

寒假作业参考答案

寒假作业中的练习题,多数没有确定答案,只要合理,多是正确的。

作业 1

1. 略

2. (1)65 (2)50 (3)57 (4)82 (5)7 (6)216 (7) $\frac{57}{28}$ (8)1 (9)0.287 (10) $\frac{15}{19}$

3. (1)3.141 (2)2.718 (3)1.414 (4)1.732

4. (1) $a^2 \pm 2ab + b^2$

(2) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

(3) $(a+b)(a-b)$

(4) $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

(5) $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

(6) $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})$

(7) $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

(8) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

(9) $a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3a^2b + 3bc^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3a^2c + 6abc$

(10) $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

(11) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

(12) $(x+a)(x+b)$

5.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$
0	0	1	0	不存在	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{2}$	1	0	不存在	0	不存在
π	0	-1	0	不存在	-1

作业 2

1. 非空实数集,函数,函数值,定义域,值域;定义域、对应法则.

2. 以下意思表达正确即可.

(1) 设 a 为任意实数, $\delta > 0$ 为很小的实数.

点 a 的 δ 邻域为 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$.

点 a 的 δ 无心邻域为 $U^o(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

点 a 的 δ 右邻域为 $U_+(a, \delta) = [a, a + \delta)$.

点 a 的 δ 左邻域为 $U_-(a, \delta) = (a - \delta, a]$.

有心,无心的区别就是无心邻域不包含点 a .

(2) 设函数 f 的定义域为区间 I , $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 f 为单调增加(或减少)函数.

若不等号 $\leq$ (或 $\geq$) 改为 $<$ (或 $>$), 则称 f 为严格单调增加(或减少)函数.

(3) 设函数 f 的定义域 D 关于原点对称, $\forall x \in D$, 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 f 为奇函数; 若 $f(-x) = f(x)$, 则称 f 为偶函数.

(4) 设函数 f 的定义域为区间 I , 若存在非零实数 $T \in \mathbf{R}$, 使得 $x + T \in I$, 且 $f(x + T) = f(x)$, 则称 f 为周期函数, T 为函数 f 的周期.

把最小正周期(如果存在)称为函数的周期.

(5) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在 M , 使得 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 有上界; 如果存在 m , 使得 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \geq m$, 则称函数 $f(x)$ 有下界.

如果存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \in D$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 有界.

函数 $f(x)$ 有界的充要条件是函数 $f(x)$ 既有上界又有下界.

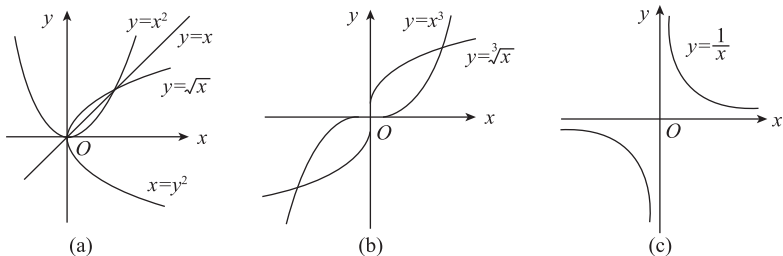
3. $[-1, 1]$.

$$4. f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

5. 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数;

有限次、四则运算及复合、一个式子

6. (1) 定义域、值域随 u 的值不同而不同, 当 $x > 0$ 时, 幂函数都有定义.



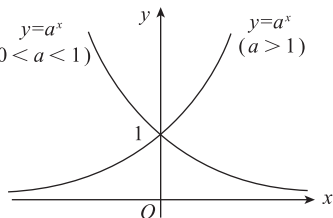
(2) 定义域: $(-\infty, +\infty)$; 值域: $(0, +\infty)$.

单调性: $a > 1$ 时, $y = a^x$ 单调增加; $a < 1$ 时, $y = a^x$ 单调减少.

常用的指数函数: $y = e^x, y = 2^x$.

极限: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty. (0 < a < 1)$

特殊函数值: $a^0 = 1, e^0 = 1$.



作业 3

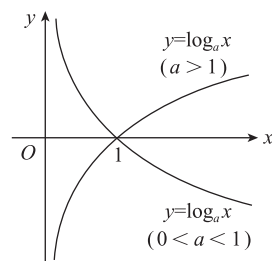
(3) 定义域: $(0, +\infty)$; 值域: $(-\infty, +\infty)$.

单调性: $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调增加; $a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调减少.

常用的对数函数: $y = \ln x$ (自然对数; $\ln x = \log_e x, e = 2.71828\cdots$).

极限: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

常用公式: $x = e^{\ln x}, u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$.

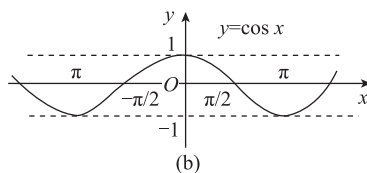
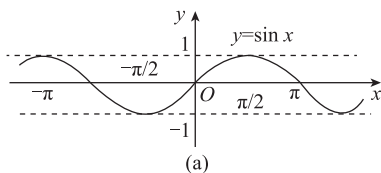


(4) ① 定义域: $(-\infty, +\infty)$; 值域: $[-1, 1]$.

奇偶性: $y = \sin x$ 是奇函数, $y = \cos x$ 是偶函数.

周期性: $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 均以 2π 为周期.

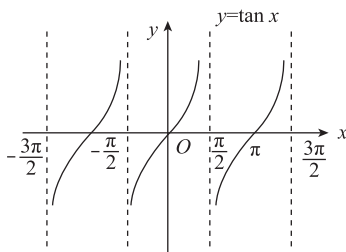
有界性:在其定义域内有界,即 $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$.



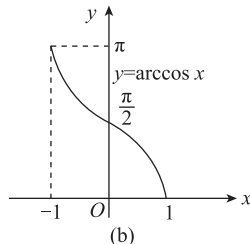
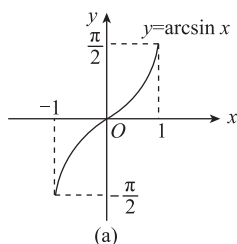
② $y = \tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 的一切实数.

奇偶性:奇函数.

周期性:以 π 为周期.



(5) ① 定义域: $[-1, 1]$.



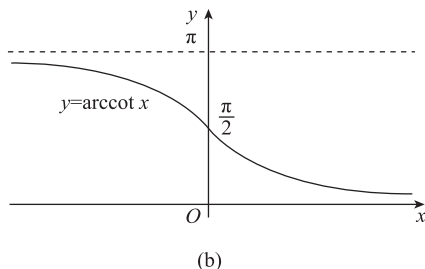
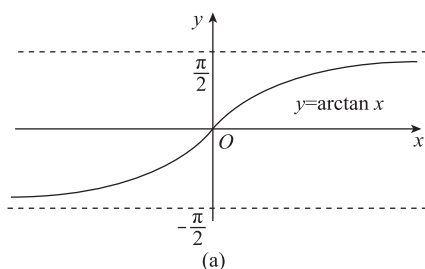
值域: $y = \arcsin x$ 的值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y = \arccos x$ 的值域为 $[0, \pi]$.

单调性: $y = \arcsin x$ 单调增加, $y = \arccos x$ 单调减少.

奇偶性: $y = \arcsin x$ 为奇函数.

两个函数在其定义域内有界: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \arccos x \leq \pi$.

② 定义域: $(-\infty, +\infty)$. 值域: $y = \arctan x$ 的值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y = \operatorname{arccot} x$ 的值域为 $(0, \pi)$.



单调性: $y = \arctan x$ 单调增加, $y = \operatorname{arccot} x$ 单调减少.

奇偶性: $y = \arctan x$ 为奇函数.

两个函数在其定义域内有界: $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, 0 < \operatorname{arccot} x < \pi$.

反三角函数的规律

$$\sin(\arcsin x) = \underline{x}, x \in \underline{[-1, 1]}. \quad \arcsin x + \arccos x = \underline{\frac{\pi}{2}}, x \in \underline{[-1, 1]}.$$

$$\cos(\arccos x) = \underline{x}, x \in \underline{[-1, 1]}. \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \underline{\frac{\pi}{2}}, x \in \underline{(-\infty, +\infty)}.$$

$$\arcsin(\sin x) = \underline{x}, x \in \underline{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}. \quad \arcsin(-x) = \underline{-\arcsin x}, x \in \underline{[-1, 1]}.$$

$$\arccos(\cos x) = \underline{x}, x \in \underline{[0, \pi]}. \quad \arccos(-x) = \underline{\pi - \arccos x}, x \in \underline{[-1, 1]}.$$

作业 4

1. 略.

2. 复合函数、 $\{x \mid x \in D_\varphi, \varphi(x) \in D_f\}$ 、中间变量、自变量

3. C

$$4. f[\varphi(x)] = \begin{cases} 2x^2 - 2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \text{ 或 } x < -1. \end{cases}$$

$$5. (1) y = \sqrt[5]{u}, u = 2 - v, v = x^2.$$

$$(2) y = 2u^2, u = \ln v, v = \ln t, t = x^2.$$

$$(3) y = \ln u, u = \sqrt{v}, v = \frac{1-w}{1+w}, w = \sin t, t = 3x.$$

$$(4) y = \frac{u}{v}, u = w - z, v = x^4, w = 2t^4, t = \sin x, z = x^5.$$

作业 5

1. (1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$, 函数在 $x_0 = 1$ 处极限不存在.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, 函数在 $x_0 = 1$ 处极限不存在.

(3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$, 函数在 $x_0 = 1$ 处极限不存在.

(4) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ 函数在 $x_0 = 1$ 处极限存在.

2. 极限值唯一.

数列有界.

$\exists M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $|f(x)| \leq M$.

$\exists M > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| \leq M$.

$\exists N$, 当 $n > N$ 时, $x_n > 0 (< 0)$.

(1) $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(2) $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

$A \pm B$

$A \cdot B$

$\frac{A}{B} (B \neq 0)$.

$B \lim u$.

A

$$3 \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & k = m, \\ 0, & k < m, \\ \infty, & k > m. \end{cases}$$

作业 6

1. $1 + (f(x) - 1) \cdot \lim[f(x) - 1] \cdot g(x)$.

2. $e^{-\sqrt{x}}$.

3. $\frac{1}{e}$.

4. e^2 .

5. 准则 1: 单调有界数列必有极限.

准则 2: 夹逼准则.

数列夹逼准则 设数列 $\{a_n\}, \{x_n\}, \{b_n\}$ 满足:

(1) $a_n \leq x_n \leq b_n$, (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

函数夹逼准则 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $\dot{U}(a, \delta)$ 内有定义,且满足:

$$(1) \text{ 当 } x \in \dot{U}(a, \delta) \text{ 时, } g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad (2) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$$

则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $|x| > X$ 时有定义,且满足:

$$(1) \text{ 当 } |x| > X \text{ 时, } g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A,$$

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

6. 【证明】 由递推关系式,可以推出 $1 \leq a_n \leq 2$, 所以 $\{a_n\}$ 有界.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{1+a_n} - \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})},$$

所以 $a_{n+1} - a_n$ 与 $a_n - a_{n-1}$ 同号,而 $a_2 - a_1 > 0$, 故 $\{a_n\}$ 单调增加, 因此极限存在.

$$7. \text{【提示】 } 1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 2,$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} < \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

$$8. \text{【提示】 单调性 } \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

通项公式 $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, 数学归纳法证明有界.

$$9. \text{【提示】 } \sqrt[n]{10^n} \leq \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 10^n} \leq \sqrt[n]{10^n + 10^n + \cdots + 10^n}$$

$$10 \leq \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 10^n} \leq 10 \sqrt[n]{10^n}.$$

作业 7

1. 略.

2. $0, \beta = o(\alpha)$

$k \neq 0, k$ 为某个确定的数.

$$3. (1) \frac{3}{2} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{a}{m} - \frac{b}{n} \quad (4) 0$$

4. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果 $\forall x_0 \in (a, b)$, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续且在 $x = a$ 处右连续, 在 $x = b$ 处左连续, 则称函数在 $[a, b]$ 上连续.

5. 可去间断点、左右极限均存在但不相等、左右极限都不存在且为无穷、不存在且极限为振荡形式、第一类间断点

6. C

7. B

8. $x = 0$ 连续, $x = 1$ 不连续.

作业 8

1. 闭区间上的连续函数必能够取得最大值、最小值.

闭区间上的连续函数必能够取得介于端点值之间的任何值.

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

$$2. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ 或 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ 或 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

左右导数均存在且相等

曲线的切线的斜率.

$$3. (1) 0, (2) = \mu x^{\mu-1}; (3) a^x \ln a; (4) e^x;$$

$$(5) \frac{1}{x \ln a}; (6) \frac{1}{x}; (7) \cos x; (8) -\sin x;$$

$$(9) \sec^2 x; (10) -\csc^2 x; (11) \sec x \cdot \tan x; (12) -\csc x \cdot \cot x;$$

$$(13) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (14) -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (15) \frac{1}{1+x^2}; (16) -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$4. (1) u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2) u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

$$(3) \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$c \cdot u'(x), -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

$$u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x).$$

5. (2) 【证明】 设 $F(x) = u(x) \cdot v(x)$, 则由导数定义知:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \end{aligned}$$

注意可导一定连续, 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$.

(3) 略.

$$6. \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

$$7. 2^n e^{2x+1}$$

$$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)! 2^n}{(2x+1)^n}$$

$$2^n \sin(2x+1+\frac{n\pi}{2})$$

$$2^n \cos(2x+1+\frac{n\pi}{2})$$

作业 9

1. 例子很多,比如含绝对值的函数, $y = |x|$, $y = |x^2 - x|$ 等,处处连续处处不可导的维尔斯特拉斯函数.

$$2. 2x \cos(x^2).$$

$$3. \frac{\cot \sqrt{x} \operatorname{set}^2 x}{2 \sqrt{x}}$$

$$4. \cot \frac{t}{2}$$

$$5. \frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$$

$$6. (1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$(2) f(x) \text{ 和 } g(x) \text{ 在该去心邻域内可导, 且 } g'(x) \neq 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A (A \text{ 为常数或 } \infty),$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty;$$

$$(2) f(x) \text{ 和 } g(x) \text{ 在该去心邻域内可导, 且 } g'(x) \neq 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A (A \text{ 为常数或 } \infty),$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

$$7. (1) 0. (2) 3. (3) \frac{1}{6}. (4) -\frac{1}{6}.$$

作业 10

1. 【证明】 设 $f(x)$ 在内点 c 处取得最大值, 则

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \quad f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

由于 $f'(c)$ 存在, 所以 $f'_+(c) = f'_-(c)$, 故 $f'(c) = 0$.

同理可证取最小值时结论成立, 证毕.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

【证明】 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 所以存在最大值 M 与最小值 m .

如果 $M = m$, 则函数 $f(x) \equiv$ 常数, 此时 $f'(x) = 0$, ξ 可取 (a, b) 内的任意值.

如果 $M > m$, 由于 $f(a) = f(b)$, 所以 M, m 中至少有一个在 (a, b) 内 $x = \xi$ 处取得, 而函数在开区间 (a, b) 内可导, 所以 $f'(\xi)$ 存在, 由费马引理知 $f'(\xi) = 0$.

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

【证明】 作辅助函数 $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$,

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = 0, F(b) = 0$. 由罗尔定理知: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 证毕.

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 均在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

【证明】 作辅助函数 $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$,

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = 0, F(b) = 0$.

由罗尔定理知: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi) = 0$, 证毕.

$$5. n, \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}, \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}, o[(x-x_0)^n]$$

$$n+1, \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}, \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}, \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 和 } x \text{ 之间}).$$

作业 11

1. 0

$$2. \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$3. e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

4. $\frac{1}{12}$

5. $<$, 极大值, 极大值. $>$, 极小值, 极小值.

6. $f'(x_0) = 0$.

7. 驻点, 驻点, 驻点.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内连续, 在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内可导, 且 $f'(x_0) = 0$ (或 $f'(x_0)$ 不存在), 如果:

(1) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x_0)$ 为极大值;

(2) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x_0)$ 为极小值;

(3) 若在点 x_0 的两侧 $f'(x)$ 不变号, 则 $f(x_0)$ 不是极值.

9. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则:

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

10. $x = 1$ 是极小值点, 极小值 $f(1) = -2$.

作业 12

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$), 水平渐近线.

斜渐近线.

2. $\frac{|y''|}{[1 + y'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{K}.$

$\frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{K}.$

$\frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{K}.$

3. 铅直渐近线 $x = 1$, 水平渐近线 $y = 1$.

4. 不存在.

5. 导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内单调增加, 导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内单调减少

6. $f''(x) > 0, f''(x) < 0$.

7. 拐点, 拐点.

8. $(3, 0)$.

9. 拐点 $(1, 2)$, $(1, +\infty)$ 凹区间, $(-\infty, 0]$ 和 $(0, 1]$ 是凸区间.

作业 13

1. (1) $\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$; (2) $\ln |x| + C$; (3) $\frac{a^x}{\ln a} + C$; (4) $e^x + C$;
 (5) $-\cos x + C$; (6) $\sin x + C$; (7) $\tan x + C$; (8) $-\cot x + C$;
 (9) $\sec x + C$; (10) $-\csc x + C$; (11) $\arcsin x + C$; (12) $\arctan x + C$.

2. (1) $k \int f(x) dx$

(2) $\int f(x) dx + \int g(x) dx$;

(3) $f(x), f(x) dx$;

(4) $f(x) + C, f(x) + C$.

3. 收敛, 发散. $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$, 发散.

$\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, 发散.

4. 无界函数的反常积分

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$, 收敛, 发散.

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$, 收敛, 发散.

$\int_a^c f(x) dx, \int_c^b f(x) dx$

5. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, p > 1, \\ +\infty, p \leq 1. \end{cases} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛.

6. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, q < 1, \\ +\infty, q \geq 1. \end{cases}$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ 发散.

作业 14

1. $\int f[\varphi(x)] d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$.

$F(t) + C, F[\varphi^{-1}(x)] + C$.

2. (1) $-\ln |\cos x| + C$.

(2) $\ln |\sin x| + C$.

(3) $\ln |\sec x + \tan x| + C$.

(4) $\ln |\csc x - \cot x| + C$.

$$(5) \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$(6) \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$(7) \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$(8) \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$3. u \cdot v - \int v du, u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

提示:利用 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, 两边同时积分即可得到证明.

$$4. x \ln x - x + C.$$

$$\frac{1}{4}x^4 \ln^2 x - \frac{1}{8}x^4 \ln x + \frac{1}{32}x^4 + C.$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

作业 15

1. 连续, 有界, 只有有限个间断点.

2. (1) 2. x 轴, 直线 $x=2, y=x$ 所围三角形面积.

(2) $\frac{\pi^2}{4}$. 单位圆在第一象限的面积, $\frac{1}{4}$ 单位圆面积.

3. (1) 无关.

$$(2) -\int_b^a f(x)dx, 0.$$

$$(3) k \int_a^b f(x)dx.$$

$$(4) \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

$$(5) \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$(6) \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \leq.$$

$$(7) m(b-a), M(b-a).$$

$$(8) f(\xi)(b-a).$$

$$4. f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) - f[\psi(x)] \cdot \psi'(x).$$

$$5. \int_a^x f(t)dt + xf(x).$$

$$\int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt.$$

$f(x-a)$.

$$6. e^{(x+y)^2} \left(\int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2 \right) - 1$$

作业 16

1. $F(b) - F(a)$

2. (1) $\int_0^1 f(x) dx$; (2) $\int_a^b f(x) dx$.

3. $\frac{\pi}{4}$

4. (1) $\frac{21}{8}$; (2) $\frac{\pi}{6}$; (3) $1 - \frac{\pi}{4}$; (4) $\frac{\pi}{6}$; (5) 0; (6) 0.

5. a, b .

6. 【证明】 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则当 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ 时, t 的对应为 $\frac{\pi}{2}, 0$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

证毕.

7. 【证明】 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, 则

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x) = - \left[\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

所以 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, 由于 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, I_0 = \frac{\pi}{2}$, 故

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

由上题的结论得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

证毕.

8. 【证明】 令 $x = -t$, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^{-a} f(-t) (-dt) = \int_{-a}^a f(-t) dt = \int_{-a}^a f(-x) dx$$

证毕.

作业 17

1. (1) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

(2) $\int_c^d [\varphi(y) - \psi(y)] dy$.

$$(3) \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

$$2. (1) V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$(2) V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

$$3. \frac{3}{2} \pi a^2.$$

$$4. \frac{4\pi}{3}.$$

$$5. \frac{2\pi(e^2 - 1)}{3}.$$

作业 18

1. 略.

2. 取 $y = kx$, 极限不存在.

$$3. \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + 2y), \frac{\partial f}{\partial y} = 2\cos(x + 2y).$$

4. $(1, 0)$.

5. $(4, 4)$.

$$6. (1) k \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

$$(2) \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

$$(3) \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

$$(4) \iint_D f(x, y) d\sigma < \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

(5) mS_D , MS_D , 其中 S_D 表示 D 的面积.

(6) $f(\xi, \eta) \cdot \sigma$.

(7) 曲顶柱体的体积

(8) 平面薄片的质量.

$$7. \frac{46}{15}$$

$$8. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

$$9. -6\pi^2.$$

作业 19

1. 自变量、未知函数、未知函数的各阶导数、导数的最高阶数、微分方程的函数、含有任意常数且任意常数的个数等于微分方程的阶数的解、特解、初始条件.

线性微分方程.

$$2. \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \text{ 或 } f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C, \text{得通解: } G(y) = F(x) + C.$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{令 } u = \frac{y}{x}, \text{则 } y = xu \text{ 且 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

$$4. \text{一阶线性微分方程, 齐次线性微分方程, } Ce^{-\int p(x)dx}.$$

非齐次线性微分方程.

$$C(x)e^{-\int p(x)dx}, C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}, e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

5. 二阶齐次线性微分方程, $C_1y_1 + C_2y_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数, $C_1y_1 + C_2y_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

$$6. \text{二阶非齐次线性微分方程. } c_1y_1 + c_2y_2 + y^*. \quad y_1^* + y_2^*. \quad y_2^* - y_1^*.$$

$$7. -e^x + e^{3x} - xe^{2x}.$$

$$8. (1) \arcsin y = \arcsin x + C. \quad (2) (1 + e^x)(1 - e^y) = C.$$

$$9. y^2 = x^2 \ln(2x^2).$$

作业 20

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, s_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \text{发散.}$$

2. 发散.

3. $|q| < 1$ 时, 收敛; $|q| \geq 1$ 时, 发散.

4. 有相同的敛散性.

$$\text{收敛, } \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

敛散性.

发散

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

6. 正项级数.

有界.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

$$7. l < 1, l > 1, l = 1.$$

8. 交错级数.

$$(1) u_{n+1} \leq u_n (n = 1, 2, 3, \cdots); (2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

绝对收敛; 发散, 条件收敛.

9. 当 $p > 1$ 时, 收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, 条件收敛.

作业 21

1. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$.

2. (1) 数. (2) $n!$. (3) 不同行、不同列的 n 个元素. (4) $-1, 1$.

3. 余子式, 代数余子式.

$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$

$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$

4. 转置行列式,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

转置行列式, D^T .

5. 变号. k
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为零, 为零, 为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

作业 22

1. (1) $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$. (2) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(3) $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$. (4) $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$. (5) $a^n + (-1)^{n+1}b^n$.

2.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$(-1)^{nm} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$(-1)^{nm} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

0

0

3. -60.

作业 23

1. 主对角线上元素均为 1,其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 n 阶单位矩阵,记做 E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

主对角线上的元素均相等,其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵,又称标量阵. $kE =$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

元素全是 0 的矩阵称为零矩阵,记为 O . $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

如果一个 n 阶方阵除主对角线上的元素外的其他元素均为 0,这个方阵称为 n 阶对角矩

阵, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

如果一个 n 阶方阵主对角线以下的元素均为 0,这个方阵称为 n 阶上三角矩阵,其中矩阵 A

满足元素 $a_{ij} = 0 (i > j)$,其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$

如果一个 n 阶方阵主对角线以上的元素均为 0,这个方阵称为 n 阶下三角矩阵,其中矩阵 A

满足元素 $a_{ij} = 0 (i < j)$,其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$

如果一个 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足条件 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 这个方阵称为 n 阶对称矩阵, 简称 n 阶对称阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

如果一个 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足条件 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 这个方阵称为 n 阶反对称矩阵, 简称 n 阶反对称阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

设 A 是 n 阶矩阵, 若 $A^T A = A A^T = E$, 则称 A 是正交矩阵.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ 2. \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

同型矩阵.

3. 相等, $A = B$.

$$(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, A + B, A + (-B), (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}.$$

$$4. ka_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

$$5. a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n), AB.$$

列数, 行数, A 的行数, B 的列数.

$\neq$

$$6. (1) B + A;$$

$$(2) (A + B) + C;$$

$$(3) A;$$

$$(4) O;$$

$$(5) (kl)A;$$

$$(6) kA + lA, \quad kA + kB.$$

$$(7) A(BC);$$

$$(8) AB + AC, \quad BA + CA;$$

$$(9) A(\lambda B);$$

$$(10) A_{m \times n};$$

(11) $\mathbf{O}$.

7. (1) $|\mathbf{A}|, |(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T|, |\mathbf{A} + \mathbf{B}|;$

(2) $\lambda^n |\mathbf{A}|;$

(3) $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|;$

(4) $|\mathbf{A}|^k;$

(5) $|\mathbf{A}|^{-1}$ (当 $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵时);

(6) $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| + |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4|, \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \end{vmatrix}.$

8. $\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k \text{ 个}}, (\mathbf{A}^{-1})^k.$

作业 24

1. $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

2. (1) $\mathbf{A}^* \mathbf{A}, |\mathbf{A}| \mathbf{E}.$

(2) $k^{n-1} \mathbf{A}^*$

(3) $= 0$

(4) $|\mathbf{A}|^{n-1}$

(5) $|\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A}$

3. $\mathbf{AB}, \mathbf{BA}, \neq 0, = 0.$

4. (1) $\mathbf{A};$

(2) $\frac{1}{|\mathbf{A}|};$

(3) $\frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1};$

(4) $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$

5. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(2) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. 各结论都正确.

作业 25

1. $\beta = 3\alpha$, 可以线性表出.
2. (1) = . (2) > . (3) = . (4) = .
3. = 0; $\neq 0$; $< m$; $= m$
4. $a \neq \frac{35}{6}$.
5. C.
6. 任意两个向量都可以构成一个极大线性无关组, 秩为 2.
7. 极大线性无关组 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (不唯一), 秩为 3.
8. 线性无关.

作业 26

1. $\neq 0$,

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 D 表示系数行列式, $D_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组

$$\text{右端的常数项代替后所得的 } n \text{ 阶行列式, } D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. (1) 可能有无穷多个解, 也可能无解.
- (2) 必等于零.
3. 基础解系, $n - r$.
4. (1) $= n$.
- (2) $< n$.
- 非零解.
5. (1) $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$, 其中 k_1, k_2 是任意常数.
- (2) $Ax = 0$.
- (3) $Ax = 0$.
6. $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_s \xi_s$, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 是任意常数.
7. (1) $Ax = 0$.

(2) $Ax = b$.

(3) $Ax = 2b$.

(4) $Ax = kb$.

8. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r} + \beta$.

9. $a \neq 1$ 时,有唯一解; $a = 1$ 时,有无穷多解.

作业 27

1. A

2. $a = -1$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数.}$$

3. 当 $a = -1, b = -1$ 时,方程组无解;

当 $a \neq -1$ 时, b 为任意实数,方程组有唯一解;

当 $a = -1, b = -1$ 时,方程组有无穷多解,通解为: $(5, -3, 0)^T + k(-3, 2, 1)^T, k$ 为任意常数.

4. $a = 2$ 或 0 .

$$a = 2 \text{ 时,通解为 } x = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数.}$$

$$a = 0 \text{ 时,通解为 } x = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \text{ 为任意常数.}$$

$$5. \text{基础解系可取为: } \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{通解为 } x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

6. (I) $a \neq 3$;

(II) $a = 3, \beta = (2k-1)\alpha_1 + (-3k+2)\alpha_2 + k\alpha_3$, 其中 k 为任意常数.

7. (I) 方程组通解 $x = (2, 1, 0, 0)^T + k_1(1, 3, 1, 0)^T + k_2(-1, 0, 0, 1)^T, k_1, k_2$ 为任意常数.

(II) $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)^T + k(3, 3, 1, -2)^T$, k 为任意常数.

作业 28

1. (1) 主对角线上的元素. (2) a , 任意 n 维非零列向量.

2. (1) λ .

(2) $k\lambda$.

(3) $\frac{1}{\lambda}$.

(4) $\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$.

(5) λ^k .

(6) $\varphi(\lambda)$.

(7) λ .

3. (1) $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}$.

(2) $|\mathbf{A}|$.

(3) 线性无关的, n 个线性无关的特征向量.

4. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i$, 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_i$ 是不全为零的任意常数.

5. (1) $|\mathbf{B}|$; (2) $r(\mathbf{B})$; (3) 特征值.

6. (2) 实数, 实向量.

(3) 不同特征值.

(4) $n - k$.

(5) $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$.

7. (I) $a = -2$.

(II) 特征值为: 2, 2, 6.

故 $\lambda = 2$ 的特征向量: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, k_1, k_2 不全为 0.

故 $\lambda = 6$ 的特征向量: $k_3\alpha_3$, $k_3 \neq 0$.

$$8. (\text{I}) \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(\text{II}) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{101} - 1 & 3^{101} + 1 & 0 \\ 3^{101} + 1 & 3^{101} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

作业 29

1. $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}$. $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{B}$.

2. 略.

$$3. \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

4. 证明: 因为 $\mathbf{A}$ 可逆,

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{A} = \mathbf{BA}$$

所以 $\mathbf{AB} \sim \mathbf{BA}$.

5. (I) $a = -2$.

$$(II) \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{可逆矩阵 } \mathbf{P} \text{ 不唯一. } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$7. \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

作业 30

$$1. \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

2. 规范形

$$3. \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \text{ 其中 } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

4. 标准形 $f = y_1^2$, 规范形 $f = y_1^2$.

$$5. f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$

$$6. \text{正交矩阵 } \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2.$$

7. 全大于 0, 全大于 0.

8 (1) 不正定; (2) 正定.

9. 提示:任意 2 阶可逆矩阵 $P, P^{-1}BP = P^{-1}P = B \neq A$, 不相似.

作业 31

1. $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$

$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

$r!$ 或 $r \cdot (r-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

C_n^m 或 $\frac{n!}{(n-m)!m!}$.

2. 意思表达正确即可。

(1) 若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B , 则称 A 包含于 B , 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生.

(2) 如果 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记为 $A = B$. 此时 A 与 B 表示同一个事件, 它们所包含的样本点完全相同.

(3) 同时属于事件 A 与事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与事件 B 的交或积, 记为 $A \cap B$ 或 AB , 即 $AB = \{\omega_i \mid \omega_i \in A \text{ 且 } \omega_i \in B\}$, 事件 AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生.

(4) 若在任何一次试验中, 事件 A 与事件 B 都不可能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 互不相容, 也称 A 与 B 为互斥事件.

(5) 由至少属于事件 A 与事件 B 中的一个样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的并, 记为 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{\omega_i \mid \omega_i \in A \text{ 或 } \omega_i \in B\}$, 事件 $A \cup B$ 表示事件 A 与 B 中至少有一个发生.

如果事件 A 与 B 互不相容, 则称它们的并为和, 记为 $A + B$.

(6) $AB = \emptyset$, 且 $A \cup B = \Omega$, 称事件 A, B 为互逆事件或对立事件.

3. (1) $B \cup A, B \cap A$;

(2) $A \cup (B \cup C), A \cap (B \cap C)$;

(3) $(A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) $\bar{A} \cap \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}, \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i; \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$.

4. 15.

5. 94.

作业 32

1. (1) 0, 1;

(2) 1;

(3) $\sum_{i=1}^n P(A_i)$.

2. (1) $1 - P(A)$.

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

(3) $P(A) - P(AB), P(A) - P(B)$.

$$3. \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$(1) 0 \leq P(A | B) \leq 1;$$

$$(2) P(\Omega | B) = 1, P(\emptyset | B) = 0;$$

$$(3) \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B);$$

$$(4) 1 - P(A | B);$$

$$(5) P(A | B) - P(AC | B);$$

$$(6) P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 A_2 | B).$$

$$4. P(B)P(A | B);$$

$$P(A)P(B | A);$$

$$P(C | AB)P(B | A)P(A).$$

$$5. C_4^3 (0.7)^3 (1 - 0.7) \times 0.7 = 0.28812.$$

$$6. \frac{77}{315}.$$

$$7. \frac{1}{240}.$$

$$8. 0.5.$$

作业 33

$$1. (1) A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(2) \bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

$$\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i).$$

$$\frac{P(A_k)P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$P(A)P(B)$$

任意事件

$$P(A)P(B), P(A)P(C), P(B)P(C), P(A)P(B)P(C)$$

A, B, C 中任意两个

不能保证三个事件相互独立.

n

$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , A 与 $\bar{B}$

交、并、差构成的新事件, 另外一个事件或者逆事件.

$$2. n \text{ 重伯努利试验, 伯努利概型. } C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$3. (1) \text{ 随机变量仅取数轴上的有限个或可列个孤立点.}$$

(2) 随机变量的可能取值充满数轴上的一个或若干区间.

(3) 既不是离散型随机变量,也不是连续型随机变量.

4. $P\{X \leq x\}$

(1) 0, 1;

(2) $\leq$, 单调不减;

(3) 0, 1;

(4) $F(x_0)$, 右.

5. (1) $F(b)$;

(2) $P\{X < b\}$;

(3) $F(b) - F(b-0)$;

(4) $P\{X > a\}$;

(5) $1 - P\{X < a\} = 1 - F(a-0)$;

(6) $P\{a < X \leq b\}$;

(7) $P\{X < b\} - P\{X \leq a\} = F(b-0) - F(a)$;

(8) $P\{a \leq X < b\}$;

(9) $P\{X = a\} + P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a-0)$.

6. A

作业 34

1. $p_k, k = 1, 2, \dots, n, \dots,$

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

(1) 0

(2) 1.

$$2. \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3, \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}, & x_{n-1} \leq x < x_n, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$F(x_i) - F(x_{i-1}), i = 2, 3, \dots, n, \dots; F(x_1)$

3. X 服从 0-1 分布, 记为 $X \sim B(1, p)$

$$P\{X = k\} = p^k (1-p)^{1-k}, k = 0, 1, \text{或} \begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array}.$$

X 服从二项分布,记为 $X \sim B(n, p)$.

$$p_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

X 服从几何分布,记为 $X \sim G(p)$.

$$p_k = P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots,$$

X 服从泊松分布,记为 $X \sim P(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$ 是某个常数.

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$4. F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$f(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

处处连续;

0.

5. 分布函数法,公式法.

$$P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \in S\}, \text{ 其中 } S = \{x | g(x) \leq y\},$$

$$\begin{cases} \frac{dF_Y(y)}{dy}, & \text{当 } F_Y(y) \text{ 在 } y \text{ 处可导时,} \\ 0, & \text{当 } F_Y(y) \text{ 在 } y \text{ 处不可导时.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \text{ 其中 } \alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}, \beta =$$

$$\max\{g(-\infty), g(+\infty)\}.$$

6. X 服从均匀分布,记为 $X \sim U(a, b)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \text{其中 } a < b.$$

X 服从正态分布,记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \text{ 其中 } \mu \text{ 和 } \sigma \text{ 均为常数,且 } \sigma > 0.$$

X 服从指数分布,记为 $X \sim E(\lambda)$.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{其中 } \lambda > 0.$$

作业 35

$$1. P\{X \leq x, Y \leq y\}, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

$$(1) 0, 1$$

$$(2) F(x_2, y) > F(x_1, y); F(x, y_2) > F(x, y_1);$$

(3) $0, 1$;

(4) 右

(5) $F(x_1, y_2), F(x_1, y_1)$

2. $P\{X \leq x\} = F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$;

$P\{Y \leq y\} = F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$. 边缘分布函数.

3. $F_X(x)F_Y(y)$

离散型

$P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad i = 1, \dots, m, \dots, \quad j = 1, \dots, n, \dots,$

(1) $p_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, \dots, j = 1, \dots, n, \dots$;

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

$P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$.

$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \dots$

$\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \dots$

边缘概率分布, 边缘概率分布.

4. $P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \dots$

$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \dots$

$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$

5. $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$

$f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$;

$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

7. $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

作业 36

1. $\begin{cases} \frac{1}{S_G}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$\frac{S_D}{S_G}$, 其中 S_D 是区域 D 的面积

2.
$$\begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

3.
$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$
 其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 为常数, 且 $-\infty <$

$\mu_1 < +\infty, -\infty < \mu_2 < +\infty, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1,$

$N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho).$

4.

常用重要分布	期望	方差
0-1 分布 $B(1, p)$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n, p)$	np	$np(1-p)$
几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布 $H(M, N, n)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$
泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
均匀分布 $U(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2

5. 数学期望, 期望或均值.

$$\sum_{k=1}^n x_k p_k.$$

数学期望, 期望或均值

6.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k) p_k.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

7. $\lambda(\lambda+1).$

8.
$$\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

作业 37

1. (1)C.

(2) $aE(X) + b$

(3) $E(X) \pm E(Y), \sum_{i=1}^n c_i E(X_i)$

(4) $E(X)E(Y), E(X_1) \cdot \cdots \cdot E(X_n).$

2. 方差, 标准差或均方差.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$

3. (1)0, $D(X)$.

(2) $D(aX + b) = a^2 D(X)$

(3) $D(X) + D(Y), \sum_{i=1}^n c_i^2 D(X_i)$

$$\begin{aligned} 4. D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} = E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

5. 协方差, $E(XY) - E(X)E(Y), D(X)$.

6. (1) $\text{Cov}(Y, X)$

(2) $ab\text{Cov}(X, Y)$

(3) $\text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$

(4)0.

(5) $D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$.

$$7. \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}.$$

8. (1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;

(2) 对 $a > 0, b > 0$, 有 $\rho(aX, bY) = \rho(X, Y)$;

(3) $P\{Y = aX + b\} = 1$ 且 $a \neq 0$.

9. 0, 0.

不相关; 不相关.

X 与 Y 相互独立.

10. 证明: 因为 $P_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, 于是

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{k(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= np \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} + \\
 &\quad np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
 &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} + \\
 &\quad np \sum_{t=0}^{n-1} C_{n-1}^t p^t (1-p)^{(n-1)-t} (\text{其中 } t = k-1) \\
 &\quad \xlongequal{r=k-2} n(n-1)p^2 \sum_{r=0}^{n-2} C_{n-2}^r p^r (1-p)^{(n-2)-r} + np \\
 &= n(n-1)p^2 + np.
 \end{aligned}$$

$$E(X) = np,$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

作业 38

1. 解: 由指数分布知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad E(X) = 1,$

$$\begin{aligned}
 E(X + e^{-2X}) &= E(X) + E(e^{-2X}) = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-2x} e^{-x} dx = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx \\
 &= 1 + \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

2. $\frac{D(X)}{\epsilon^2}$

3. 1, 0.

4. 相互独立同分布, 数学期望 $E(X_i) = \mu (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$

5. 相互独立同分布, 具有相同的数学期望和方差

6. 总体, 个体. 样本, 样本的容量.

7. 观测值, 样本值

8. 统计量.

9. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

10. 提示: $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}^2$
 $= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.$

11. $N(0, 1)$

$\chi^2(n_1 + n_2).$

$n, 2n.$

$\chi^2(n-1);$

相互独立.

作业 39

$$1. T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}, \frac{n}{n-2} (n > 2).$$

$$t(n-1).$$

$$t(m+n-2).$$

$$2. F = \frac{X/m}{Y/n}$$

$$F(n, m);$$

$$\frac{n}{n-2} (n > 2), \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} (n > 4).$$

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1), S_X^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2, S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2.$$

$$3. \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = E(X^2).$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k = E(X^k).$$

4. 似然函数, 最大似然估计值, 最大似然估计量

$$5. \text{解: } E(S_1^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D(X_i) = D(X) = \sigma^2,$$

$$E(S_2^2) = D(X) = \sigma^2,$$

$$D(S_1^2) = \frac{2\sigma^4}{n}, D(S_2^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

$$6. \text{解: } E(X) = \mu, E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2,$$

$$\text{由} \begin{cases} \bar{X} = E(X) = \mu \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X}, \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \end{cases}$$

$$7. \text{估计量 } \hat{a} = 2\bar{X}, \text{最大似然估计量 } \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$