

No.

Date

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

pf. $\binom{n}{r}$: n 元集合的 r 组合数

取定 $a \in S$

(1) 含 a 的 r 组合: $\binom{n-1}{r-1}$

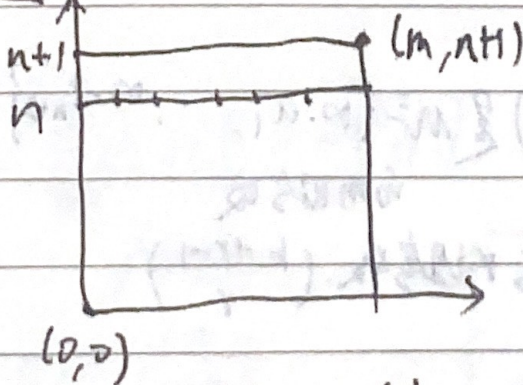
(2) 不含 a 的: $\binom{n-1}{r}$

$$\binom{m+n+1}{m} = \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m-1} + \dots + \binom{n}{0}$$

pf (非降路径):

左边: $(0,0) \rightarrow (m, n+1)$ 的非降路径数:

右边:



$$(0,0) \rightarrow (i,n) \xrightarrow{\text{向上}} (i,n+1) \xrightarrow{\text{向右}} (m,n+1)$$

(i,n) 1种 (i,n+1) 1种

最后一步向上的点 (离开第 i 层)

No.

Date

P.f 2 (r组合)

左: $\binom{m+n+1}{m} : S = \{a_1, \dots, a_{m+n+1}\}$ 的 m 组合数

右: $\binom{m+n}{m} :$

(1) 不含 a_1 $\binom{m+n}{m}$

(2) 含 a_1 不含 a_2 : $\binom{m+n-1}{m-1}$

(3)

P.f 3 (含 a_1 的 r 组合数)

$\binom{m+n+1}{m} = \binom{m+(n+2)-1}{m}$ 是 $M = \{\infty, a_1, \dots, \infty, a_{n+2}\}$ 的 m 组合数

注: $\{\infty, a_1, \dots, \infty, a_k\}$ 的 r 组合数 $\binom{k+r-1}{r}$

m 组合含 i 个 a_1

$$\binom{n+1+(m-i)-1}{m-i} = \binom{m-i+n}{m-i}$$

$i = 0, \dots, m$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$$

pf. n 元集合 S , $a \in S$

偶元子集 $\xrightarrow{-\{a\}}$ 奇元子集
 $\cup \{a\}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

例 4: $\binom{n+1}{k+1}$: $n+1$ 元集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ 的 $k+1$ 组合

$\binom{n}{k}$: 含 a_1 的组合

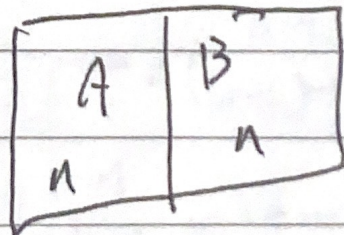
$\binom{n-1}{k}$: 不含 a_1 , 含 a_2

$\vdots$

证: pf. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$

对称性

$$\sum \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$



从 A 取 k , 从 B 取 $n-k$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_t = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$$

① 项数 $= n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$ 的非负整数解个数

$$= \binom{n+t-1}{n}$$

② 乘积项: t^n

$$(x_1 + \dots + x_t)(x_1 + \dots + x_t) \dots (x_1 + \dots + x_t)$$

$n \uparrow$

$$x_{i1} x_{i2} \dots x_{in} \quad x_{ij} \in \{x_1, \dots, x_t\}$$

$\leftrightarrow \{ \infty \cdot x_1, \dots, \infty \cdot x_t \}$ 的全排列

③ 令 $x_1 = \dots = x_t = 1, n$

$$t^n = \sum_{n_1 + \dots + n_t = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_t}$$

系数之和为 t^n

$$\textcircled{4} \binom{n}{n_1} = \binom{n-1}{n_1} + \binom{n-1}{n_1-1} \quad (\text{项式}) \rightarrow = \binom{n-1}{(n-n_1)-1} + \binom{n-1}{n_1-1}$$

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} = \binom{n-1}{(n_1-1), n_2, \dots, n_t} + \binom{n-1}{n_1, (n_2-1), \dots, n_t} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, (n_t-1)}$$

上标-1, 下标每项减1

依次

No.

Date

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

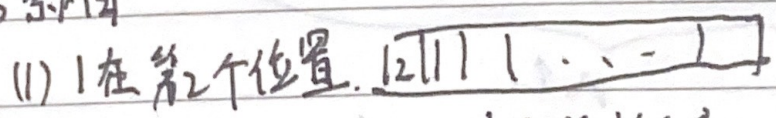
pf2. 递推



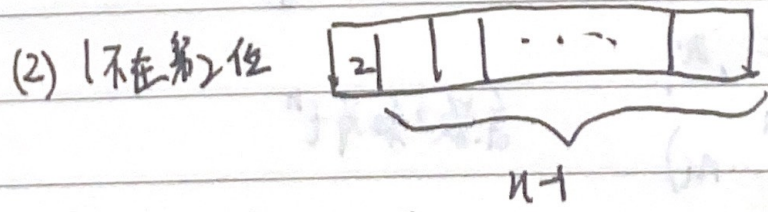
A_i 表示首位是 i 的 n 阶错排 ($i=2, 3, \dots, n$)

$$|A_2| = |A_3| = \dots = |A_n| \quad \therefore D_n = (n-1) |A_2|$$

考察 $|A_2|$



$n-2$ 个元素的错排 } $3 \sim n$ 放在第 $3 \sim n$, 3 不可放在3位
 有 D_{n-2} 种 } 4 不在第4位
 :



$1, 3 \sim n$ 放在 $2 \sim n$ 位.
 要求 1 不在第2位. } $n-1$ 阶错排
 $3 \dots 3$ } D_{n-1}
 $4 \dots 4$
 :

所以:
$$\begin{cases} D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \\ D_1 = 0, D_2 = 1 \end{cases}$$

$Q_n: \{1, \dots, n\}$ 全排列, 且不出现 $12, 23, \dots, (n-1)n$.

$$Q_1 = 1 \quad (\text{规定})$$

$$Q_2 = 1 \quad (2! \text{ 限制条件})$$

$$Q_3 = 3 \quad \begin{matrix} 123, 132, 213, 231, 312, 321 \\ \times \quad \quad \times \quad \quad \times \quad \quad \times \quad \quad \times \end{matrix}$$

$$Q_4 = 11$$

$S: \{1, \dots, n\}$ 的全排列

$P_i: i(i+1)$ 出现 $(i=1, 2, \dots, n-1)$

可求为 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}|$

$$|S| = n! \quad |A_i| = (n-1)!$$

$i(i+1)$ 看为整体

$$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} j=i+1, \text{ 即 } i(i+1)(i+2) \\ \equiv (n-2)! & j > i+1, \text{ 即 } i(i+1), j(j+1) \end{cases}$$

$$(1) j=i+1, \quad \sim = (n-2)!$$

$$(2) j > i+1, \quad \sim = \cancel{(n-2)!} (n-2)!$$

$$k \text{ 个的交: } |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)! \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

$$\therefore Q_n = n! - (n-1)(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! + \dots + (-1)^{n-1} (n-(n-1))!$$

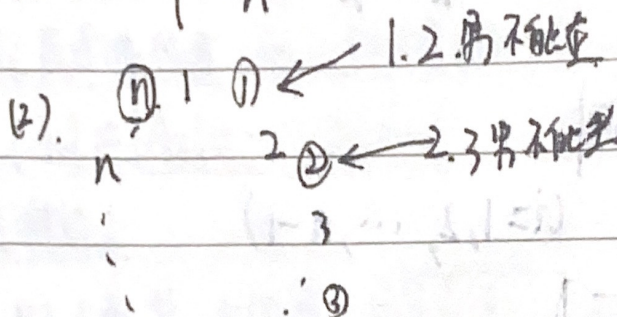
No.

menage 问题 $\# = (n-1)! \times U_n$

解: (1) 先排 n 位女:

(2) 排 n 位男

(1) 圆排列: $\frac{n!}{n} = (n-1)!$



i 号位不能放 i 或 $i+1$ 号男士

$\rightarrow 1 \sim n$ 的全排列. 第 i 位不能是 i 或 $i+1$
第 n 位 $\dots n$ 或 1 } = 重错排 U_n

重 U_n :

S : $1 \sim n$ 全排列.

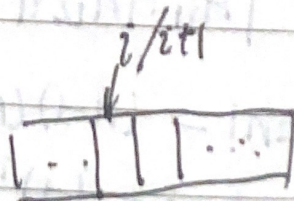
P_i : 第 i 号放 i 或 $i+1$, 即 $A_i = i$ 或 $i+1$

($i = 1, 2, \dots, n-1$)

P_n : 第 n 位放 n 或 1

$\therefore U_n = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n|$

$|A_i| = 2(n-1)!$



$|A_i \cap A_j|$

$$|A_1 \cap A_3|$$

$$= 2 \times 2 \times (n-2)!$$

$$|A_1 \cap A_2|$$

$$= (1 \times 2 + 1 \times 1) \times (n-2)! = 3(n-2)!$$

$$U_n = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots$$

$$+ (-1)^k \sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots$$

$$= W(0) - W(1) + W(2) - \dots + (-1)^k W(k) + \dots$$

$W(k)$: 有 k 个位置满足要求 n 排列数.

$$(12)(23)(34) \dots ((n-1)n)(n1)$$

1 2 2 3 3 4 ... n-1 n n 1

2n 个数
从 2n 个数中选 k 个不相邻的
无后继数字序列

但要去掉取 1, 1

$$W(k) = \left[\binom{2n-k+1}{k} - \binom{2n-4-(k-2)+1}{k-2} \right] (n-k)!$$

No.

	1	2	3	4	5
a	///				///
b		///	///		
c			///	///	
d					
e					///

$S = a \sim e$ 全排列

P_i : 第 i 位放禁止字符 ($i=1, 2, \dots, 5$)

$$\# : |\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_5| = N(0)$$

$$|S| = 5! \quad |A_1| = 1 \times 4! \quad |A_2| = 1 \times 4! \quad |A_3| = 2 \times 4!$$

$$|A_4| = 4! \quad |A_5| = 2 \times 4!$$

$$w(1) = \sum |A_i| = \text{一个位置受限的排列数}$$

$$= \# \text{ 一位受限} \cdot 4! = 7 \times 4!$$

$$w(2) = \# \text{ 两位受限的排列数 (不能在同一行、同一列)}$$

$$= \# \text{ 不同行不同列两个位置受限的组合数} \cdot 3!$$

$$= 16 \times 3!$$

$$w(k) = \# \text{ } k \text{ 个不同行不同列位置受限} \cdot (5-k)!$$

No.

Date

棋盤大，計算困難 (1) 递归

① 在 B_1 上取 i 个不同行不同列的...② 在 B_2 上取 $k-i$ 个不同行不同列的...

$$r_k(B) = \sum_{i=0}^k r_i(B_1) \cdot r_{k-i}(B_2)$$

$$\text{规定 } r_0(B) = 1$$

 B_2 B_1 B_2

$$r_0(B_1) = 1$$

$$r_0(B_2) = 1$$

$$r_1(B_1) = 3$$

$$r_1(B_2) = 4$$

$$r_2(B_1) = 1$$

$$r_2(B_2) = 3$$

$$r_3(B_1) = 0$$

$$r_3(B_2) = 0$$

⋮

⋮

$$r_1(B) = 3 + 4 = 7 = r_1(B_1)r_0(B_2) + r_0(B_1)r_1(B_2)$$

$$\begin{array}{l} \diagup \quad \diagdown \\ 1 \times 0 \quad 0 \times 1 \end{array} = 3 \times 1 + 1 \times 4$$

$$r_2(B) = 1 + 3 + 3 \times 4 = 16$$

$$r_3(B) = 3 \times 3 + 1 \times 4 = 13$$

$$r_4(B) = 1 \times 3 = 3$$

$$r_5(B) = 0$$

No.

Date

棋子多项式:

$$R(x, B) = r_0(B) + r_1(B)x + \dots + r_k(B)x^k + \dots$$

$$R(x, B) = R(x, B_1)R(x, B_2)$$

~~例: $R(x, B)$~~

B 不能划分成行列不变时, 记特殊阴影格为 S .

$r_k(B)$ = k 个不同行列的阴影格找法.

① k 个中含 S : 在棋盘删去 S 所在行列, 在剩余棋盘上找 $k-1$ 个, 记棋盘为 B_S^*

$$= r_{k-1}(B_S^*)$$

② 不含 S : 直接去掉 S , 在剩余棋盘上找 k 个, 记为 B_S

$$= r_k(B_S)$$

$$\therefore r_k(B) = r_{k-1}(B_S^*) + r_k(B_S)$$

$$R(x, B) = x \cdot R(x, B_S^*) + R(x, B_S)$$

No.

Date

例2.

$$R(x, B) = R(x, B_1) R(x, B_2)$$

$$= R(x, B_1) (1 + 1 \cdot x)$$

$$R(x, B_1) = x \cdot R(x, B_1^*) + R(x, B_{1,5})$$

$$= x \left[(1+2x)(1+2x) \right] + (1+3x+x^2)^2$$

解 错排问题

	1	2	...	n
1	X			
2		X		
...			X	
...				X
n				X

$$R(x, B) = (1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$$

$$\therefore D_n = n! - r_1(B)(n-1)! + r_2(B)(n-2)! + \dots$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \dots$$

No.

Date

1. Möbius 函数 $\mu(n)$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (\text{若有 } i > 1) \text{ 即有平方因子} \\ (-1)^r & (n = p_1 p_2 \cdots p_r) \end{cases}$$

$$n > 1, n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_r^{l_r} \quad (p_1, \dots, p_r \text{ 两两不同})$$

$$\forall d|n, d = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r} \quad (0 \leq x_i \leq l_i)$$

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}) = \sum_{0 \leq x_i \leq l_i} \mu(p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r})$$

$$= \mu(1) + \sum_{\substack{0 \leq x_i \leq l_i \\ \text{不全为 } 0}} \mu(p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r})$$

$$= 1 + \sum_{1 \leq k \leq r} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \mu(p_{i_1} \cdots p_{i_k})$$

$$= 1 + \sum_{1 \leq k \leq r} \binom{r}{k} (-1)^k$$

$$\binom{r}{0} (-1)^0$$

$$= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k = (1-1)^r = 0$$

$$\text{pf.} \Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \left[\sum_{d'|\frac{n}{d}} g(d') \right]$$

$$= \sum_{d|n} \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d) g(d')$$

$$d|n, d'|\frac{n}{d} \Rightarrow dd'|n$$

$$= \sum_{d'|n} \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(d) g(d')$$

注意范围

$$= \sum_{d'|n} g(d') \left[\sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(d) \right]$$

$$= \begin{cases} 1 & \frac{n}{d'}=1 \Leftrightarrow d'=n \\ 0 & \frac{n}{d'} \neq 1 \Leftrightarrow d' \neq n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow d'=n \\ \rightarrow d' \neq n \end{cases}$$

$$= g(n) \cdot 1 + \sum_{\substack{d'|n \\ d' \neq n}} g(d') \left[\sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(d) \right] \equiv 0$$

$$= g(n) + 0 = g(n)$$

No.

Date

$$\text{欧拉函数 } \varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

$$\Rightarrow n = \sum_{d|n} \varphi(d) \quad \begin{aligned} &= \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} \\ &f(n)=n \end{aligned}$$

例2. 可重圆排列

$S = \{1, \dots, m\}$ 的 n 重圆排列数.

n 可重圆排列个数 $T(n)$ 按周期长度分组

$$T(n) = \sum_{d|n} M(d) : \begin{aligned} &M(d) \text{ 为长为 } d, \text{ 周期为 } d \text{ 的圆排列数} \\ &\text{即 } \text{由 } \text{长为 } d \text{ 的圆排列重复 } \frac{n}{d} \text{ 次} \end{aligned}$$

长为 n 的圆排列个数

(长为 n 的圆排列对 d 重圆排列有 d 个)

$$m^n = \sum_{d|n} d \cdot M(d) = g(n)$$

根据 Möbi

$$\Rightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$nM(n) = \sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}$$

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}$$

$$\therefore T(n) = \sum_{d|n} M(d) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \left(\sum_{d'|d} \mu(d') m^{\frac{d}{d'}} \right)$$

No.

Date

第五章 生成函数

1. 生成函数 有数列 $\{a_0, a_1, \dots, a_k, \dots\}$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$$

为数列的生成函数 $\triangleq G\{a_n\}$

2. 用生成函数求数列

(1) 构造生成函数 $G\{a_n\}$

§5.3

直接 $\swarrow$ $\searrow$ 间接: 利用已知数列的生成函数

(2) 将 $G\{a_n\}$ 展开成形式幂级数(3) x^n 的系数即为所求 a_n

例1. 掷骰子:

(1) 两次, (i_1, i_2) 求 $i_1 + i_2 = 10$ 的概率

$$P_1 = \frac{\text{点数之和为10的情况数}}{\text{总情况数}} = \frac{3}{6^2}$$

(6, 4), (5, 5), (4, 6)

(2) 10次, $(i_1, i_2, \dots, i_{10}) \rightarrow$ 记为 a_{30}

$$P_2 = \frac{\text{点数之和为30的情况数}}{\text{总情况数}} = \frac{1}{6^{10}}$$

$$i_1 + i_2 + \dots + i_{10} = 30 \quad 1 \leq i_j \leq 6$$

 a_n : 点数之和为 n 的情况数

No.

Date

① $A(x) = (x+x^2+\dots+x^6)(x+x^2+\dots+x^6)\dots(x+x^2+\dots+x^6)$

10

② 证明 $A(x)$ 是 a_n 的生成函数

即证: x^n 系数是 a_n

即: 每一个 x^n 项与计数像一一对应

每一个 x^n 项 $\leftrightarrow$ 点数之和为 n 的情况

展开 $\downarrow$

$$x^{i_1} \cdot x^{i_2} \dots x^{i_{10}} = x^{i_1+i_2+\dots+i_{10}}$$

$$x^n \rightarrow i_1+i_2+\dots+i_{10}=n \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_{10}) \text{ 且 } i_1+i_2+\dots+i_{10}=n$$

反之也成立 $\rightarrow$ 点数之和为 n 的一种情况

$$\binom{-10}{j} = (-1)^j \binom{10+j-1}{j}$$

$\therefore A(x)$ 是 a_n 的生成函数

(2) 展开 $A(x)$

$$A(x) = (x+x^2+\dots+x^6)^{10} = x^{10} (1+x+\dots+x^5)^{10}$$

$$= x^{10} \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^{10} = x^{10} (1-x^6)^{10} (1-x)^{-10}$$

$$= x^{10} \left[\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (-x^6)^i \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-10}{j} (-x)^j \right]$$

$$= x^{10} \left[\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (-1)^i x^{6i} \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{10+j-1}{j} x^j \right]$$

$$\begin{array}{ll} i=3 & j=2 \\ i=2 & j=8 \\ i=1 & j=14 \end{array}$$

No.

Date

找 a_{30} : $i=0$ $j=20$

$$= \binom{10+20-1}{20} = \binom{10}{1} \binom{10+14-1}{14} + \binom{10}{2} \binom{10+8-1}{8}$$

$$= \binom{10}{3} \binom{10+2-1}{2}$$

§5.2 形式幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k + \dots$$

定义运算

$$① A(x) \pm B(x) = \sum (a_k \pm b_k) x^k$$

$$② \lambda A(x) = \sum (\lambda a_k) x^k$$

$$③ A(x) \cdot B(x) = \sum (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0) x^k$$

$$④ \frac{A(x)}{B(x)} \triangleq C(x) = \sum c_k x^k$$

$$B(x)C(x) = A(x)$$

$$\begin{cases} b_0c_0 = a_0 \Rightarrow c_0 \text{ 确定} \\ b_0c_1 + b_1c_0 = a_1 \Rightarrow c_1 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{或猜则验证}$$

$$⑤ \text{求导 } D(A(x)) \triangleq \sum_k a_k \cdot k x^{k-1} \triangleq A'(x)$$

$$⑥ \text{积分 } \int A(x) dx = \sum_k \int a_k x^k dx$$

No.

Date

§5.3 生成函数性质

已知 $\{a_k\}$, $A(x) = \sum a_k x^k$ 求 $\{b_k\}$ 的生成函数 $B(x) = \sum b_k x^k$

$$1. b_k = \begin{cases} 0 & (k < l) \\ a_{k-l} & (k \geq l) \end{cases}$$

$$\{a_k\}: a_0, a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$$

 $\{b_k\}$ 即向右平移 l 位

$$\text{则 } B(x) = x^l A(x)$$

即 $B(x)$ 是 $A(x)$ 的

2. 向右平移 $b_k = a_{k+l}$

$$B(x) = \frac{1}{x^l} (A(x) - \sum_{i=0}^{l-1} a_i x^i)$$

$$\text{即 } B(x) = \sum b_k x^k = \sum a_{k+l} x^k = \frac{x^l}{x^l} \sum a_{k+l} x^k$$

$$= \frac{1}{x^l} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+l} x^{k+l}$$

$$= \frac{1}{x^l} (A(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{l-1} x^{l-1})$$

向前加

No.

3. $b_k = \sum_{i=0}^k a_i$, 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$

Date

4. 向前加 $b_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$, 则 $B(x) = \frac{A(x) - x \cdot A(x)}{1-x}$

pf.3: $B(x) = \sum b_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k + \dots$

$$= a_0$$

$$+ a_0 x + a_1 x$$

$$+ a_0 x^2 + a_1 x^2 + a_2 x^2$$

⋮

$$+ a_0 x^k + a_1 x^k + \dots + a_k x^k$$

$$\uparrow 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$$

证法2

$$= a_0(1+x+x^2+\dots) + a_1 x(1+x+x^2+\dots) + a_2 x^2(1+x+\dots)$$

$$+ a_k x^k(1+x+x^2+\dots) + \dots$$

$$= \frac{1}{1-x} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = \frac{A(x)}{1-x}$$

No.

Date

$$\text{pf. 4. } B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k + \dots$$

← A(1)

$$= a_0 + a_1 + \dots$$

$$+ (a_1 + \dots)x$$

$$+ (a_2 + \dots)x^2 + \dots$$

$$= A(1) - 0$$

$$+ A(1)x - a_0x$$

$$+ A(1)x^2 - a_0x^2 - a_1x^2$$

$$+ \dots$$

$$+ A(1)x^k - a_0x^k - a_1x^k - \dots - a_{k-1}x^k$$

$$+ \dots$$

$$= A(1)(1 + x + x^2 + \dots) - a_0x(1 + x + x^2 + \dots)$$

$$= a_1x^2(1 + x + x^2 + \dots)$$

$$= \frac{1}{1-x} (A(1) - a_0x - a_1x^2 - a_2x^3)$$

$$= \frac{1}{1-x} (A(1) - x(A(x)))$$

$$5. b_k = k a_k$$

$$6. b_k = \frac{a_k}{k+1}$$

$$5. B(x) = x \cdot A'(x)$$

$$6. B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t) dt$$

$$7. C_k = 2a_k + \beta b_k, \text{ 则 } C(x) = 2A(x) + \beta B(x)$$

$$8. C_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 \quad (* \text{卷积})$$

$$\text{则 } C(x) = A(x) \cdot B(x)$$

常见生成函数

$$1. G\{1\} = \frac{1}{1-x}$$

$$2. G\{a^k\} = \frac{1}{1-ax}$$

$$\text{证 } G\{a^k\} = 1 + ax + a^2 x^2 + a^3 x^3 + \dots + a^k x^k + \dots$$

$$= 1 + ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \dots + (ax)^k + \dots$$

$$\sqrt{ax} \rightarrow t$$

$$G\{1\} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^k + \dots = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-ax}$$

$$3. G\{k\} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$k = k \cdot 1 = k \cdot a_k$$

$$G\{k\} = x \cdot (G\{1\})' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

No.

Date

$$4. G\{k(k+1)\} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

$$G\{k(k+1)\} = G\{k^2 + k\} = G\{k^2\} + G\{k\}$$

$$= G\{k \cdot k\} + G\{k\}$$

$$= x(G\{k\})' + G\{k\}$$

$$5. G\{k^2\} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$6. G\{k(k+1)(k+2)\}$$

$$k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$$

$\downarrow$
 $k \cdot k^2$

$$\Delta G\{k(k+1)(k+2)\} = A(x)$$

$$\int_0^x t \cdot A(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)(k+2) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)(k+2) \cdot \frac{1}{(k+2)!} x^{k+2}$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) x^k$$

$$= x^2 G\{k(k+1)\}$$

No.

Date

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum \binom{n+k}{k} x^k$$

$$(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$$

例1. 已知 $G\{a_n\} = A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x}$, 求 a_n

$$\frac{2+3x-6x^2}{1-2x} = \frac{2+3x(1-2x)}{1-2x}$$

$$= 3x + \frac{2}{1-2x}$$

$$= 3x + 2 \sum 2^n x^n$$

$$a_n = \begin{cases} 7, & n=1 \\ 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}, & n \neq 1 \end{cases}$$

No.

例2. 计算 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

解: 令 $b_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, 取 $a_n = n^2$, 则 $A(x)$

$$\therefore B(x) = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

$$= (x+x^2) \cdot \frac{1}{(1-x)^4} = (x+x^2) \left(\sum_k \binom{3+k}{k} x^k \right)$$

$$b_n = \binom{3+n-1}{n-1} + \binom{3+n-2}{n-2} = \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2}$$

§5.4

(2) $\{0, a_1, \dots, n, a_n\}$ 的 k 组合数 b_k $b_k x^k$

$$\text{解: 令 } A(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)\cdots(1+x+x^2+\dots)$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$a_1 \quad \quad \quad a_2 \quad \quad \quad n \quad \quad \quad a_n$$

$$\text{展开: } x^{i_1} \cdot x^{i_2} \cdots x^{i_n} = x^{i_1 + \dots + i_n}$$

$$\text{每一项 } x^k \text{ 次} \rightarrow i_1 + i_2 + \dots + i_n \rightarrow \{i_1 a_1, i_2 a_2, \dots, i_n a_n\}$$

k 组合

$\therefore x^k$ 项的系数即为 k 组合数

$\therefore A(x)$ 是生成函数

$$A(x) = (1+x+x^2+\dots)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum \binom{n-1+k}{k} x^k$$

$$\therefore b_k = \binom{n-1+k}{k}$$

(1) $\{a_1, \dots, a_n\}$ 的 k 组合数

$$A(x) = (1+x)(1+x)\cdots(1+x) = (1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$$

(3) $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数

$$A(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+\dots+x^4)(1+x+\dots+x^5)$$

No.

Date §5.5 排列型个 指数生成函数

$$1. P(n, k) = n(n-1) \cdots (n-k+1)$$

$$G\{P(n, k)\} = \sum_k n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{x^k}{k!} = \sum_k \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

$$G\{a_k\} = \sum a_k x^k$$

2. 指数——只针对排列数 $P(n, k)$

$$\sum n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) \cdot \frac{x^k}{k!}$$

注：展开式中 b_k 是 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数

3. $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ 为 k 排列数 b_k

要求 a_i 出现次数集合为 M_i ，则 b_k 为指数型生成函数

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} \frac{x^m}{m!} \right)$$

$$\text{pf. 展开: } \frac{x^{i_1}}{i_1!} \cdot \frac{x^{i_2}}{i_2!} \cdots \frac{x^{i_n}}{i_n!} = \frac{x^{i_1 + \dots + i_n}}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!}$$

$$x^k \text{ 项: } \rightarrow i_1 + \dots + i_n = k, \quad \frac{x^k}{i_1! \cdots i_n!} \cdot \frac{k!}{i_1! \cdots i_n!} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

$\{i_1 a_1, i_2 a_2, \dots, i_n a_n\}$ 的所有排列

$\frac{x^k}{k!}$ 的系数恰为 k 排列数 b_k

No.

Date

例 1 指数型生成函数

$$1 + \frac{x^0}{0!} + 1 \cdot \frac{x^1}{1!} + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + 1 \cdot \frac{x^k}{k!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \triangleq e(x)$$

性质: $e(x)e(y) = e(x+y)$

pf: $e(x)e(y) = \left(\sum_i \frac{x^i}{i!}\right) \left(\sum_j \frac{y^j}{j!}\right)$

$$= \left(\sum_i \frac{x^i}{i!}\right) \left(\sum_j \frac{y^j}{j!} \cdot x^j\right)$$

$$= \sum_k \left(\sum_{i+j=k} \frac{1}{i!} \cdot \frac{y^j}{j!} \right) x^k$$

$$= \sum_k \frac{1}{k!} \left(\sum_j \frac{k!}{(k-j)!j!} \left(\frac{y}{x}\right)^j \right) x^k$$

$$= \sum_k \frac{1}{k!} \left[\left(1 + \frac{y}{x}\right)^k \right] x^k = \sum_k \frac{(x+y)^k}{k!} = e(x+y)$$

No.

Date

~~11/12~~ 13/12.

$\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^3$$

$0 \qquad \qquad \qquad 1, 2, 3 \qquad \qquad \qquad \uparrow = [e^x]^3$

$$= \frac{e(x) + e(-x)}{2} [e(x)]^3$$

$$= \frac{e(x) + e(-x)}{2} e(3x) = \frac{1}{2} (e(4x) + e(2x))$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_k \frac{(4x)^k}{k!} + \sum_k \frac{(2x)^k}{k!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_k 4^k \cdot \frac{x^k}{k!} + \sum_k 2^k \cdot \frac{x^k}{k!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_k (4^k + 2^k) \cdot \frac{x^k}{k!} \right)$$

$$\therefore \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{4^k + 2^k}{2} = b_k$$

例3. $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$$

$$= \frac{x^2}{6} (3+x)(1+x) + e(x) + \frac{e(x)+e(-x)}{2}$$

$$= \frac{x^2}{12} (3+4x+x^2) [e(2x)+1] = \frac{x^2}{12} (3+4x+x^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} + 1\right)$$

则五位数个数 $b_5 = 5! \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(3 \cdot \frac{2^3}{3!} + 4 \cdot \frac{2^2}{2!} + \frac{2^1}{1!}\right)$

x^5 的系数

例4.

§5.6 正整数分拆

1. $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ n 的一个 k 分拆

分拆分量 $n_i \geq 1$

2. 有序分拆 无序分拆

3. 分拆数

§5.6.1 有序分拆 $n = n_1 + \dots + n_k$ $n_i \geq 1$

~~$(x_1, x_2, \dots, x_k)$~~

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

求方程的正整数解

① 正整 n 的有序 k 分拆数为 $\binom{n-1}{k-1}$

② 分量 ~~大于等于~~ $n_i \geq p_i$ 令 $x_i - p_i = y_i$

$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - \sum p_i$, $y_i \geq 0$ 的解个数

为 $\binom{n+k-\sum p_i-1}{k-1}$

No.

Date

③ 假设 $2n$ 的 k 分拆, 使分拆量都是正整数偶数

$$2n = 2n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_k \quad n_i \geq 1$$

$$\therefore \Leftrightarrow n \text{ 的 } k \text{ 分拆 } \binom{n-1}{k-1}$$

④ n 的 k 分拆, 要求 n 与 k 奇偶一致, 则 n 的分拆量都是奇数
所有有序分拆数为

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \quad \text{每项} +1 \text{ (奇偶)}$$

$$n+k = n_1+1 + n_2+1 + \dots + n_k+1$$

$$\therefore \binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}$$

§5.6.2 无序分拆

1. $B(n, k)$ 表示 n 的无序 k 分拆数, 简称分拆

$$B(n, k) = 0 \quad (k > n \text{ 时})$$

$$B(n) = \sum_{k=1}^n B(n, k)$$

2. $4 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2$ 是同分拆

无序分拆: 按分拆量降序排列 即 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

$$\geq k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_n \cdot n \quad (k_i \geq 0)$$

$$\triangleq |k_1 k_2 \dots k_n| \quad (\text{只是记号, 不是连乘})$$

$$B(n+k, k) = B(n, 1) + B(n, 2) + \dots + B(n, k)$$

$$\text{if } n+k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

$$n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1$$

问题 $\downarrow$

$$n = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) \quad n_{k-1} \geq 0$$

n 的不超过 k 个分部的分解

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_i + \underbrace{0 + \dots + 0}_{i \leq k}$$

$\downarrow$

k 部

问题 $\downarrow$

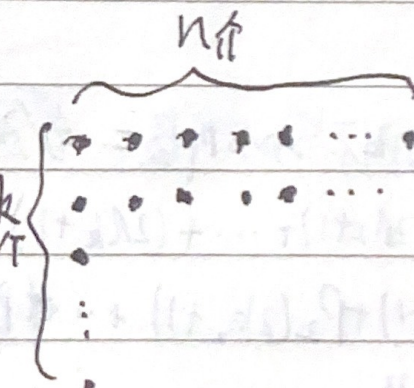
$$n+k = (n_1+1) + (n_2+1) + \dots + (n_i+1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-i}$$

k 部

§5.6.3 Ferrers 图

$$1. n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

行: 分部
列: 最大分部



2. 共轭: 行列互换

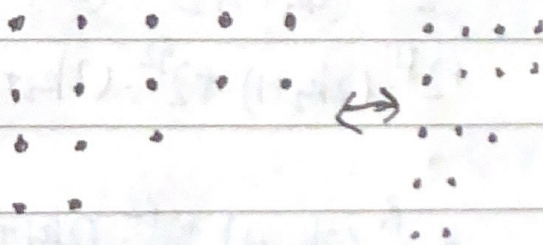
得到共轭图 仍是 Ferrers 图, 为特征分析

$$\text{例: } 15 = 5 + 5 + 3 + 2$$

$\updownarrow$

$$15 = 4 + 4 + 3 + 2 + 2$$

(k 与 n 互换)



No.

Date

3. ~~最大~~ $B(n, k)$ = 是 k 个量为 1 的分拆数 (共轭)

4. n 的自共轭分拆的个数 = 各分量全为奇数且两两不等分拆数

$$n = (2n_1+1) + (2n_2+1) + \dots + (2n_k+1)$$

$\uparrow \quad \downarrow \quad n_1 > n_2 > \dots > n_k$

n_1+1

$$i: \quad \cancel{i-1} + n_i + 1$$

$$i+1: \quad i + (n_{i+1} + 1) = i+1 + n_{i+1}$$

$$n_i \geq n_{i+1} + 1$$

$$l_i > l_{i+1}$$

5. n 的多分量两两不等分拆数 = 各分量都是奇数的分拆数

$$n = (2k_1+1) + (2k_2+1) + \dots + (2k_t+1)$$

$$\triangleq p_1 \cdot (2k_1+1) + p_2 \cdot (2k_2+1) + \dots + p_t \cdot (2k_t+1) \quad k_1 > k_2 > \dots > k_t$$

$$(p_i = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots \quad (i_1 > i_2 > \dots)) \quad \text{例: } 5 = 2^2 + 2^0$$

$$\rightarrow = 2^{i_1} \cdot (2k_1+1) + 2^{i_2} \cdot (2k_1+1) + \dots$$

$$+ 2^{j_1} \cdot (2k_2+1) + 2^{j_2} \cdot (2k_2+1) + \dots$$

$$+ 2^{p_1} \cdot (2k_t+1) + 2^{p_2} \cdot (2k_t+1) + \dots$$

两两不等.

10/8/14

No.

例: $24 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1$

Date

$$= 2 \cdot 5$$

$$+ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

$$+ 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1$$



一一对应

例: $24 = 10 + 6 + 4 + 3 + 1$

$$= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1$$

$$= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1$$

Th. 5.6.7 生成函数

$B_r(n)$: 各分量都不超过 r 的分拆数

$$(i) \sum B_r(n) x^n$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)} = \prod_{j=1}^r \frac{1}{1-x^j}$$

pf. $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

$$= k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \cdots + k_r \cdot r$$



$$x_1 + 2x_2 + \cdots + r \cdot x_r = n \text{ 的整数解 (非负)}$$

令

$$A(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+(x^2)^2+\cdots)(1+x^3+(x^3)^2+\cdots)\cdots(1+x^r+(x^r)^2+\cdots)$$

$$x^{i_1} \cdot (x^2)^{i_2} \cdot (x^3)^{i_3} \cdots (x^r)^{i_r} = x^{i_1 + 2i_2 + \cdots + ri_r}$$

$$\text{令 } x^n \text{ 的系数} \rightarrow i_1 + 2i_2 + \cdots + ri_r = n \rightarrow n = i_1 + i_2 \cdot 2 + \cdots + i_r \cdot r$$

n 的分拆数不超过 r



一一对应

No.

Date

$$H = \{1, \dots, r\}$$

$$(2) \sum B_H(n) = \prod_{j \in H} \frac{1}{1-x^j}$$

$$(3) \sum B(n) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}$$

推论 5.6.2 分布量 (西西不) 的分析数 = 各分部量都是奇数的分析数

证: $\prod_{j=1}^{\infty} (1+x^j) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-x^{2j}}{1-x^j} = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdots$

偶次全约掉

$$\prod_{j \in H} \frac{1}{1-x^j} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots$$

推论 5.6.1 n 的 r 分析数生成函数:

$$\frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}$$

No.

Date

递推关系、

$$H(n) = f(H(n-1), H(n-2), \dots, H(n-k))$$

k阶递推关系、