座位.若安排 2 人就座,规定前排中间 2 个座位不能坐,且此 2 人始终不能相邻就座,求不同的坐法有多少种.



## 作业 32

### 1 概率性质

- (1) 非负性: 对任意一个事件  $A$ ,  $\underline{\hspace{1cm}} \leq P(A) \leq \underline{\hspace{1cm}}$  ;  
 (2) 规范性:  $P(\Omega) = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $P(\emptyset) = 0$  ;  
 (3) 有限可加性: 若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  互不相容, 则  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \underline{\hspace{1cm}}$ .

### 2 基本概率公式

- (1) 求逆公式: 对任一事件  $A$ , 有  $P(\bar{A}) = \underline{\hspace{1cm}}$ .  
 (2) 加法公式: 对任意两个事件  $A, B$ , 有  $P(A \cup B) = \underline{\hspace{1cm}}$ .  
 对任意三个事件  $A, B, C$ , 有  $P(A \cup B \cup C) = \underline{\hspace{1cm}}$ .  
 (3) 减法公式: 对任意两个事件  $A, B$ , 有  $P(A - B) = \underline{\hspace{1cm}}$ .  
 特别地, 若  $B \subset A$ , 则有  $P(A - B) = \underline{\hspace{1cm}}$ .

### 3 设 $A$ 与 $B$ 为两个事件, 若 $P(B) > 0$ , 则称 $P(A | B) = \underline{\hspace{1cm}}$ 为事件 $B$ 发生的条件下事件 $A$ 发生的条件概率.

条件概率的性质

- (1) 非负性:  $\underline{\hspace{1cm}}$  ;  
 (2) 规范性:  $\underline{\hspace{1cm}}$  ;  
 (3) 可列可加性: 若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  互不相容, 则  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \underline{\hspace{1cm}}$  ;  
 (4)  $P(\bar{A} | B) = \underline{\hspace{1cm}}$  ;  
 (5)  $P(A - C | B) = \underline{\hspace{1cm}}$  ;  
 (6)  $P(A_1 \cup A_2 | B) = \underline{\hspace{1cm}}$ .

### 4 乘法公式

- 若  $P(B) > 0$ , 则有  $P(AB) = \underline{\hspace{1cm}}$  ;  
 若  $P(A) > 0$ , 则有  $P(AB) = \underline{\hspace{1cm}}$  ;  
 若  $P(AB) > 0$ , 则有  $P(ABC) = \underline{\hspace{1cm}}$ .

### 5 某乒乓球男子单打决赛在甲、乙两名选手间进行, 比赛采用 7 局 4 胜制, 已知每局比赛甲选手战胜乙选手的概率均为 0.7, 求甲选手以 4:1 战胜乙选手的概率.



6

在 36 人中,血型情况如下:A 型 12 人,B 型 10 人,AB 型 8 人,O 型 6 人.若从中随机选出两人,求两人血型相同的概率.

7

某装置的启动密码是由 0~9 中的 3 个不同数字组成,连续 3 次输入错误密码,就会导致该装置关闭,求一个仅记得密码是由 3 个不同数字组成的人能够启动此装置的概率.

8

一袋子中有 4 只球,编号为 1,2,3,4,从袋子中一次取出 2 只球,用  $X$  表示取出的 2 只球的最大号码数,求  $P\{X=4\}$ .



## 作业 33

1 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $n$  个事件, 满足

(1) \_\_\_\_\_;

(2) \_\_\_\_\_,

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为样本空间  $\Omega$  的一个分割, 也称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为完备事件组.

全概率公式 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为完备事件组,  $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 那么对任一事件  $B$ , 有  $P(B) =$  \_\_\_\_\_.

贝叶斯公式 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为完备事件组, 那么对任一事件  $B$ , 若  $P(B) > 0, P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 则有  $P(A_k | B) =$  \_\_\_\_\_.

若事件  $A$  及  $B$  满足  $P(AB) =$  \_\_\_\_\_, 则称事件  $A$  与  $B$  相互独立.

若  $P(A) = 0$ , 则事件  $A$  与 \_\_\_\_\_ 相互独立.

对事件  $A, B, C$ , 若下列四个式子同时成立:

$P(AB) =$  \_\_\_\_\_,  $P(AC) =$  \_\_\_\_\_,  $P(BC) =$  \_\_\_\_\_,

$P(ABC) =$  \_\_\_\_\_,

则称事件  $A, B, C$  相互独立.

如果事件  $A, B, C$  相互独立, 则 \_\_\_\_\_ 也必相互独立.

三个事件  $A, B, C$  两两相互独立, \_\_\_\_\_.

若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立, 则其中任意少于 \_\_\_\_\_ 个事件也必相互独立.

若事件  $A$  与  $B$  相互独立, 则事件 \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ 也分别相互独立.

若三个事件  $A, B, C$  相互独立, 则任意两个事件的 \_\_\_\_\_ 与 \_\_\_\_\_ 是相互独立的.

2 在重复独立试验中, 如果每次试验都只有两个可能结果, 记为  $A$  和  $\bar{A}$ , 且在每次试验中事件  $A$  发生的概率  $P(A) = p (0 < p < 1)$  保持不变, 将这样的试验重复进行  $n$  次, 则称为 \_\_\_\_\_, 此类试验的概率模型称为 \_\_\_\_\_.

对于此概型, 事件  $A$  在每次试验中发生的概率  $P(A) = p (0 < p < 1)$ , 则在  $n$  次独立试验中恰好发生  $k$  次的概率为  $P\{n = k\} =$  \_\_\_\_\_.

3 随机变量的分类

(1) 离散型随机变量: \_\_\_\_\_.

(2) 连续型随机变量: \_\_\_\_\_.

(3) 奇异型随机变量: \_\_\_\_\_.



#### 4 分布函数

设  $X$  是一个随机变量,  $x$  是任意实数, 概率\_\_\_\_\_是  $x$  的函数, 称此函数为随机变量  $X$  的分布函数, 记为  $F(x)$ .

分布函数的性质

- (1) \_\_\_\_\_  $\leq F(x) \leq$  \_\_\_\_\_,  $\forall x \in \mathbf{R}$ ;
- (2) 若  $x_1 < x_2$ , 则  $F(x_1)$  \_\_\_\_\_  $F(x_2)$ , 即\_\_\_\_\_;
- (3)  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) =$  \_\_\_\_\_,  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) =$  \_\_\_\_\_;
- (4)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) =$  \_\_\_\_\_,  $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ , 即\_\_\_\_\_连续.

分布函数一定具有以上四个基本性质. 反之, 若某一个函数  $F(x)$  具有以上四个基本性质, 则  $F(x)$  一定可作为某一个随机变量的分布函数.

#### 5 分布函数与事件的概率

- (1)  $P\{X \leq b\} =$  \_\_\_\_\_;
- (2) \_\_\_\_\_  $= F(b-0) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ ;
- (3)  $P\{X = b\} =$  \_\_\_\_\_;
- (4) \_\_\_\_\_  $= 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a)$ ;
- (5)  $P\{X \geq a\} =$  \_\_\_\_\_;
- (6) \_\_\_\_\_  $= F(b) - F(a)$ ;
- (7)  $P\{a < X < b\} =$  \_\_\_\_\_;
- (8) \_\_\_\_\_  $= P\{a < X < b\} + P\{X = a\} = F(b-0) - F(a-0)$ ;
- (9)  $P\{a \leq X \leq b\} =$  \_\_\_\_\_.

#### 6 设 $A_1, A_2, A_3$ 为 3 个随机事件, 下列结论中正确的是

- (A) 若  $A_1, A_2, A_3$  相互独立, 则  $A_1, A_2, A_3$  两两独立.
- (B) 若  $A_1, A_2, A_3$  两两独立, 则  $A_1, A_2, A_3$  相互独立.
- (C) 若  $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ , 则  $A_1, A_2, A_3$  相互独立.
- (D) 若  $A_1$  与  $A_2$  独立,  $A_2$  与  $A_3$  独立, 则  $A_1$  与  $A_3$  独立.



## 作业 34

**1** 设离散型随机变量  $X$  的所有可能取值为  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , 且  $p_k$  是  $X$  取  $x_k$  的概率,  $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ , 即  $P\{X = x_k\} = \underline{\hspace{2cm}}$ , 则称上式为离散型随机变量  $X$  的概率分布或分布律, 通常还可以表示为

|     |                            |                            |         |                            |         |
|-----|----------------------------|----------------------------|---------|----------------------------|---------|
| $X$ | $x_1$                      | $x_2$                      | $\dots$ | $x_n$                      | $\dots$ |
| $P$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ | $\dots$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ | $\dots$ |

概率分布的性质

(1)  $p_k \geq \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ ;

(2)  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \underline{\hspace{1cm}}$ .

概率分布一定具有以上两个基本性质. 反之, 若一个数列  $\{p_k\} (k = 1, 2, \dots, n, \dots)$  具有以上两个性质, 则  $\{p_k\} (k = 1, 2, \dots, n, \dots)$  一定可作为某一个离散型随机变量的概率分布.

**2** 设  $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots$ , 且  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ , 则

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{i: x_i \leq x} p_i = \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}}, \\ \underline{\hspace{2cm}}, \\ \underline{\hspace{2cm}}, \\ \vdots \\ \underline{\hspace{2cm}}, \\ \vdots \end{cases}$$

设分布函数  $F(x)$  如上式所示, 则  $\begin{cases} p_i = \underline{\hspace{2cm}}, \\ p_1 = \underline{\hspace{2cm}}. \end{cases}$

**3** 写出下列分布的概率分布或分布函数.

0-1 分布

二项分布

几何分布

泊松(Poisson) 分布



4

设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 若存在非负可积函数  $f(x)$ , 使得对任意的实数  $x$ , 有 \_\_\_\_\_, 则称  $X$  为连续型随机变量, 其中  $f(x)$  称为连续型随机变量  $X$  的概率密度函数, 简称密度函数或概率密度.

概率密度的性质.

(1) \_\_\_\_\_;

(2) \_\_\_\_\_.

概率密度  $f(x)$  一定具有以上两个基本性质. 反之, 若函数  $f(x)$  具有以上两个性质, 则  $f(x)$  一定可作为某一个连续型随机变量的概率密度.

连续型随机变量的性质

(1) 设  $F(x)$  为连续型随机变量  $X$  的分布函数, 则  $F(x)$  \_\_\_\_\_;

(2) 若  $X$  是连续型随机变量, 则对任意实数  $a$ , 有  $P\{X = a\} =$  \_\_\_\_\_.

5

设  $X$  为连续型随机变量, 其概率密度  $f_X(x)$  已知, 又  $Y = g(X)$ , 此时,  $Y$  可能是离散型的, 也可能是连续型的. 求  $Y$  的密度函数  $f_Y(y)$ . 一般有两种方法: \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_.

设  $X$  为连续型随机变量, 其概率密度  $f_X(x)$  已知, 又  $Y = g(X)$ , 要求  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ , 先求  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ , 即  $F_Y(y) =$  \_\_\_\_\_, 然后再把  $F_Y(y)$  对  $y$  求导, 即得  $f_Y(y) =$  \_\_\_\_\_.

设  $X$  是一个连续型随机变量, 其概率密度为  $f_X(x)$ , 又函数  $y = g(x)$  严格单调, 其反函数  $h(y)$  有连续导数, 则  $Y = g(X)$  的密度函数为  $f_Y(y) =$  \_\_\_\_\_.

6

写出下列分布的密度函数或分布函数.

均匀分布

正态分布

指数分布



## 作业 35

**1** 设  $(X, Y)$  是一个二维随机变量,  $x, y$  是两个任意实数, 记  $F(x, y) =$  \_\_\_\_\_, 称二元函数  $F(x, y)$  为  $(X, Y)$  的联合分布函数, 或称为  $(X, Y)$  的分布函数.

分布函数的性质.

(1) \_\_\_\_\_  $\leq F(x, y) \leq$  \_\_\_\_\_,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ;

(2)  $F(x, y)$  对每个自变量都是单调不减, 对任意固定的  $y$ , 当  $x_2 > x_1$  时, \_\_\_\_\_; 对任意固定的  $x$ , 当  $y_2 > y_1$  时, \_\_\_\_\_;

(3) 对一切实数  $x$  和  $y$ , 则有  $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) =$  \_\_\_\_\_,  $F(+\infty, +\infty) =$  \_\_\_\_\_;

(4)  $F(x, y)$  对每个自变量都是 \_\_\_\_\_ 连续的, 即  $F(x, y) = F(x+0, y)$ ,  $F(x, y) = F(x, y+0)$ ;

(5) 对一切实数  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ , 有  $F(x_2, y_2) -$  \_\_\_\_\_  $- F(x_2, y_1) +$  \_\_\_\_\_  $\geq 0$ .  
任何一个联合分布函数  $F(x, y)$  一定具有以上五个基本性质.

**2** 由  $(X, Y)$  的联合分布函数  $F(x, y)$ , 可以得到随机变量  $X$  和  $Y$  各自的分布函数, 即:

$F_X(x) =$  \_\_\_\_\_;

$F_Y(y) =$  \_\_\_\_\_.

我们把  $F_X(x), F_Y(y)$  分别称为  $(X, Y)$  关于  $X, Y$  的 \_\_\_\_\_.

**3** 设  $F(x, y)$  为二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数,  $F_X(x), F_Y(y)$  分别为二维随机变量  $(X, Y)$  的两个边缘分布函数. 若对于任意实数  $x, y$ , 有  $F(x, y) =$  \_\_\_\_\_, 则称随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 否则称随机变量  $X$  与  $Y$  不独立.

若二维随机变量  $(X, Y)$  的所有可能取值是有限对或可列无限多对, 则称  $(X, Y)$  为二维 \_\_\_\_\_ 随机变量.

设  $(X, Y)$  的所有可能取值为  $(x_i, y_j), i = 1, \dots, m, \dots, j = 1, \dots, n, \dots$ , 则称  $p_{ij} =$  \_\_\_\_\_, 为二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率分布, 也可称为  $(X, Y)$  的联合分布律.

联合概率分布的性质.

(1) \_\_\_\_\_;

(2) \_\_\_\_\_.

联合概率分布一定具有以上两个基本性质.

由  $(X, Y)$  的联合分布律可求得它的分布函数  $F(x, y)$ ,

$F(x, y) =$  \_\_\_\_\_.



已知  $(X, Y)$  的联合概率分布为  $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i = 1, \dots, m, \dots, j = 1, \dots, n, \dots$ , 则  $X$  的概率分布为  $P\{X = x_i\} =$  \_\_\_\_\_.

$Y$  的概率分布为  $P\{Y = y_j\} =$  \_\_\_\_\_.

将二维离散型随机变量  $(X, Y)$  中

$X$  的概率分布  $p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, \dots, m, \dots$  称为  $(X, Y)$  关于  $X$  的 \_\_\_\_\_,

$Y$  的概率分布  $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, \dots, n, \dots$  称为  $(X, Y)$  关于  $Y$  的 \_\_\_\_\_.

**4** 若二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率分布为  $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i = 1, \dots, m, \dots, j = 1, \dots, n, \dots$ . 对于给定的  $j$ , 如果  $P\{Y = y_j\} > 0, j = 1, 2, \dots, n, \dots$ , 则称  $P\{X = x_i | Y = y_j\} =$  \_\_\_\_\_ 为在  $Y = y_j$  的条件下随机变量  $X$  的条件概率分布.

对于给定的  $i$ , 如果  $P\{X = x_i\} > 0, i = 1, 2, \dots, m, \dots$ , 则称  $P\{Y = y_j | X = x_i\} =$  \_\_\_\_\_ 为在  $X = x_i$  的条件下随机变量  $Y$  的条件概率分布.

设二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率分布为  $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i = 1, \dots, m, \dots, j = 1, \dots, n, \dots$ , 若对于任意的正整数  $i, j$ , 有  $P\{X = x_i, Y = y_j\} =$  \_\_\_\_\_, 则称离散型随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 否则称  $X$  与  $Y$  不独立.

**5** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数为  $F(x, y)$ , 若存在非负可积二元函数  $f(x, y)$ , 使得对任意实数  $x, y$  有  $F(x, y) =$  \_\_\_\_\_, 则称  $(X, Y)$  为二维连续型随机变量, 称  $f(x, y)$  为二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度或  $X$  与  $Y$  的联合密度函数, 简称概率密度.

概率密度的性质.

(1) \_\_\_\_\_;

(2) \_\_\_\_\_.

**6**  $X$  的概率密度  $f_X(x) =$  \_\_\_\_\_ 称为二维连续型随机变量  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘概率密度;  $Y$  的概率密度  $f_Y(y) =$  \_\_\_\_\_ 称为二维连续型随机变量  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘概率密度.

**7** 若二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y)$ . 对于给定的实数  $y$ , 如果  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y) > 0$ , 则称  $f_{X|Y}(x | y) =$  \_\_\_\_\_ 为在  $Y = y$  的条件下随机变量  $X$  的条件概率密度. 对于给定的实数  $x$ , 如果  $X$  的边缘概率密度  $f_X(x) > 0$ , 则称  $f_{Y|X}(y | x) =$  \_\_\_\_\_ 为在  $X = x$  的条件下随机变量  $Y$  的条件概率密度.



## 作业 36

1 设  $G$  是平面  $xOy$  上的一个有界区域, 其面积记为  $S_G (> 0)$ . 若二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$  则称  $(X, Y)$  在区域  $G$  上服从二维均匀分布.

若二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $G$  上服从二维均匀分布, 且  $D \subset G$ , 则  $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2 若二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $G$  上服从二维均匀分布,  $G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  时的联合密度函数  $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3 若二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ , 则称  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 记作  $(X, Y) \sim \underline{\hspace{2cm}}$ .

4 填写下列表格空白处.

| 常用重要分布                  | 期望 | 方差 |
|-------------------------|----|----|
| 0-1 分布 $B(1, p)$        |    |    |
| 二项分布 $B(n, p)$          |    |    |
| 几何分布 $G(p)$             |    |    |
| 超几何分布 $H(M, N, n)$      |    |    |
| 泊松分布 $P(\lambda)$       |    |    |
| 均匀分布 $U(a, b)$          |    |    |
| 指数分布 $E(\lambda)$       |    |    |
| 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ |    |    |



5

设离散型随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots, n, \dots$ . 若级数

$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$  绝对收敛, 则称该级数的和为随机变量  $X$  的 \_\_\_\_\_ (简称 \_\_\_\_\_), 记作  $E(X)$ .

当随机变量  $X$  的可能取值为有限个  $x_1, x_2, \dots, x_n$  时,  $E(X) =$  \_\_\_\_\_.

设  $X$  为连续型随机变量, 其概率密度为  $f(x)$ . 若积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  绝对收敛, 则称  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  为随机变量  $X$  的 \_\_\_\_\_ (或简称 \_\_\_\_\_), 记作  $E(X)$ .

6

设离散型随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots, n, \dots, Y = g(X)$  为随机变量  $X$  的函数, 则随机变量  $Y = g(X)$  的数学期望为  $E(Y) =$  \_\_\_\_\_.

设连续型随机变量  $X$  的概率密度为  $f_X(x)$ ,  $Y = g(X)$  为随机变量  $X$  的函数, 则随机变量  $Y = g(X)$  的数学期望为  $E(Y) =$  \_\_\_\_\_.

7

设随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 即  $X \sim P(\lambda)$ , 求  $Y = X^2$  的数学期望  $E(Y)$ .

8

设  $X$  服从均匀分布, 即  $X \sim U(a, b)$ , 求  $Y = X^2$  的数学期望.



## 作业 37

### 1 随机变量数学期望的性质, (假设数学期望均存在)

- (1) 设  $C$  为常数, 则  $E(C) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (2) 设  $a, b$  为常数,  $X$  为随机变量, 则  $E(aX + b) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (3) 设  $X, Y$  是两个随机变量, 则  $E(X \pm Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

可推广为:  $E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ , 其中  $c_i (i = 1, \dots, n)$  为常数.

- (4) 设  $X, Y$  是两个随机变量, 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $E(XY) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 可推广为: 若  $X_1, \dots, X_n$  相互独立, 则  $E(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 2 设 $X$ 是一个随机变量, 若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 则称 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 为 $X$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ , 记为 $D(X)$ 或 $\text{Var}(X)$ , 即 $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$ . 平方根 $\sqrt{D(X)}$ 称为 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

若  $X$  为离散型随机变量, 其概率分布为  $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots, n, \dots$ , 按定义有  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

若  $X$  为连续型随机变量, 其概率密度为  $f(x)$ , 则定义有  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 3 随机变量方差的性质 (假设方差均存在).

- (1) 设  $C$  为常数, 则  $D(C) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $D(X + C) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (2) 设  $a, b$  为常数,  $X$  为随机变量, 则  $D(aX + b) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (3) 设  $X$  与  $Y$  是两个相互独立的随机变量, 则有  $D(X \pm Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

可推广为: 若  $X_1, \dots, X_n$  相互独立,  $D\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ , 其中  $c_i (i = 1, \dots, n)$  为常数.

### 4 证明: $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .



5

设  $(X, Y)$  是一个二维随机变量, 且  $E(X), E(Y)$  存在. 如果  $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$  存在, 则称  $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$  为  $X$  与  $Y$  的 \_\_\_\_\_, 记为  $\text{Cov}(X, Y)$ , 即  $\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ .

计算公式:  $\text{Cov}(X, Y) =$  \_\_\_\_\_.

当  $X = Y$  时, 有  $\text{Cov}(X, X) =$  \_\_\_\_\_.

6

协方差的性质

(1)  $\text{Cov}(X, Y) =$  \_\_\_\_\_;

(2)  $\text{Cov}(aX, bY) =$  \_\_\_\_\_, 其中  $a, b$  为任意常数;

(3)  $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) =$  \_\_\_\_\_;

(4) 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $\text{Cov}(X, Y) =$  \_\_\_\_\_.

(5) 若  $X$  与  $Y$  的方差存在, 则  $D(X \pm Y) =$  \_\_\_\_\_.

7

设  $(X, Y)$  为二维随机变量, 且  $X$  和  $Y$  的方差均存在且为正,  $\rho_{XY} =$  \_\_\_\_\_ 称为  $X$  与  $Y$  的相关系数.

8

相关系数的性质

(1) \_\_\_\_\_;

(2) \_\_\_\_\_;

(3)  $|\rho_{XY}| = 1$  的充分必要条件是存在常数  $a, b$  使 \_\_\_\_\_.

9

若相关系数  $\rho_{XY} =$  \_\_\_\_\_, 称  $X$  与  $Y$  不相关. 两个随机变量  $X$  与  $Y$  不相关的充分必要条件是  $\text{Cov}(X, Y) =$  \_\_\_\_\_.

若随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $X$  与  $Y$  \_\_\_\_\_; 反之, 随机变量  $X$  与  $Y$  \_\_\_\_\_, 则  $X$  与  $Y$  不一定相互独立.

若二维随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布  $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ ,  $X$  与  $Y$  不相关的充分必要条件是 \_\_\_\_\_.

10

设随机变量  $X \sim B(n, p)$ , 证明  $X$  的方差  $D(X) = np(1 - p)$ .



## 作业 38

1 设随机变量  $X$  服从参数为 1 的指数分布, 求数学期望  $E(X + e^{-2X})$ .

2 (切比雪夫不等式) 设随机变量  $X$  的期望  $E(X)$  及方差  $D(X)$  存在, 则对任意小的正数  $\epsilon$ , 有  $P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq$  \_\_\_\_\_.

3 伯努利(Bernoulli) 大数定律  
 设  $m$  是  $n$  次独立重复试验中事件  $A$  发生的次数, 每次试验中事件  $A$  发生的概率为  $p$ , 则对于任意正数  $\epsilon$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \epsilon\right\} =$  \_\_\_\_\_, 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \epsilon\right\} =$  \_\_\_\_\_.

4 辛钦(Khinchine) 大数定律  
 设随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  \_\_\_\_\_, 且 \_\_\_\_\_, 则对于任意正数  $\epsilon$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \epsilon\right\} = 1$ , 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \epsilon\right\} = 0$ .

5 列维 — 林德伯格(Levy — Lindberg) 定理  
 设随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立同分布, 且 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_, 则对于任意实数  $x$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \Phi(x)$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布的分布函数.

6 在统计学中, 常把研究对象的全体称为 \_\_\_\_\_, 而把其中的每个元素称为 \_\_\_\_\_.  
 从总体  $X$  中, 随机地抽取  $n$  个个体, 这  $n$  个个体的指标分别为  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 称  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体  $X$  的一个 \_\_\_\_\_,  $n$  称为 \_\_\_\_\_.



7

样本中的每个  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是一个随机变量, 从而可以把容量为  $n$  的样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  看作一个  $n$  维随机变量. 在一次抽样以后, 观测到的  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的一组确定的值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  称作容量为  $n$  的样本的 \_\_\_\_\_, 又称 \_\_\_\_\_, 此  $x_1, x_2, \dots, x_n$  可以看作随机实验的一个结果.

8

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自某总体  $X$  的一个容量为  $n$  的样本, 若样本函数  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  中不含任何未知参数, 则称  $T$  为 \_\_\_\_\_. “不含任何未知参数” 是指在获得了样本的观测值  $x_1, \dots, x_n$  后, 代入  $T$  中立即可以算出  $t = T(x_1, \dots, x_n)$ .

9

设样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  来自总体  $X$ ,  
则称统计量  $\bar{X} =$  \_\_\_\_\_ 为样本均值. 当获得了样本观测值  $x_1, \dots, x_n$  代入  $\bar{X}$ , 可求得样本均值的观测值  $\bar{x} =$  \_\_\_\_\_, 亦简称样本均值.  
则称统计量  $S^2 =$  \_\_\_\_\_ 为样本方差, \_\_\_\_\_ 称为样本标准差. 把观测值代入  $S^2$ , 可得样本方差的观测值  $s^2 =$  \_\_\_\_\_, 亦简称其为样本方差.

10

$$\text{证明: } S^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2 \right).$$

11

$\chi^2$  分布

设  $X_1, \dots, X_n$  是相互独立且服从 \_\_\_\_\_ 的随机变量, 则称随机变量  $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$  服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布, 记作  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ .

设  $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $X_1$  和  $X_2$  相互独立, 则  $X_1 + X_2 \sim$  \_\_\_\_\_.

设  $X \sim \chi^2(n)$ , 则  $E(X) =$  \_\_\_\_\_,  $D(X) =$  \_\_\_\_\_.

设  $X_1, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 且  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,

则 (1)  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim$  \_\_\_\_\_;

(2)  $\bar{X}$  与  $S^2$  \_\_\_\_\_.



## 作业 39

### 1 $t$ 分布

设  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则称随机变量  $T = \underline{\hspace{2cm}}$  服从自由度为  $n$  的  $t$  分布, 记作  $T \sim t(n)$ .

设  $T \sim t(n)$ , 则  $E(T) = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $n > 1$ ),  $D(T) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

设  $X_1, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本,  $\bar{X}$  和  $S$  分别表示样本均值和样本标准差, 则  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ .

设  $X_1, \dots, X_m$  和  $Y_1, \dots, Y_n$  是分别来自正态总体  $N(\mu_1, \sigma^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma^2)$  的两个独立样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$ ,  $S_X^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$ ,  $S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2$ ,  $S_W^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}$ , 则  $T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 2 $F$ 分布

设  $X \sim \chi^2(m)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则称随机变量  $F = \underline{\hspace{2cm}}$  服从自由度为  $(m, n)$  的  $F$  分布, 其中  $m$  称为第一自由度,  $n$  称为第二自由度, 记作  $F \sim F(m, n)$ .

设  $X \sim F(m, n)$ , 则  $\frac{1}{X} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ ;

设  $X \sim F(m, n)$ , 则  $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

设  $X_1, \dots, X_m$  是来自正态总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  的一个样本,  $Y_1, \dots, Y_n$  是来自正态总体  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的一个样本, 且  $X_1, \dots, X_m$  与  $Y_1, \dots, Y_n$  相互独立, 则  $F = \underline{\hspace{2cm}} \sim F(m-1, n-1)$ .

### 3 矩估计法

若总体  $X$  中包含  $k$  个未知参数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ , 且总体  $X$  的  $k$  阶原点矩  $E(X^k)$  都存在, 则可建立方程组

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E(X), \\ A_2 = \underline{\hspace{2cm}}, \\ \vdots \\ A_k = \underline{\hspace{2cm}}. \end{cases}$$

方程的右端包含未知参数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ , 方程组是  $k$  个未知量  $k$  个方程, 可以从中解得  $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , 就是未知参数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  的矩估计量.



#### 4 最大似然估计法

总体  $X$  为连续型随机变量, 设其概率密度为  $f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ , 其中  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  为未知参数.

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为总体的一个样本, 称  $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  为样本的 \_\_\_\_\_.

若  $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  在  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$  处取到最大值, 则  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$  分别为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  的 \_\_\_\_\_, 相应的统计量称为 \_\_\_\_\_.

#### 5 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中参数 $\mu$ 已知, 考虑 $\sigma^2$ 的如下两个估计:

$$(1) S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \quad (2) S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

试讨论  $S_1^2$  和  $S_2^2$  的期望和方差.

#### 6 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , $\mu, \sigma^2$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自 $X$ 的简单随机样本, 求 $\mu, \sigma^2$ 的矩估计量.

#### 7 设 $X_1, \dots, X_n$ 是从区间 $[0, a]$ 上均匀分布的总体中抽出的样本, 求 $a$ 的估计量和最大似然估计量.