

§6.2 常系数线性齐次递推方程求解

线性: $f(n) = C_1 f(n-1) + C_2 f(n-2) + \dots + C_k f(n-k) + g(n)$

常系数性: $f(n) = C_1 f(n-1) + C_2 f(n-2) + \dots + C_k f(n-k) + g(n)$

齐次: $g(n) = 0$

非齐次: $g(n) \neq 0$

$f(n) = C_1 f(n-1) + C_2 f(n-2) + \dots + C_k f(n-k) + g(n)$

$$q^n = C_1 q^{n-1} + C_2 q^{n-2} + \dots + C_k q^{n-k}$$

$$q^k = C_1 q^{k-1} + C_2 q^{k-2} + \dots + C_k$$

$$q^k - C_1 q^{k-1} - C_2 q^{k-2} - \dots - C_k = 0 \text{ 特征方程}$$

求解步骤: 1) 特征方程: $x^k - C_1 x^{k-1} - C_2 x^{k-2} - \dots - C_k = 0$

求特征根: $x_1, x_2, \dots, x_k$

2) 构造 k 个无类解

① k 个特征根两两不同:

$$x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n \text{ 线性无关}$$

$$\text{通解 } f(n) = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \dots + C_k x_k^n$$

② 有重根 $x_1, x_2, \dots, x_t$ 两两不同

$$e_1, e_2, \dots, e_t \quad \sum e_i = k$$

$$\text{通解 } x_1^n, n x_1^n, n^2 x_1^n, \dots, n^{e_1-1} x_1^n, \dots$$

通解 = 线性组合

$$\text{例1 } \begin{cases} f(n) = 2f(n-1) + 2f(n-2) \\ f(1) = 3, f(2) = 8 \end{cases}$$

$$\text{解: } x^2 - 2x - 2 = 0 \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{通解: } f(n) = (1+\sqrt{3})^n C_1 + (1-\sqrt{3})^n C_2$$

$$\begin{cases} C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3}) = 3 \\ C_2(1+\sqrt{3}) + C_1(1-\sqrt{3}) = 8 \end{cases} \Rightarrow C_1, C_2$$

$$\text{例2 } \begin{cases} f(n) = 3f(n-1) - f(n-2) \\ f(1) = 1, f(2) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t) = g(t-1) \\ g(t) = 3f(t-1) + 2g(t-1) \\ g(0) = 0, f(0) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore g(t) = 2g(t-1) + 3g(t-2)$$

$$g(0) = 0, g(1) = 3$$

$$\text{特征方程: } x^2 - 2x - 3 = 0 \quad x_{1,2} = -1, 3$$

$$\therefore g(t) = C_1 3^t + C_2 (-1)^t$$

$$\text{例3 } \begin{cases} f(n) = 4f(n-1) - 4f(n-2) \\ f(1) = 1, f(2) = 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad x_{1,2} = 2$$

$$\text{通解: } f(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

例4

§6.3

$$f(n) = C_1 f(n-1) + C_2 f(n-2) + \dots + C_k f(n-k) + g(n) \quad (1)$$

$$\text{特解: } C_1 f(n-1) + \dots + C_k f(n-k) = 0 \quad (2)$$

齐次通解 = 非齐次特解 + 齐次通解

$g(n)$	特征方程	特解 $f(n)$
1	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	λ^k
n	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^k
n^2	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^2
n^3	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^3
n^4	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^4
n^5	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^5
n^6	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^6
n^7	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^7
n^8	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^8
n^9	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^9
n^{10}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{10}
n^{11}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{11}
n^{12}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{12}
n^{13}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{13}
n^{14}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{14}
n^{15}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{15}
n^{16}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{16}
n^{17}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{17}
n^{18}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{18}
n^{19}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{19}
n^{20}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{20}
n^{21}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{21}
n^{22}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{22}
n^{23}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{23}
n^{24}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{24}
n^{25}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{25}
n^{26}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{26}
n^{27}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{27}
n^{28}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{28}
n^{29}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{29}
n^{30}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{30}
n^{31}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{31}
n^{32}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{32}
n^{33}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{33}
n^{34}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{34}
n^{35}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{35}
n^{36}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{36}
n^{37}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{37}
n^{38}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{38}
n^{39}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{39}
n^{40}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{40}
n^{41}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{41}
n^{42}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{42}
n^{43}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{43}
n^{44}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{44}
n^{45}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{45}
n^{46}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{46}
n^{47}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{47}
n^{48}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{48}
n^{49}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{49}
n^{50}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{50}
n^{51}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{51}
n^{52}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{52}
n^{53}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{53}
n^{54}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{54}
n^{55}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{55}
n^{56}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{56}
n^{57}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{57}
n^{58}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{58}
n^{59}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{59}
n^{60}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{60}
n^{61}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{61}
n^{62}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{62}
n^{63}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{63}
n^{64}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{64}
n^{65}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{65}
n^{66}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{66}
n^{67}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{67}
n^{68}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{68}
n^{69}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{69}
n^{70}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{70}
n^{71}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{71}
n^{72}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{72}
n^{73}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{73}
n^{74}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{74}
n^{75}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{75}
n^{76}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{76}
n^{77}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{77}
n^{78}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{78}
n^{79}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{79}
n^{80}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{80}
n^{81}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{81}
n^{82}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{82}
n^{83}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{83}
n^{84}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{84}
n^{85}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{85}
n^{86}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{86}
n^{87}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{87}
n^{88}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{88}
n^{89}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{89}
n^{90}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{90}
n^{91}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{91}
n^{92}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{92}
n^{93}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{93}
n^{94}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{94}
n^{95}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{95}
n^{96}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{96}
n^{97}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{97}
n^{98}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{98}
n^{99}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{99}
n^{100}	$\lambda^k - C_1 \lambda^{k-1} - \dots - C_k = 0$	n^{100}

$$\text{例1 } \begin{cases} f(n) = 2f(n-1) + 4^{n-1} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$f(n) = 1$$

$$\text{特征方程: } f(n) = 2f(n-1)$$

$$\text{特征根: } x = 2$$

$$\text{通解: } f(n) = C \cdot 2^n$$

$$C \cdot 2^n = 2 \cdot C \cdot 2^{n-1} + 4^{n-1}$$

$$4n = 2n + 1 \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$\text{通解: } f(n) = \frac{1}{2} 4^n + C \cdot 2^n$$

$$\therefore \text{通解 } f(n) = \frac{1}{2} 4^n + C \cdot 2^n$$

§ 7.3

集合分割与斯特林数

1. 第一类斯特林数 $S(n, k)$: n 元素集合的分割数

$$S(n, 1) = 1, S(n, n) = 1, S(n, k) = 0 \quad (k > n)$$

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1, S(n, n-1) = \binom{n}{2}$$



有 2 个元素，其他元素

$$a_k \in 2^{n-1} \text{ (不能独立)}$$

2. $S(n, k) = S(n, k-1) + k S(n, k)$

$$P: A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$$

(1) a_{n+1} 单独一块: $a_1, \dots, a_n \rightarrow k-1$ 块
有 $S(n, k-1)$ 种

(2) 不单独: 先把 $a_1, \dots, a_n \rightarrow k$ 块
选一个把 a_{n+1} 放进去 k 种

3. $S(n+1, k) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S(n, k-i)$

$$4. S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

每个元素放到 $k-i$ 块
的 n 种排列数

n 元素集合 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 的分割

$\longleftrightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

每个元素放到 $k-i$ 块
的 n 种排列数

注意: $\longleftrightarrow$ 排列数

$$A: a_1, a_2, \dots, a_n \longleftrightarrow U: a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$a_i \in A \longleftrightarrow a_i \in U$$

$$a_i \in A \longleftrightarrow a_i \in U$$

例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的分割 $\longleftrightarrow$ 3 块 $U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \longleftrightarrow U = \{1, 2, 3, 4\}$

§ 7.4 分配问题

n 个球	r 个箱	元素	方案数
不同	不同	允许	r^n
	不同	不允许	$r! S(n, r)$
	相同	允许	$\sum_{k=0}^n S(n, k) r^k$
	相同	不允许	$S(n, r)$
	不同	允许	$\sum_{k=0}^n S(n, k) r^k$
	不同	不允许	$S(n, r)$
	相同	允许	$\sum_{k=0}^n S(n, k) r^k$
	相同	不允许	$S(n, r)$

能否区分与正整数分析

n 元素集合 r 个箱, 但每个箱不用为 r 种

$\therefore r! S(n, r)$

盒子相同, 只有排列, 没有排列

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n, x_i \geq 0$$

不定方程 整数解问题

例: 2 枚硬币 $\rightarrow x_1, x_2$

解: $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$

4 种组合

$\{1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2\}$ 排列

$\frac{4!}{2!2!} = 6$

$\therefore 4! \binom{4}{2, 2} = 6$ (排列)

例: $(x+y+z)^n$ 展开式

x^n, y^n, z^n 的排列

$n! \binom{n}{n, n, n}$

排列数

例: $2n+1$ 个球 $\rightarrow 3$ 种

每个箱至少 1 个 $\rightarrow$ 1 种

$\rightarrow$ 1 种

2n+1 个球 $\rightarrow 3$ 种

$n! \binom{n}{n, n, n}$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

$\sum_{k=0}^n S(n, k) 3^k$

例: 竹牌问题 $\rightarrow 5$ 个不同的牌

6 个不同牌 $\rightarrow 5$ 个不同的牌

有 5 个不同牌

例: $(n+1)^5 - 5^5$

分析: 将 5 个不同牌分成 5 类, 用 5 个不同牌

(1) 5 个不同牌

(2) 5 个不同牌

(3) 5 个不同牌

(4) 5 个不同牌

(5) 5 个不同牌

(6) 5 个不同牌

(7) 5 个不同牌

(8) 5 个不同牌

(9) 5 个不同牌

(10) 5 个不同牌

(11) 5 个不同牌

(12) 5 个不同牌

(13) 5 个不同牌

(14) 5 个不同牌

(15) 5 个不同牌

(16) 5 个不同牌

(17) 5 个不同牌

(18) 5 个不同牌

(19) 5 个不同牌

(20) 5 个不同牌

(21) 5 个不同牌

(22) 5 个不同牌

(23) 5 个不同牌

(24) 5 个不同牌

(25) 5 个不同牌

(26) 5 个不同牌

(27) 5 个不同牌

(28) 5 个不同牌

(29) 5 个不同牌

(30) 5 个不同牌

(31) 5 个不同牌

(32) 5 个不同牌

(33) 5 个不同牌

(34) 5 个不同牌

(35) 5 个不同牌

(36) 5 个不同牌

(37) 5 个不同牌

(38) 5 个不同牌

(39) 5 个不同牌

(40) 5 个不同牌

§ 8.1 引论

例 1 用红黄蓝三色为正方体 6 个面着色, 若为蓝

种 (1) 正方体面不变的

$$2^6 = 64$$

(2) 正方体旋转

恒等旋转	0	1	2	3	4	5	6	Σ
不动的旋转	1		2	2	2	1	1	10
		1	1	1	1	1	1	
不动的旋转	1	(4) 6	(2) 15	(3) 20	15	6	1	64

§ 8.2

子群判定方法

① $\langle G, \cdot \rangle$ 是群, H 是 G 的子集, $a, b \in H$

$a \cdot b \in H$, 则 H 是 G 的子群

② 若 $\langle G, \cdot \rangle$ 是群, H 是 G 的子集, $a, b \in H$

$a \cdot b \in H$, 则 H 是 G 的子群

例 1 用红黄蓝三色为正方体 6 个面着色, 若为蓝

种 (1) 正方体面不变的

例 1 用红黄蓝三色为正方体 6 个面着色, 若为蓝

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

例 1 用红黄蓝三色为正方体 6 个面着色, 若为蓝

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

种 (1) 正方体面不变的

2. 置换群: 对称群的子群

例: $S_n: n!$ 阶的 n 次置换群

$\{ \sigma \} = 1$ 阶的 n 次置换群

例: 3 次置换群: $S_3 \{ \sigma \}$

$H = \{ \sigma_0, \sigma_1 \}$ 是 2 阶的 3 次置换群

$\sigma_0 \sigma_0 = \sigma_1, \sigma_1 \sigma_1 = \sigma_0, \sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1, \sigma_1 \sigma_0 = \sigma_0$

$\sigma_0 = (1 \ 2 \ 3), \sigma_1 = (1 \ 3 \ 2)$

$H = \{ \sigma_0, \sigma_1 \}$ 是 2 阶的 3 次置换群

$\sigma_0 \sigma_0 = \sigma_1, \sigma_1 \sigma_1 = \sigma_0, \sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1, \sigma_1 \sigma_0 = \sigma_0$

$\sigma_0 = (1 \ 2 \ 3), \sigma_1 = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

$\sigma_0 \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$

$\sigma_1 \sigma_0 = (1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$

3. 任何置换可表示为不相交轮换之积

例: $D = \{ 1, \dots, n \}$ 上任意置换 σ

$\forall i \in D, \sigma(i), \sigma^2(i), \sigma^3(i), \dots$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

$\sigma^k(i) = i$

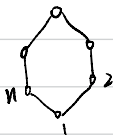
$\sigma^k(i) = i$

8.4

例2: r 个字母, k 为 n 的环型字个数?

$$D = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$R = \{c_1, \dots, c_r\}$$

 $f: D \rightarrow R$ 环型字

 D 上置换群 $G = C_n$ (n 次循环群)
 $= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}\}$
 $F = \{f: D \rightarrow R\}$ 上每个 G 等价类定义一个环型字

例3: 珍珠串项链 (没有前后, 可翻转) (二维体)

8.5 Burnside 引理

D: 待安排的对象集合

F: 映射的全体 $\{f: D \rightarrow R\}$ 目标: $F \pm G$ 等价类个数

G: D 上置换群

8.5.1 共轭系

1. G 是 S_n 的子群, $\forall s, t \in S_n$ 若有 $g \in G$, 使 $s = g^{-1}tg$, 则称 s 与 t 是 G 共轭的
 $\downarrow$ 左乘 g
 $gs = tg$
2. G 共轭是等价关系3. S_n 共轭: $\forall s, t \in S_n$, s 与 t 是 S_n 共轭
 $\Leftrightarrow$
 s 与 t 同型
 $\therefore S_n$ 置换/ S_n 共轭 分类每一类称为共轭类
例4: S_4 $1^4, 2^2, 3^1, 4^1$

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{解 } 1b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 = 4 \quad b_i \geq 0$$

$$1^4 \text{ (4个珠子同颜色): } (1)(2)(3)(4)$$

1³: 无解

$$1^2 2^1: \text{排列组合: } (XX) \text{ 有 } \binom{4}{2} = 6 \text{ 种}$$

$$1^1 3^1: (XXX) \text{ 有 } \binom{4}{3} \cdot (3-1)! = 8 \text{ 种 (圆排列)}$$

$$2^2: (XX)(XX) \text{ 有 } \frac{\binom{4}{2} \cdot (2-1)!}{2} = 3 \text{ 种, 3组2个珠子之间无顺序}$$

$$4^1: (1-1)! = 1 \text{ 种, 还是圆排列}$$

8.5.2 k 不动置状态1. $k \in D$, $Z_k = \{\sigma \in G, \sigma(k) = k\}$ 称为 G 上 k 不动置状态例: S_4 $Z_1 = \{\sigma_1, (23), (24), (34), (234), (243)\}$

$$\sigma = (1) \begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix} \quad \downarrow \text{右乘 (23)} \\ Z' = \{\sigma_1, (34)\}$$

2. Z_k 是置换群证: $Z_k \subseteq G \subseteq S_n$ $\sigma_1 \in Z_k$, Z_k 非空 $\forall \sigma, \tau \in Z_k \Rightarrow \sigma\tau \in Z_k$

$$\sigma\tau(k) = \sigma(\tau(k)) = \sigma(k) = k$$

(因为 k 不变)

 $\therefore \sigma\tau \in Z_k$ 有封闭性

8.5

$D = \{1, \dots, n\}$ 上置换群 G

k -不动量就是 $\sigma = \{i \in G, \sigma(i) = i\}$

8.5.3 等价类: 元素 $1 \sim n$ 的分类

1. G -等价: $\forall k, l \in D$, 若 $\exists \sigma \in G$, 使 $\sigma(k) = l$
称 k 与 l 是 G -等价

2. G -等价是 D 上的等价关系 (自反, 传递, 对称)

Pf. (1) 自反性: $\forall k \in D, \exists \sigma \in G, \sigma(k) = k$, $\therefore k$ 与 k G -等价

(2) 对称性: $\forall k, l \in D$, 若 k 与 l G -等价,

存在 $\sigma \in G$, 使 $\sigma(k) = l$

$\therefore \sigma^{-1} \in G, \sigma^{-1}(l) = k$

$\therefore l$ 与 k G -等价

3. 等价类: $E_k = \{l \mid k \text{ 与 } l \text{ 是 } G\text{-等价的}\}$
 $= \{l \mid \exists \sigma \in G, \sigma(k) = l\}$

性质: (1) $E_k \neq \emptyset$ ($k \in E_k$)

(2) $E_k = E_l$ 或 $E_k \cap E_l = \emptyset$ ($k \neq l$)

$\Downarrow$
 k 与 l 是 G -等价时

(3) $\bigcup_{k \in D} E_k = D$

$\approx Z_1$
例 $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = \{(1), (23), (24), (34), (234), (243)\}$

$E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2, 3, 4\} = E_3 = E_4$
 $Z_1 = \{1\}$, $Z_2 = \{(23), (24), (34)\}$, $Z_3 = \{(234), (243)\}$
(1) $G_1 = \{(1), (34)\}$, $Z_4 = \{(1, 2, 3)\}$

$E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}$, $E_3 = \{3, 4\} = E_4$
 $Z_1 = \{(1), (3, 4)\}$, $Z_2 = \{(1), (3, 4)\}$, $Z_3 = \{(1)\} = Z_4$

$|E_1| \cdot |Z_1| = 2 = |G_1| = 2$

4. $|E_k| \cdot |Z_k| = |G|$ ($k=1, \dots, n$)

Pf. 设 $E_k = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ 且 $a_i = k$

不妨假设 $\exists p_i \in G$ 使 $p_i(k) = a_i$ ($i=1, 2, \dots, l$)

(1) $|p_i Z_k| = |Z_k|$

$p_i Z_k = \{p_i \pi \mid \pi \in Z_k\}$
 $\forall \pi_1 \neq \pi_2 \Rightarrow p_i \pi_1 \neq p_i \pi_2$. 故 $|p_i Z_k| = |Z_k|$
两边点乘 p_i^{-1} : $p_i^{-1} p_i \pi_1 = p_i^{-1} p_i \pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2$ 矛盾
 $\therefore$ 假设成立, 故 $p_i \pi_1 \neq p_i \pi_2$

(2) $p_i Z_k \cap p_j Z_k = \emptyset$ ($i \neq j$)

故 $p_i Z_k \cap p_j Z_k = \emptyset$

故 $p_i Z_k \cap p_j Z_k = \emptyset$

$\sigma \in p_i Z_k, \exists \pi_i \in Z_k$ 使 $\sigma = p_i \pi_i = p_i(k) = a_i$
 $\sigma \in p_j Z_k, \exists \pi_j \in Z_k$ 使 $\sigma = p_j \pi_j = p_j(k) = a_j$

$\therefore a_i = a_j$
 $\therefore i = j$

(3) $\bigcup_{i=1}^l p_i Z_k = G$

$|G| = |p_1 Z_k| + \dots + |p_l Z_k| = |Z_k| + \dots + |Z_k|$
 $= l \cdot |Z_k| = |E_k| \cdot |Z_k|$

(4) $\bigcup_{i=1}^l p_i Z_k = G$
 $\pi \in Z_k \subseteq G$
 $p_i \in G$

(5) $\forall \sigma \in G, \exists p_i \in G, \exists \pi \in Z_k$ 使 $\sigma = p_i \pi$
设 $\sigma(k) = a_j \Rightarrow \exists p_j \in G, \pi \in Z_k$ 使 $\sigma = p_j \pi$
 $\therefore p_i = p_j$

$p_1 Z_k$	$\sigma(k)$
$p_2 Z_k$	a_2
$\vdots$	$\vdots$
$p_l Z_k$	a_l

G

4.5.4 Burnside 定理
1. $G = \{a_1, \dots, a_m\}$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 上置换群
2. G 诱导出的等价类个数:
 $l = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^m C_i(a_i)$
其中 $C_i(a_i) = a_i$, 即作用群不变元素的个数
 $= 1$ -轮换的个数

D 诱导出的等价类

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ 上等价类的个数

$l = \{1, \dots, n\}$

F 上置换群

例 6 正方形顶点着色

$F = \{f_1, f_2, \dots, f_{16}\}$ 上置换群



不动点 p_i
轮换 p_i
轮换 p_i
轮换 p_i

5.7 poly a

模长 = P_G

① 求与 F_2 上同价类个数 m_i

构造 F_2 上置换群 $G = \{\pi^{(i)} : F_2 \rightarrow F_2\}$

D 上置换群 $\rightarrow F_2$ 上 G

$\forall \pi \in G \rightarrow \pi^{(i)}$

1) 定义 $\pi^{(i)}$ 如下 $\pi^{(i)} : F_2 \rightarrow F_2$
 $f \mapsto f \pi^{-1} : D \rightarrow D$

$\pi^{(i)}$ 是 $F_2 \rightarrow F_2$ 映射? $w(f \pi^{-1}(u)) = w(f) \pi(u)$
 $\pi^{(i)}$ 是一一映射? $\pi(u) = w(f \pi^{-1}(u)) = w(f)$
 G_i 是群? $\pi(u) = w(f \pi^{-1}(u)) = w(f)$

$G_1 \Rightarrow F_2$ 上置换群 G
 $\pi_1 = (1)(2)(3)(4) \Rightarrow \pi^{(1)} : f \mapsto f \pi^{-1} = f$

$\pi_2 = (1234) \Rightarrow \pi^{(2)} : f \mapsto f \pi^{-1} = (f_4 f_3 f_2 f_1)$
 $= (f_1 f_2 f_3 f_4)$

$\pi_3 = (13)(24) \Rightarrow \pi^{(3)} = (f_1 f_3)(f_2 f_4)$

$\pi_4 = (1432) \Rightarrow \pi^{(4)} = (f_1 f_4 f_3 f_2)$

② 等价类个数 = $P_G(|R|, |P|^2, \dots, |P|^k)$

例1.  rgb

1) 旋转 $D = \{1, 2, 3\}$ $R = \{r, b, g\}$

D 上置换群 $G = \{(1)(2)(3), (123), (132)\}$

$13 \quad 3' \quad 3'$

轮换指标

$P_{G_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3} (x_1^3 + 2x_3)$

等价类个数 = $P_{G_1}(3, 3, 3) = \frac{1}{3} (3^3 + 2 \times 3)$

= 11

模长 = $P_{G_1}((r+g+b), (r^2+g^2+b^2))$

$(r^3+g^3+b^3)$

$= \frac{1}{3} ((r+b+g)^3 + 2(r^3+g^3+b^3))$

$= r^3+g^3+b^3+r^2b+r^2g+b^2r+b^2g+r \dots$

2) 用 Burnside 定理

$m_i = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} C_i(\pi^{(i)}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} C_i(\pi^{(i)})$

3) 等价类个数 = $\sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} C_i(\pi^{(i)})$

F 的全体模长 = $\sum_{i=1}^k m_i w_i = \sum_{i=1}^k \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} C_i(\pi^{(i)}) w_i$

$= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \left(\sum_{i=1}^k C_i(\pi^{(i)}) w_i \right)$

F_2 上 $\pi^{(i)}$ 作用下保持不变的映射个数

$\{f | w(f) = w_i\}$

$\pi^{(i)}(f) = f \pi^{-1} = f$

即 $f = \pi$

$= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \left(\sum_{f \in F} w(f) \right)$

$= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \left(\sum_{f \in F} w(f) \right)$

$= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \left(\sum_{f \in F} w(f) \right)$

作业

60 k与9最大公因数不为1时, $L^{(k)}$ 是拉丁方

$L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(4)}, L^{(5)}, L^{(7)}, L^{(8)}$ 是拉丁方

4) $L^{(2)}$ 与 $L^{(5)}$ 正交吗? 不正文

$$L^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \quad a_{ij}^{(k)} = i + j \cdot k \pmod{9}$$

$L^{(2)}$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	2	4	6	8	1	3	5	7
1	1	3	5	7	0	2	4	6	8
2	2	4	6	8	1	3	5	7	0
3	3	5	7	0	2	4	6	8	1
4	4	6	8	1	3	5	7	0	2
5	5	7	0	2	4	6	8	1	3
6	6	8	1	3	5	7	0	2	4
7	7	0	2	4	6	8	1	3	5
8	8	1	3	5	7	0	2	4	6

和 $L^{(5)}$ 如图所示

存在相同列对偶

$\langle a_{00}^{(2)}, a_{00}^{(5)} \rangle$

和 $\langle a_{33}^{(2)}, a_{33}^{(5)} \rangle$

都是 $(0, 0)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	5	1	6	2	7	3	8	4
1	1	6	2	7	3	8	4	0	5
2	2	7	3	8	4	0	5	1	6
3	3	8	4	0	5	1	6	2	7
4	4	0	5	1	6	2	7	3	8
5	5	1	6	2	7	3	8	4	0
6	6	2	7	3	8	4	0	5	1
7	7	3	8	4	0	5	1	6	2
8	8	4	0	5	1	6	2	7	3

解 这里, $p = 2, n = 3$. $F_2[x]$ 上的3次不可约多项式为 $f(x) = x^3 + x + 1$.

令 a 是 $f(x) = 0$ 的一个根, 即 $a^3 = a + 1$, 则

$$F_8 = \{a_0 + a_1 a + a_2 a^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in F_2\}$$

$$= \{0, 1, a, a^2, 1+a, a+a^2, 1+a^2, 1+a+a^2\}$$

$$= \{0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}.$$

a 称为是 F_8 的本原元素.

$$F_8 = \{a_0 + a_1 a + a_2 a^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in F_2\} \quad F_2 = \{0, 1\}$$

$$= \{0, 1, a, a^2, 1+a, 1+a+a^2, a+a^2, 1+a^2\}$$

$$= \{0, 1, a, a^2\}$$

$$1+a=a^3$$

$$1+a+a^2 = a^3 + a^2 = a^2(a+1) = a^2 \cdot a^3 = a^5$$

$$1+a^2 =$$

